KABV WEERGAWE 1

GRAAD 12 **WISKUNDE** ONDERWYSERSGIDS

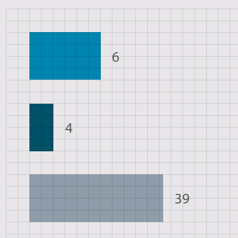
GESKRYF DEUR VRYWILLIGERS

EVERYTHING MATHS DEUR

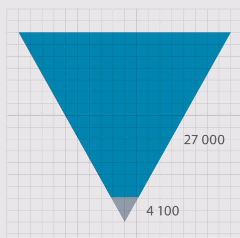


SIYAVULA

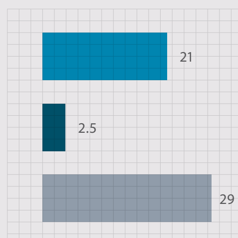
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING



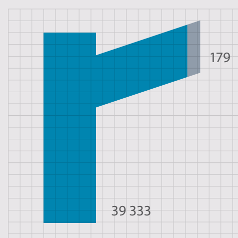
- Trigonometry exercises in this book
- Geometry exercises in this book
- Algebra exercises in this book



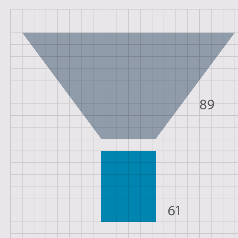
- Litres of ink used in the production of all the grade 10, 11 and 12 textbooks
- Litres of glue used in the production of all the grade 10, 11 and 12 textbooks



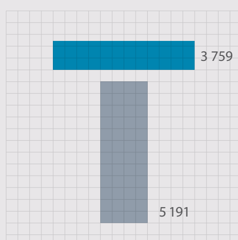
- Breadth of this book (cm)
- Depth of this book (cm)
- Height of this book (cm)



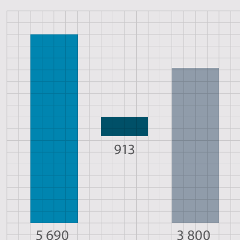
- Number of words used in this book
- Number of pages



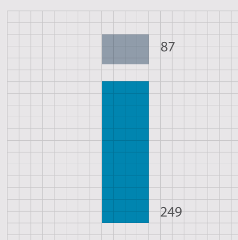
- Hours spent being taught this book
- Hours spent doing homework from this book



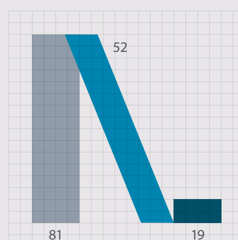
- Length of pages side by side (cm)
- Length of pages top to bottom (cm)



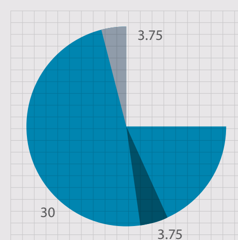
- How many times student scratches head while reading this book
- How many times student picks nose while reading this book
- How many times student clicks pen while reading this book



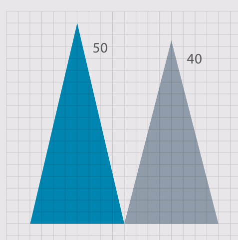
- Number of females who helped write this book
- Number of males who helped write this book



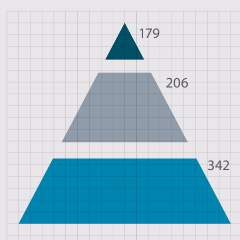
- Masters students who contributed to this book
- Honours students who contributed to this book
- Undergraduate students who contributed to this book



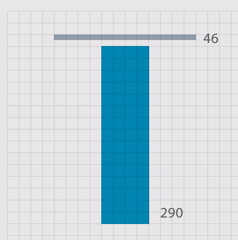
- Hours spent getting book to school per week
- Hours spent getting book home per week
- Hours spent with book in class per week



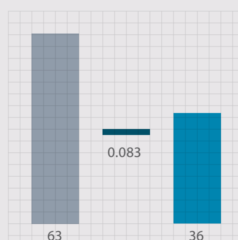
- Average size of class being taught from this book
- Average age of a maths teacher teaching from this book



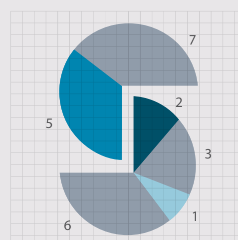
- Number of pages in Grade 12 Maths textbook
- Number of pages in Grade 11 Maths textbook
- Number of pages in Grade 10 Maths textbook



- Number of Afrikaans volunteers who helped write this book
- Number of English volunteers who helped write this book



- Number of hours spent conceptualising this cover
- Number of hours it takes to manufacture this book
- Number of hours spent designing this cover



- Weekly UCT hackathons that contributed to this book
- Small office hackathons that contributed to this book
- Afrikaans hackathons that contributed to this book
- Virtual hackathons that contributed to this book



basic education

Department:
Basic Education
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA



MMI HOLDINGS

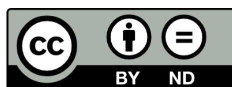
EVERYTHING MATHS

GRAAD 12 WISKUNDE ONDERWYSERSGIDS

KABV WEERGAWE 1

DEUR SIYAVULA EN VRYWILLIGERS





SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING

LYS VAN SKRYWERS

Siyavula Education

Siyavula Education is a sosiale onderneming wat in 2012 met kapitaal en ondersteuning van die PSG Group Beperk en die Shuttleworth Foundation gestig is. Die Everything Maths and Science reeks is deel van 'n groeiende versameling van hulpbronne geskep en vryliks beskikbaar gestel is deur Siyavula. Vir meer inligting oor die skryf en verspreiding van hierdie titels besoek :

www.siyavula.com
info@siyavula.com
021 469 4771

Siyavula Skrywers

Alison Jenkin; Marina van Zyl; Luke Kannemeyer

Siyavula en DBE span

Dr Carl Scheffler; Bridget Nash; Ewald Zietsman; William Buthane Chauke; Leonard Gumani Mudau; Sthe Khanyile; Josephine Mamaroke Phatlane

Siyavula en Free High School Science Text bydraers

Dr Mark Horner; Dr Samuel Halliday; Dr Sarah Blyth; Dr Rory Adams; Dr Spencer Wheaton

Iesrafeel Abbas; Sarah Abel; Taskeen Adam; Ross Adams; Tracey Adams; Dr Rory Adams; Andrea Africa; Wiehan Agenbag; Ismail Akhalwaya; Matthew Amundsen; Ben Anhalt; Prashant Arora; Bianca Bôhmer; Amos Baloyi; Bongani Baloyi; Raymond Barbour; Caro-Joy Barendse; Katie Barry; Dr Ilsa Basson; Richard Baxter; Tara Beckerling; Tim van Beek; Lisette de Beer; Annelize Berry; Jessie Bester; Mariaan Bester; Jennifer de Beyer; Dr Sarah Blyth; Sebastian Bodenstein; Martin Bongers; Dr Thinus Booysen; Ena Bosman; Janita Botha; Pieter Botha; Gareth Boxall; Stephan Brandt; Hannes Breytenbach; Alexander Briell; Wilbur Britz; Graeme Broster; Craig Brown; Michail Brynard; Richard Burge; Jan Buys; George Calder-Potts; Biddy Cameron; Eleanor Cameron; Mark Carolissen; Shane Carollisson; Richard Case; Sithembile Cele; Alice Chang; Faith Chaza; Richard Cheng; Fanny Cherblanc; Lizzy Chivaka; Dr Christine Chung; Dr Mareli Claasens; Brett Cocks; Zelmari Coetzee; Roché Compaan; Willem Conradie; Stefaan Conradie; Deanne Coppejans; Rocco Coppejans; Tim Craib; Dr Andrew Craig; Tim Crombie; Dan Crytser; Jock Currie; Dr Anne Dabrowski; Laura Daniels; Gareth Davies; Mia de; Tariq Desai; Sandra Dickson; Sean Dobbs; Buhle Donga; William Donkin; Esmi Dreyer; Matthew Duddy; Christel Durie; Fernando Durrell; Dr Dan Dwyer; Frans van Eeden; Kobus Ehlers; Alexander Ellis; Tom Ellis; Charl Esterhuysen; Andrew Fisher; Dr Philip Fourie; Giovanni Franzoni; Sanette Gildenhuys; Olivia Gillett; Ingrid von Glehn; Tamara von Glehn; Nicola Glenday; Lindsay Glesener; Kevin Godby; Dr Vanessa Godfrey; Terence Goldberg; Dr Johan Gonzalez; Saaligha Gool; Hemant Gopal; Dr Stephanie Gould; Umeshree Govender; Dr Ilse le Grange; Heather Gray; Lynn Greeff; Jaco Greyling; Martli Greyvenstein; Carine Grobbelaar; Suzanne Grové; Dr Tom Gutierrez; Brooke Haag; Kate Hadley; Alex Hall; Dr Sam Halliday; Asheena Hanuman; Dr Melanie Dymond Harper; Ebrahim Harris; Dr Nicholas Harrison; Neil Hart; Nicholas Hatcher; Jason Hayden; Laura Hayward; Dr William P. Heal; Pierre van Heerden; Dr Fritha Hennessy; Dr Colleen Henning; Anna Herrington; Shaun Hewitson; Dr Bernard Heyns; Millie Hilgart; Grant Hillebrand; Gregory Hingle; Nick Hobbs; Chris Holdsworth; Dr Benne Holwerda; Dr Mark Horner;

Robert Hovden; Mfandaidza Hove; Jennifer Hsieh; George Hugo; Dr Belinda Huntley; Laura Huss; Prof Ed Jacobs; Hester Jacobs; Stefan Jacobs; Rowan Jelley; Grant Jelley; Clare Johnson; Francois Jooste; Dominic Jordan; Luke Jordan; Cassiem Joseph; Tana Joseph; Corli Joubert; Dr Fabian Jutz; Brian Kamanzi; Clare Kampel; Herman Kamper; Dr Lutz Kampmann; Simon Katende; Natalia Kavalenia; Rabia Khan; Dr Setshaba D Khanye; Nothando Khumalo; Paul Kim; Lizl King; Mariola Kirova; Jannie Kirsten; Melissa Kistner; James Klatzow; Dr Jennifer Klay; Andrea Koch; Grove Koch; Paul van Koersveld; Bishop Komolafe; Dr Timo Kriel; Lara Kruger; Sihle Kubheka; Andrew Kubik; Luca Lategan; Dr Jannie Leach; Nkoana Lebaka; Dr Marco van Leeuwen; Dr Tom Leinster; Ingrid Lezar; Annatjie Linnenkamp; Henry Liu; Pamela Lloyd; Dr Kevin Lobb; Christopher Loetscher; Linda Loots; Michael Loseby; Bets Lourens; Chris Louw; Amandla Mabona; Malothe Mabutho; Stuart Macdonald; Dr Anton Machacek; Tshepo Madisha; Batsirai Magunje; Dr Komal Maheshwari; Dr Erica Makings; Michael Malahe; Dr Peter Malatji; Masoabi Malunga; Shanaaz Manie; Masilo Mapaila; Adriana Marais; Paul Maree; Bryony Martin; Nicole Masureik; Jacques Masuret; John Mathew; Dr Will Matthews; Chiedza Matuso; Thulani Mazolo; Stephen McBride; JoEllen McBride; Abigail McDougall; Kate McGrath; Ralf Melis; Nikolai Meures; Margaretha Meyer; Riana Meyer; Dr Duncan Mhakure; Filippo Miatto; Jenny Miller; Rossouw Minnaar; Abdul Mirza; Colin Mkhize; Mapholo Modise; Carla Moerdyk; Tshwarelo Mohlala; Relebohile Molaoa; Marasi Monyau; Asogan Moodaly; Jothi Moodley; Robert Moon; Calvin Moore; Bhavani Morarjee; Talitha Mostert; Gabriel Mougoue; Kholofelo Moyaba; Nina Gitau Muchunu; Christopher Muller; Helgard Muller; Johan Muller; Caroline Munyonga; Alban Murewi; Kate Murphy; Emmanuel Musonza; Tom Mutabazi; David Myburgh; Johann Myburgh; Kamie Naidu; Nolene Naidu; Gokul Nair; Vafa Naraghi; Bridget Nash; Eduan Naudé; Polite Nduru; Tyrone Negus; Theresa Nel; Annemarie Nelmapius; Huw Newton-Hill; Buntu Ngcebetsha; Towan Nothling; Tony Nzundu; Jacquin October; Thomas O'Donnell; Dr Markus Oldenburg; Marieta Oliver; Riaz Omar; Helena Otto; Adekunle Oyewo; Dr Jaynie Padayachee; Poveshen Padayachee; Dr Daniel Palm; Masimba Paradza; Clare Patrick; Quinton Paulse; Dave Pawson; Justin Pead; Nicolette Pekeur; Carli Pengilly; Roseinnes Phahle; Seth Phatoli; Joan Pienaar; Petrus Pieterse; Sirika Pillay; Jacques Plaut; Johan du Plessis; Tabitha du Plessis; Jaco du Plessis; Barry Povey; Andrea Prinsloo; David Prinsloo; Joseph Raimondo; Sanya Rajani; Prof. Sergey Rakityansky; Alastair Ramlakan; Thinus Ras; Dr Matina J. Rassias; Ona Rautenbach; Dr Jocelyn Read; Jonathan Reader; Jane Reddick; Robert Reddick; Dr Matthew Reece; Chris Reeders; Brice Reignier; Razvan Remsing; Dr Liezel Retief; Adam Reynolds; Laura Richter; Max Richter; Sean Riddle; Dr David Roberts; Christopher Roberts; Helen Robertson; William Robinson; Evan Robinson; Christian Roelofse; Raoul Rontsch; Dr Andrew Rose; Katie Ross; Karen Roux; Dr Maritha le Roux; Jeanne-Mariè Roux; Karen Roux; Mark Roux; Bianca Ruddy; Heinrich Rudman; Nitin Rughoonauth; Katie Russell; Steven Sam; Jason Avron Samuels; Rhoda van Schalkwyk; Christo van Schalkwyk; Dr Carl Scheffler; Nathaniel Schwartz; Duncan Scott; Helen Seals; Relebohile Sefako; Sandra Serumaga-Zake; Paul Shangase; Cameron Sharp; Ian Sherratt; Ryman Shoko; Dr James Short; Cho Hee Shrader; Roger Sieloff; Brandon Sim; Bonga Skozana; Bradley Smith; Greg Solomon; Zamekile Sondzaba; Nicholas Spaull; Margaret Spicer; Hester Spies; Dr Andrew Stacey; Dr Jim Stasheff; Mike Stay; Nicol Steenkamp; Nicky Stocks; Dr Fred Strassberger; Mike Stringer; Stephanie Strydom; Abdulhuck Suliman; Bianca Swart; Masixole Swartbooi; Ketan Tailor; Tshenolo Tau; Tim Teatro; Ben Thompson; Shen Tian; Xolani Timbile; Dr Francois Toerien; René Toerien; Liezel du Toit; Nicola du Toit; Dr Johan du Toit; Robert Torregrosa; Jimmy Tseng; Theresa Valente; Alida Venter; Pieter Vergeer; Rizmari Versfeld; Nina Verwey; Mfundo Vezi; Mpilonhle Vilakazi; Katie Viljoen; Adele de Villiers; Daan Visage; Wetsie Visser; Alexander Volkwyn; Kosma von Maltitz; Dr Karen Wallace; John Walmsley; Duncan Watson; Helen Waugh; Leandra Webb; Dr Dawn Webber; Michelle Wen; Dr Rufus Wesi; Francois Wessels; Wessel Wessels; Leandi van der Westhuizen; Neels van der Westhuizen; Sabet van der Westhuizen; Dr Alexander Wetzler; Dr Spencer Wheaton; Vivian White; Mark Whitehead; Dr Gerald Wigger; Harry Wiggins; Heather Williams; Wendy Williams; Julie Wilson; Timothy Wilson; Andrew Wood; Emma Wormauld; Dr Sahal Yacoob; Jean Youssef; Ewald Zietsman; Johan Zietsman; Marina van Zyl

EVERYTHING MATHS

Ons dink oor die algemeen aan Wiskunde as ‘n vak oor getalle, maar eintlik is Wiskunde ‘n taal. As ons dié taal leer praat en verstaan kan ons baie van die natuur se geheime ontdek. Net soos ons iemand se taal moet verstaan om meer van hom/haar te leer, moet ons wiskunde gebruik om meer te leer van alle aspekte van die wêreld ‘n of dit nou fisiese wetenskappe, lewenswetenskappe of selfs finansies of ekonomie is.

Die vernaamste skrywers en digters het ‘n gawe om woorde só te gebruik dat hulle mooi en inspirerende stories kan vertel. Net so kan ons wiskunde gebruik om konsepte te verduidelik en nuwe dinge te skep. Baie van die moderne tegnologie wat ons lewens beter en makliker maak, is afhanklik van wiskunde. DVDs, Google soektogte en bankkaarte wat met ‘n PIN werk, is maar net ën paar voorbeelde. Woorde het nie ontstaan om stories te vertel nie, maar die bestaan daarvan maak dit moontlik. Net so is die wiskunde wat gebruik is om hierdie tegnologie te ontwikkel, nie spesifiek vir hierdie doel ontwikkel nie. Die uitvinders kon egter bestaande wiskundige beginsels gebruik wanner en waar die toepassing daarvan nodig was.

Trouens is daar nie ‘n enkele faset van die lewe wat nie deur wiskunde geraak word nie. Baie van die mees gesogte beroepe is afhanklik van wiskunde. Siviele ingenieurs gebruik wiskunde om te bepaal hoe om die beste, nuwe ontwerpe te maak. Ekonome gebruik wiskunde om te beskryf en voorspel hoe die ekonomie sal reageer op sekere veranderinge. Beleggers gebruik wiskunde om die prys van sekere soorte aandele te bepaal of om die risiko verbonde aan sekere beleggings te bereken. Wanneer sagteware-ontwikkelaars programme soos Google skryf, gebruik hulle baie van die wiskundige algoritmes om die programme bruikbaar maak.

Selfs in ons daaglikse lewens is wiskunde oral - in die afstand wat ons aflê, tyd en geld. Ons kan ook in kuns, ontwerp en musiek die invloed van wiskunde sien, veral in die proporsies en musikale klanke. Hoe beter ons vermoë om wiskunde te verstaan, hoe beter ons vermoë om die natuur en die skoonheid daarvan te waardeer. Wiskunde is daarom nie net ‘n abstrakte dissipline nie, dit omarm logika, simmetrie, harmonie en tegnologiese vooruitgang. Meer as enige ander taal is wiskunde oral en universeel in sy toepassing.

BORG

Hierdie handboek is ontwikkel met behulp van korporatiewe sosiale beleggingsfondse van MMI Holdings.



Goedgestruktureerde, effektiewe Korporatiewe Maatskaplike Investering (KMI) het die vermoë om ’n positiewe bydrae tot nasiebou te lewer en positiewe veranderinge in gemeenskappe teweeg te bring. KMI se verbintenis tot maatskaplike investering beteken dat ons voortdurend geleenthede soek waar ons kan help om die horisonne van Suid-Afrika se meer kwesbare burgers te verbreed en om hulle meer en beter toegang tot geleenthede in die lewe te gee. Dit beteken dat ons nie maatskaplike investering as ’n bonus beskou of ’n oefening in bemarking of selfs ’n borgskap nie, maar eerder as ’n kritieke deel van ons bydrae tot die samelewing.

Die samesmelting van Metropolitan en Momentum is geloof vir die komplementêre rol wat die twee maatskappy ten opsigte van mekaar speel. Hierdie samewerking is ook duidelik in die fokusareas van die KMI-programme waar Metropolitan en Momentum saam belê in meeste belangrike sektore en ook daar waar die grootste behoefte vir sosiale deelname is.

MIV/VIGS word toenemend ’n bestuurbare siekte in meeste ontwikkelde lande, maar in ’n land soos ons s’n bly dit ’n siekte waaraan mense onnodig sterf. Metropolitan maak voortdurend ’n verskil deur te verseker dat MIV/VIGS verander van ’n doodsvonnis na ’n bestuurbare siekte. Metropolitan se ander fokusarea is opvoedkunde, wat steeds die sleutel tot ekonomiese welvaart in ons land bly.

Momentum se fokus op mense met gestremdhede verseker dat hierdie persone ingesluit word in die samelewing en toegelaat word om ’n bydrae te lewer. Weeskinders en weerlose kinders is nóg ‘n fokusarea vir Momentum. Van die projekte wat hulle ondersteun verseker dat kinders toegelaat word om veilig groot te word sodat hulle saam met ander kinders ’n aandeel kan hê in die erfenis van ’n voorspoedige toekoms.

momentum METROPOLITAN

EVERYTHING MATHS & SCIENCE

Die ***Everything Maths and Science***-reeks dek Wiskunde, Fisiese Wetenskappe, Lewenswetenskappe en Wiskundige Geletterdheid.



Die Siyavula ***Everything Science*** handboeke



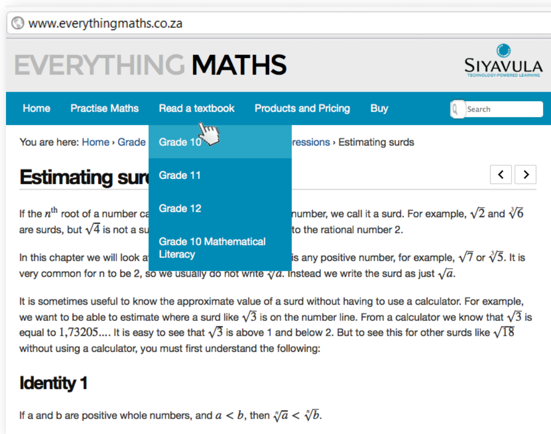
Die Siyavula ***Everything Maths*** handboeke

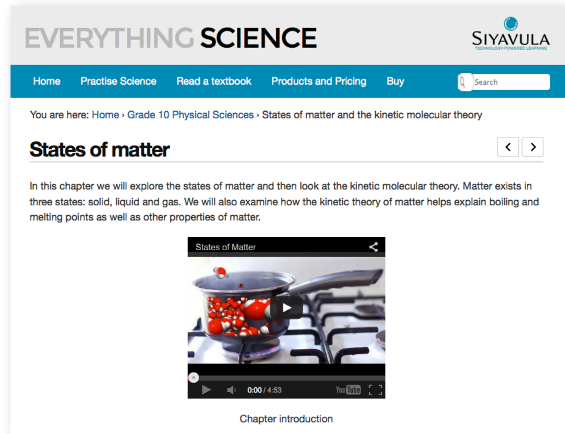
DIGITALE HANDBOEKE

LEES AANLYN

Sien hoe die handboeke lewe kry op die internet. Nie net het jy toegang tot al die inhoud van die gedrukte weergawe nie, maar die aanlynweergawe bied ook videos, voorleggings en simulasies om jou 'n meer omvattende leerervaring te gee.

www.everythingmaths.co.za en ***www.everythingscience.co.za***

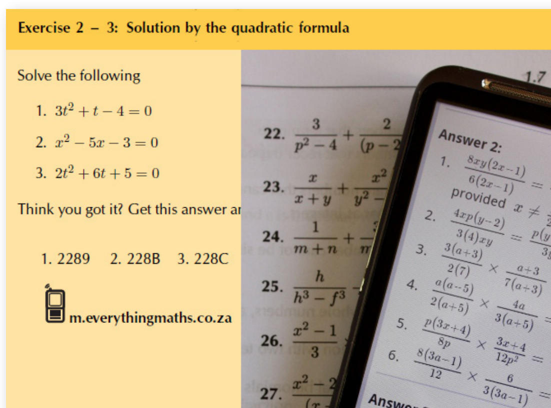


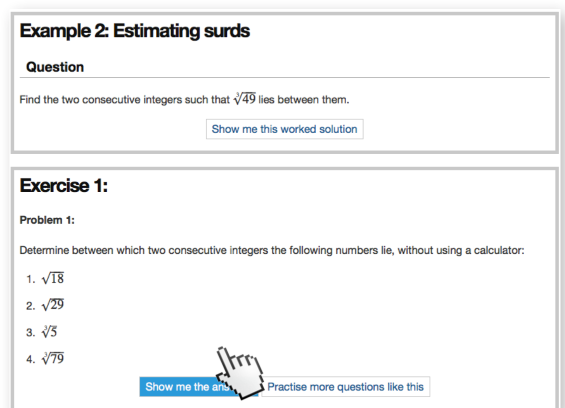


KONTROLEER JOU ANTWOORDE AANLYN OF OP JOU FOON

Op soek na die antwoorde? Jy kan die hele uitgewerkte oplossing vir enige van die vrae in die handboek vind deur sy *shortcode* ('n 4-syfer kombinasie van letters en syfers) in die soekboksie op die web- of mobi-tuiste in te tik.

www.everythingmaths.co.za en ***www.everythingscience.co.za*** of ***m.everythingmaths.co.za*** en ***m.everythingscience.co.za*** op jou foon.



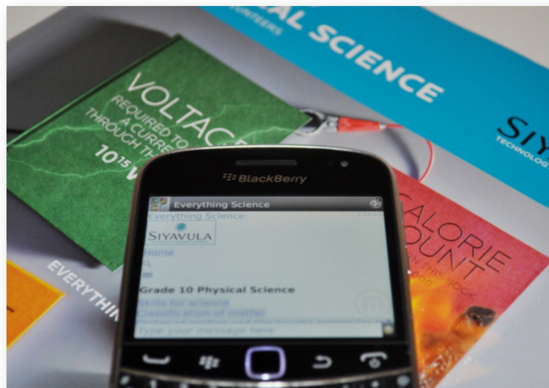


SELFOON & TABLET

MOBI

Kry toegang tot die hele handboek op jou foon. Ja, die hele ding, enige tyd, enige plek. Besoek die mobi-tuistes by:

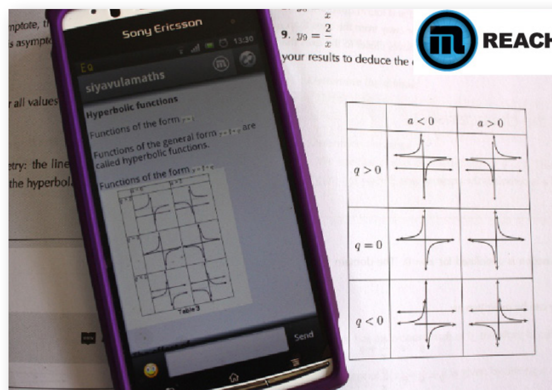
m.everythingmaths.co.za en
m.everythingscience.co.za



MXIT

Moenie stres as jy nie 'n slimfoon het nie. Alle Mxit-gebruikers kan die ***Everything***-reeks handboeke op Mxit Reach lees. Voeg ***Everything Maths*** en ***Everything Science*** as 'n kontak op jou profiel by of blaai deur die opsies op Mxit Reach.

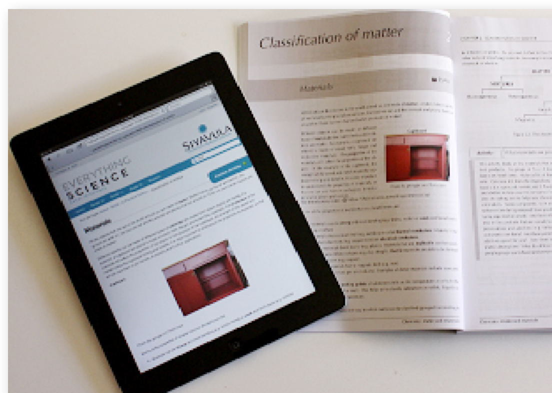
mxit>tradepost>reach>education>
everything maths of ***everything science***



LAAI AF OP JOU TABLET

Jy kan 'n digitale kopie van die ***Everything***-reeks handboeke op jou rekenaar, tablet, iPad en Kindle aflaai.

www.everythingmaths.co.za en
www.everythingscience.co.za



OEFEN SLIM

OEFEN AANLYN & OP JOU FOON VIR TOETSE EN EKSAMENS

Om goed te doen in toetse en eksamens moet jy oefen, maar dit is soms moeilik om te weet waar om te begin en hoe om ou eksamenvraestelle in die hande te kry.

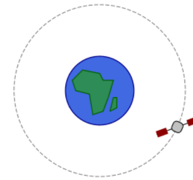
Intelligent Practice is 'n aanlyn Wiskunde- en Wetenskapoefendiens wat jou toelaat om vrae op die regte moeilikheidsgraad vir jou te oefen en dan die antwoorde dadelik na te gaan!

Oefen vrae soos hierdie deur te registreer by ***everythingmaths.co.za*** of ***everythingscience.co.za***.

Effect of mass on gravitational force

The International Space Station (ISS) has a mass M, as it orbits the Earth, it experiences a gravitational force of F. A space shuttle docks onto the ISS. The gravitational force the ISS experiences once the mass of the shuttle is added increases by a factor of 3.

By what factor does the mass of the ISS increase for it to experience this increase of gravitational force? Write your answer as a fraction of the original mass M_{ISS} of the ISS.

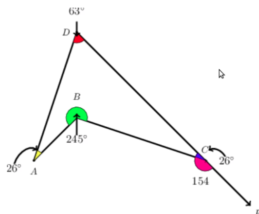


Answer: ______ M_{ISS} [2 points] Check answer

Help! How should I type my answer?

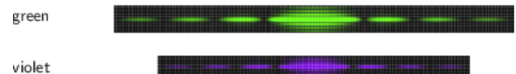
Angles in quadrilaterals

The diagram below represents quadrilateral ABCD with extended line $\overline{CE}$. Quadrilateral ABCD is a polygon with **four** sides and **four** angles. The sum of the interior angles in a quadrilateral = **360** °. Angles on a straight line like $\overline{CE}$ = **180** °.



Wavelength and diffraction

Two diffraction patterns are presented, determine which one has the longer wavelength based on the features of the diffraction pattern. The first pattern is for green light and the second pattern is for violet light:



The same diffraction grating is used to generate both diffraction patterns.

Answer: Select an answer [2 points] Check answer

JOU PANEELBORD

Jou persoonlik paneelbord op ***Intelligent Practice*** help jou om rekord te hou van jou werk. Jy kan jou vordering en bemeestering van elke onderwerp in die boek dophou en dit gebruik om jou leerwerk te bestuur en jou swakpunte uit te lig. Jy kan ook jou paneelbord gebruik om jou onderwysers, ouers, universiteite of beursinstansies te wys wat jy die afgelope jaar gedoen het.

Table of Contents

Click on a chapter or section below to start practising. You can also select multiple sections and click the **Start a new session** button.

Chapters	Points	Mastery
Skills for science	60 / 96	
Classification of matter	22 / 34	
States of matter and the kinetic molecular theory	66 / 77	
The atom	395 / 526	
The periodic table	71 / 128	
Chemical bonding	177 / 237	
Transverse pulses		
Transverse waves		
Longitudinal waves		
Sound	100 / 139	
Electromagnetic radiation	453 / 598	
The particles that substances are made of	34 / 41	
Physical and chemical change	6 / 6	
Representing chemical change	206 / 298	
Introduction	0 / 10	
Balancing chemical equations	206 / 288	

__Intelligent Practice__ is net in Engels beskikbaar.

Inhoudsopgawe

HOOFSTUK



Wiskunde - Onderwysers gids

1.1 Blog posts

Algemene blogs

- Educator's Monthly - Education News and Resources (http://www.teachersmonthly.com)
  - "We eat, breathe and live education! "
  - "Perhaps the most remarkable yet overlooked aspect of the South African teaching community is its enthusiastic, passionate spirit. Every day, thousands of talented, hard-working educators gain new insight from their work and come up with brilliant, inventive and exciting ideas. Educator's Monthly aims to bring educators closer and help them share knowledge and resources.
  - Our aim is twofold . . .
    - To keep South African educators updated and informed.
    - To give educators the opportunity to express their views and cultivate their interests."
- Head Thoughts – Personal Reflections of a School Headmaster (http://headthoughts.co.za/)
  - blog by Arthur Preston
  - "Arthur is currently the headmaster of a growing independent school in Worcester, in the Western Cape province of South Africa. His approach to primary education is progressive and is leading the school through an era of new development and change."

Wiskunde blogs

- CEO: Circumspect Education Officer - Educating The Future
  - blog by Robyn Clark
  - "Mathematics teacher and inspirer."
  - http://clarkformaths.tumblr.com/
- dy/dan - Be less helpful
  - blog by Dan Meyer
  - "I'm Dan Meyer. I taught high school math between 2004 and 2010 and I am currently studying at Stanford University on a doctoral fellowship. My specific interests include curriculum design (answering the question, "how we design the ideal learning experience for students?") and teacher education (answering the questions, "how do teachers learn?änd "how do we retain more teachers?änd "how do we teach teachers to teach?")."
  - http://blog.mrmeyer.com
- Without Geometry, Life is Pointless - Musings on Math, Education, Teaching, and Research
  - blog by Avery
  - "I've been teaching some permutation (or is that combination?) of math and science to third through twelfth graders in private and public schools for 11 years. I'm also pursuing my EdD in education and will be both teaching and conducting research in my classroom this year."
  - http://mathteacherorstudent.blogspot.com/
- Overthinking my teaching - The Mathematics I Encounter in Classrooms
  - blog by Christopher Danielson

- "I think a lot about my math teaching. Perhaps too much. This is my outlet. I hope you find it interesting and that you'll let me know how it's going."
  - http://christopherdanielson.wordpress.com

- A Recursive Process - Math Teacher Seeking Patterns
  - blog by Dan
  - "I am a High School math teacher in upstate NY. I currently teach Geometry, Computer Programming (Alice and Java), and two half year courses: Applied and Consumer Math. This year brings a new 21st century classroom (still not entirely sure what that entails) and a change over to standards based grades."
  - http://dandersod.wordpress.com

- Think Thank Thunk – Dealing with the Fear of Being a Boring Teacher
  - blog by Shawn Cornally
  - "I am Mr. Cornally. I desperately want to be a good teacher. I teach Physics, Calculus, Programming, Geology, and Bioethics. Warning: I have problem with using colons. I proof read, albeit poorly."
  - http://101studiostreet.com/wordpress/

1.2 Oorsig

Voor 1994 het daar 'n aantal verskillende onderwysdepartemente en kurrikula bestaan volgens die skeiding wat so duidelik was tydens die apartheid era. As 'n gevolg het die kurrikulum self een van die politiese ikone van vryheid of onderdrukking geword. Sedertdien het die regering en politieke leiers probeer om een kurrikulum te ontwikkel, wat die nasionale agenda van demokratiese vryheid en gelykheid ondesteun, deur die kennis, vaardighede en waardes wat ons leerders moet leer and toepas op die voorgrond te stel, sodat hulle op 'n betekenisvolle manier kan deelneem in die samelewing as burgers van 'n vry land. Die Nasionale Kurrikulumverklaring (NKV) Graad R–12 (DBE, 2012) dien dus volgende doelwitte:

- om leerders toe te rus met die kennis, vaardighede end waardes benodig vir selfverwesenliking en betekenisvolle deelname in die samelewing as burgers van 'n vry land, ongeag hulle sosio-ekonomiese agtergrond, ras, geslag, fisiese of intellektuele vermoë;
- om toegang to hoër onderrig te verskaf;
- om die oorgang van leerders vanaf onderwysinstellings na die werkplek te fasiliteer; en
- om werkgewers met 'n voldoende profiel van leerdersbevoegdhede te verskaf.

Alhoewel dit verhef is tot die status van 'n politiese ikoon, bly die kurrikulum 'n instrument. Die vaardighede van 'n onderwyser word benodig om hierdie istrument te interpreteer en operasionaliseer in die klaskamer. Die kurrikulum self kan nie die doelwitte hierbo gelys bereik sonder dat die gemeenskap van kurrikulumspesialiste, ontwikkelaars van onderwysmateriaal, onderwysers en assessore die prosess, om die voorgenome kurrikulum die geïmplementeerde kurrikulum te maak, ondersteun en daartoe bydra nie. 'n Kurrikulum kan slaag of misluk, afhangende van die implementering en ongeag die voorgenome beginsels of potensiaal op papier daarvan. Daarom is dit belangrik dat belanghebbendes van die kurrikulum vertroud is en ooreenstem met die volgende beginsels waarop die NKV gebaseer is:

Beginsel	Implementering
Sosiale Transformasie	Die regstelling van wanbalanse van die verlede. Die verskaffing van gelyke geleenthede vir almal.
Aktiewe en Kritiese Leer	Aanmoediging van 'n aktiewe en kritiese benadering tot leer. Vermyding van oormatige onkritiese memorisering van gegewe waarhede.
Diepgaande Kennis en Vaardighede	Leerders behaal minimum standaarde van kennis en vaardighede, soos bepaal vir elke graad in elke vak.
Vordering	Inhoud en konteks toon progressie van eenvoudig na kompleks.
Sosiale en Omgewingsgeregtigheid en Menseregte	Praktyke soos in die Grondwet omskryf is, verweef in die onderrig en leer van elk van die vakke.
Waardering vir Inheemse Kennissisteme	Erken die ryk geskiedenis en erfenis van hierdie land.
Geloofwaardigheid, Gehalte en Doeltreffendheid	Verskaffing van onderrig wat wêreldwyd vergelykbaar is i.t.v. kwaliteit.

Hierdie gids is bedoel om waarde en insig toe te voeg tot die bestaande Nasionale Kurrikulum vir Graad 12 Wiskunde, in lyn met die doelwitte en beginsels daarvan. Daar word gehoop dat dit u as die opvoeder sal help om die voorgenome kurrikulum te optimeer en implementeer.

Kurrikulumvereistes en doelwitte

Die belangrikste doelwitte van die kurrikulum hou verband met die leerders wat uit ons opvoedkundestelsel kom. Opvoeders is die belangrikste rolspelers in die uitvoering van die voorgenome kurrikulum. Die kwaliteit van die leerder wat deur hierdie stelsel beweeg, sal egter die bewys wees dat die kurrikulum soos wat dit bedoel en geïmplementeer is, ook sy doelwitte bereik het. Hierdie doelwitte en beginsels beoog om leerders te produseer wat in staat is:

- om probleme te identifiseer en op te los en om besluite te neem deur kritiese en kreatiewe denke;
- om doeltreffend te werk as individue en met ander as lede van 'n span;
- om hulself en hul aktiwiteite verantwoordelik en doeltreffend te organiseer en bestuur;
- om inligting te versamel, te analiseer, te organiseer en krities te evalueer;
- om effektief te kommunikeer deur gebruik te maak van visuele, simboliese en/of taalvaardighede in verskillende vorme;
- om wetenskap en tegnologie doeltreffend en krities te gebruik met verantwoordelikheid teenoor die omgewing en die gesondheid van ander; en
- om begrip van die wêreld as 'n stel verwante stelsels te toon deur te herken dat die kontekste van probleme nie in isolasie bestaan nie.

Die bogenoemde punte kan opgesom word as 'n onafhanklike leerder wat krities en analities kan dink, in staat is om effektief met lede van 'n span te werk, en probleme kan identifiseer en oplos deur middel van effektiewe besluitneming. Dit is ook die uitkoms waarna binne opvoedkundige navorsing verwys word as die "hervormde" benadering eerder as die "tradisionele" benadering waaraan baie opvoeders meer gewoond is. Tradisionele praktyke het hul rol en kan nie heeltemal ten gunste van hervormde praktyke daargelaat word nie. Maar, ten einde meer onafhanklike en wiskundige denkers te produseer, moet die hervorming ideologie deur opvoeders ingeneem word in hul optrede as onderwysers. Hier is 'n tabel wat kan help om u dominante instruksionele praktyk te identifiseer en u probeer help om dit aan te pas (indien nodig), om meer gebalanseerd en in lyn met die hervorming benadering, soos voorgestel deur die NKV, te wees.

	Tradisionele Versus Hervormde Praktyke
Waardes	**Tradisioneel** – fokus op onderrigmateriaal, korrektheid van leerders se antwoorde en wiskundige geldigheid van metodes. **Hervorm** – patrone vind, konsepte verbind, wiskundig kommunikeer en probleemoplossing.
Onderrigmetodes	**Tradisioneel** – verklarend, oordrag van inligting, baie oefen en herhaling, stap vir stap bemeestering van algoritmes. **Hervorm** – Geleide ontdekkingsmetodes, eksplorasie, modellering. Hoë vlak van redenasie is sentraal.
Groepering van Leerders	**Tradisioneel** – oorheersend gelyksoortige groepering. **Hervorm** – oorheersend gemengde vermoëns.

Die vak wiskunde verskaf uiter aard ruim geleentheid om te voldoen aan die hervormde doelwitte. Die definisie van wiskunde moet verstaan en omhels moet word deur die opvoeders betrokke by die onderrig en die leer van die vak. In die navorsing is dit goed gedokumenteer dat ons opvattings oor wat wiskunde is, ’n invloed het op ons benadering tot die onderrig en leer van die vak.

Drie sienings van wiskunde word hier aangebied. Die instrumentalistiese siening van wiskunde aanvaar die standpunt dat wiskunde ’n versameling feite, reëls en vaardighede is wat gebruik word as ’n middel vir ’n doelwit, sonder dat daar noodwendig ’n verband is tussen hierdie komponente. Die Platonistiese siening van wiskunde is dat die vak ’n statiese, maar verenigde liggaam van sekere kennis is, waarbinne wiskunde ontdek word eerder as om geskep te word. Die probleemoplossing siening van wiskunde is dat dit ’n dinamiese, voortdurend ontwikkelende veld van menslike skepping en uitvinding is wat op sigself ’n kulturele produk is. Wiskunde word dus beskou as ’n proses van ondersoek, eerder as ’n voltooide produk. Die resultate bly voortdurend oop vir hersiening. Een voorgestel is dat ’n hiërargiese orde bestaan binne hierdie drie aansigte, met die instrumentalistiese siening op die laagste vlak en die probleemoplossing siening op die hoogste vlak.

Volgens di NKV:

Wiskunde is die studie van hoeveelheid, struktuur, ruimte en verandering. Wiskundiges soek patrone, formuleer nuwe veronderstellings en vestig aksiomatiese stelsels deur die streng deduktiewe afleiding vanaf toepaslik gekose aksiomas en definisies. Wiskunde is ’n menslike aktiwiteit wat deur alle kulture beoefen is, vir duisende jare reeds. Wiskundige probleemoplossing stel ons in staat om die wêreld rondom ons (fisies, sosiaal en ekonomies) te verstaan en, belangrikste van alles, om te leer om kreatief te dink.

Dit stem goed ooreen met die probleemoplossing siening van wiskunde en mag dalk sommige van ons instrumentalistiese of Platonistiese sienings, as ’n statiese versameling van kennis, feite, reëls en vaardighede wat geleer en toegepas moet word, uitdaag. Die NKV probeer om so ’n benadering te ontmoedig en moedig wiskunde-onderwysers aan om op ’n dinamiese en kreatiewe manier hulle leerders as wiskundiges te betrek by ’n proses van studie, begrip, redenering, probleemoplossing en kommunikasie. Hieronder is ’n lys wat u kan help om u lesse aktief te ontwerp in ’n poging om die NKV definisie van wiskunde te omhels en om nader te beweeg aan ’n probleemoplossing konsepsie van die onderwerp. Die aanvaarding van so ’n benadering tot die onderrig en leer van wiskunde sal op sy beurt bydra tot die implementering en realisering van die voorgenome kurrikulum, in terme van die kwaliteit van die leerders wat uit die onderwysstelsel kom.

Aktiwiteit	Voorbeeld
Leerders neem deel aan die oplossing van kontekstuele probleme wat verband hou met hul lewens en vereis dat hulle ’n probleem interpreteer en dan ’n geskikte wiskundige oplossing te vind.	Leerders word gevra om uit te werk watter busdiens die goedkoopste is, gegee die tariewe en die afstand wat hulle wil reis.
Leerders raak betrokke by die oplos van probleme van ’n suiwer wiskundige aard, wat hoërorde denke en die toepoassing van kennis (ni standaard probleme) benodig.	Leerders word gevra om ’n grafiek te teken. Hulle het nog nie ’n spesifieke tekentegniek (byvoorbeeld vir ’n parabool) geleer nie, maar het geleer om die tabelmetode te gebruik om reguit lyne te teken.
Leerders kry geleentheid om oor betekenis te redeneer.	Leerders bespreek hul begrip van konsepte en strategieë vir die oplossing van probleme met mekaar en met die onderwyser.
Leerders word geleer end gevra om situasies op verskeie ekwivalente maniere te verteenwoordig (wiskundige modellering).	Leerders verteenwoordig dieselfde data met behulp van ’n grafiek, ’n tabel en ’n formule om die data voor te stel.
Leerders doen individueel wiskundige ondersoeke in die klas, gelei deur die onderwyser waar nodig.	Elke leerder kry ’n wiskundige probleem (byvoorbeeld om die aantal priemgetalle minder as 50 te vind) wat ondersoek moet word en die oplossing neergeskryf moet word. Leerders werk onafhanklik.
Leerders werk saam as ’n groep/span om ondersoek in te stel of ’n wiskundige probleem op te los.	’n Groep word opdrag gegee om saam te werk aan ’n probleem wat vereis dat hulle patrone in data ondersoek, om veronderstellings te maak en ’n formule vir die patroon te vind.
Leerders doen oefeninge om hulle kennis van konsepte te konsolideer en verskeie vaardighede te bemeester.	Voltooiing van ’n oefening wat roetine prosedures benodig.
Leerders kry geleenthede om die wisselwerking tussen verskillende aspekte van wiskunde te sien en om te sien hoe die verskillende uitkomste verwant is.	Terwyl leerders deur meetkunde probleme werk, word hulle aangemoedig om gebruik te maak van algebra.
Leerders word gevra om probleme vir hulle onderwyser en klasmaats op te stel.	Leerders word gevra ’n algebraïese woordsom op te stel (waarvan hulle ook die oplossing ken), vir die persoon wat langs hulle sit om op te los.

Oorsig van onderwerpe en hulle relevansie:

1. Funksies – lineêr, kwadraties, eksponensiëel, rasioneel	**Relevansie**
Bekendsteling van leerders aan 'n meer formele definisie van 'n funksie en brei graad 11 werk oor verwantskappe tussen veranderlikes in terme van numeriese, grafiese, woordelikse en simboliese voorstellings van funksies uit. Leerders moet gemaklik tussen hierdie voorstellings (tabelle, grafieke, woorde en formules) kan omskakel. Sluit in lineêre, kwadratiese en sommige derdegraadse polinome funksies, eksponensiële en logaritmiese funksies en sommige rasionale funksies. Die inverses van voorgeskrewe funksies en wees bewus dat in die geval van baie-tot-eenfunksies, die gebied beperk moet word indien die inverse 'n funksie moet wees. Probleemoplossing en grafiekwerk wat die voorgeskrewe funksies betrek. Insluitend die logaritmiese funksie.	Funksies vorm 'n sentrale deel van leerders se wiskundige begrip en redenasie-proseese in algebra. Dit is ook uitstekende geleentheid vir kontekstuele wiskundige modelleringsvrae.

2. Getalpatrone, rye en reekse	**Relevansie**
Identifiseer en los probleme op wat betrekking het op getalpatrone wat lei tot rekenkundige en meetkundige rye insluitende oneindige meetkundige reekse.	Baie wiskunde wentel rondom die identifisering van patrone.

3. Finansies, groei en krimping	**Relevansie**
(a) Bereken die waarde van n in die formule $A = P(1+i)^n$ en $A = P(1-i)^n$ (b) Pas kennis van meetkundige reekse toe om annuïteits- en verbandleningterugbetalingsprobleme op te los. Analiseer krities verskillende leningsopsies. Analiseer krities verskillende leningsopsies.	Die wiskunde van finansies is baie relevant vir daaglikse en langtermyn finansiële besluite wat leerders sal moet maak vir beleggings, lenings, spaar, begrip van wisselkoerse en die invloed daarvan wêreldwyd.

4. Algebra	**Relevansie**
Demonstreer 'n verstaan van die definisie van 'n logaritme en enige wette wat nodig is om lewensegte probleme op te los. • Neem kennis van en verstaan die res en faktorstellings vir derdegraadsepolinome. • Faktoriseer derdegraadse polinome (insluitend voorbeelde wat die faktorstelling benodig).	Algebra verskaf die grondslag vir wiskundige leerders om te beweeg van numeriese berekeninge na veralgemeende operasies, vereenvoudiging van uitdrukkings, oplos van vergelykings en gebruik van grafieke en ongelykhede vir oplossing van kontekstuele probleme.

5. Differensiaalrekening	Relevansie
(a) ‘n Intuïtiewe verstaan van die limietbegrip. (b) Differensiasie van gespesifiseerde funksies deur eerste beginsels. (c) Gebruik van gespesifiseerde reëls van differensiasie. (d) Die vergelykings van raaklyne aan grafieke. (e) Die vermoë om derdegraadse grafieke te skets. (f) Praktiese probleme wat optimalisering en tempo van verandering behels (insluitend beweging).	The central aspect of rate of change to differential calculus is a basis to further understanding of limits, gradients and calculations and formulae necessary for work in engineering fields, e.g. designing roads, bridges etc.

6. Waarskynlikheid	Relevansie
(a) Veralgemening van die fundamentele telbeginsel. (b) Waarskynlikheidsprobleme deur van die fundamentele telbeginsel gebruik te maak.	Hierdie onderwerp is nuttig vir die ontwikkeling van goeie logiese redenasievermoë en vir die opvoeding van leerders in terme van werklike lewenskwessies soos dobbelary en die slaggate daarvan.

7. Euklidiese Meetkunde en Meting	Relevansie
(a) Hersien vorige (graad 9) werk oor die nodige en voldoende voorwaardes vir veelhoeke om gelykvormig te wees. (b) Bewys (aanvaar bewyse vanuit vorige grade): • dat ‘n lyn wat ewewydig aan een sy van ‘n driehoek getrek word die ander twee sye eweredig verdeel (en die middelpuntstelling as ‘n spesiale geval van hierdie stelling) ; • dat gelykhoekige driehoeke ook gelykvormig is; • dat driehoeke waarvan die sye eweredig is ook gelykvormig is; • die Pythagoriaanse stelling deur gelykvormige driehoeke; en • meetkundige vraagstukke/probleme.	Die denkprosesse en wiskundige vaardighede met betrekking tot die bewys van veronderstellings en die indentifisering van valse veronderstellings is meer relevant as om die inhoud te studeer. Die oppervlakte en volume in praktiese kontekste soos die ontwerp van kombuise, die teël en verf van kamers, die ontwerp van verpakking, ens. is relevant tot die huidige en toekomstige lewens var leerdeers.

8. Trigonometrie	Relevansie
Bewys en gebruik die saamgestelde en dubbelhoekidentiteite. Los probleme in twee- en driedimensionele figure op.	Trigonometrie het versleie gebruike in die samelewing, bv. in navigasie, musiek, geografie en die ontwerp en konstruksie van geboue.

9. Analytiese Meetkunde	Relevansie
Gebruik ‘n tweedimensionele Cartesiese koördinaatstelsel om die volgende af te lei en toe te pas: • die vergelyking van ‘n sirkel (met enige middelpunt) ; en • die vergelyking van ‘n raaklyn aan ‘n sirkel by ‘n gegewe punt op die sirkel.	Hierdie afdeling verskaf ’n verdere toegepassing vir leerders se algebraïese en trigonometriese interaksie met die Cartesise vlak. Kunstenaars en die ontwerp en uitleg industrieë maak dikwels gebruik van die inhoud en denkprosesse van hierdie wiskundige onderwerp.

10. Statistiek	Relevansie
(a) Stel tweeveranderlike numeriese data as 'n spreidiagram voor en bepaal intuïtief en deur eenvoudige ondersoek of 'n lineêre, kwadratiese of 'n eksponensiële funksie die data die beste sal pas. (b) Gebruik 'n sakrekenaar om die lineêre regressielyn te bereken wat 'n gegewe stel tweeveranderlike numeriese data die beste sal pas. (c) Gebruik 'n sakrekenaar om die korrelasiekoëffisiënt van 'n stel tweeveranderlike numeriese data te bereken en maak gepaste afleidings.	Mense word daagliks gekonfronteer met die interpretasie van data wat deur die media verskaf word. Dikwels word data bevooroordeeld of wanvoorgestel binne 'n sekere konteks. In enige soort navorsing is die insameling en hantering van data kernprosesse. Hierdie onderwerp help ook leerders op om meer sosiaal en polities opgevoed te wees ten opsigte van die media.

Wiskunde onderwysers moet ook verseker dat die volgende belangrike spesifieke doelwitte en algemene beginsels toegepas word in wiskunde-aktiwiteite in alle grade:

- Sakrekenaars mag slegs gebruik word om die standaard numeriese berekeninge uit te voer en berekeninge wat met die hand gedoen is, te kontroleer
- Werklike probleme geïntegreer word in alle afdelings, om wiskundige modellering te behou as 'n belangrike fokuspunt van die kurrikulum
- Ondersoeke gee leerders die geleentheid om hul vermoë om meer metodies te wees, om te kan veralgemeen, en om veronderstellings te kan ontwikkel en regverdig en/of bewys.
- Gepaste benaderings- en afrondingsvaardighede moet geleer word en voortdurend aangemoedig word in aktiwiteite.
- Die geskiedenis van wiskunde moet ingewerk word in projekte en take, waar moontlik, om die menslike aspek en ontwikkelende aard van wiskunde te illustreer.
- Kontekstuele probleme moet kwessies met betrekking tot gesondheid, maatskaplike, ekonomiese, kulturele, wetenskaplike, politieke en omgewingskwessies insluit, waar moontlik.
- Konseptuele begrip van "wanneer" en "hoekom" moet ook deel vorm van die tipes probleme.
- Onderrig vir gemengde vermoëns vereis dat opvoeders in staat is om leerders uit te daag en remediërende ondersteuning aan te bied, waar nodig.
- Wanpersepsies wat deur assessering blootgestel word, moet hanteer en reggestel word met behulp van vrae ontwerp deur opvoeders.
- Probleemoplossing en kognitiewe ontwikkeling moet sentraal wees tot alle wiskunde onderrig en leerwerk, sodat leerders hulle kennis doeltreffend kan toepas.

Toekenning van onderrigtyd:
Tydstoekenning vir Wiskunde per week: 4 ure en 30 minute bv. ses 45 min. periodes per week.

Kwartaal	Onderwerp	Aantal weeks
Kwartaal 1	Patrone, rye en reekse	3
	Funksies en inverse	3
	Eksponensiële en Logaritmiese funksies	1
	Finansies, groei en verval	2
	Trigonometrie, -saamgestelde hoeke	2
Kwartaal 2	Trigonometrie 2D en 3D	2
	Polinoomfunksies	1
	Differensiaalrekene	3
	Analitiese Meetkunde	2
	Half-jaar eksamens	3
Kwartaal 3	Euklidiese meetkunde	2
	Statistiek	2
	Waarskynlikheid	2
	Hersiening	1
	Proefeksamens	3
Kwartaal 4	Hersiening	3
	Eksamens	6

Sien bladsy 20 van die Kurrikulum- en Assesseringsbeleidsraamwerk vir die volgordebepaling en tempo van onderwerpe.

1.3 Assesering

"Opvoeder assessering is deel van die alledaagse onderrig en leerwerk in die klaskamer. Opvoeders hou besprekings met leerders, lei hulle in hul werk, vra en beantwoord vrae, neem waar, help, moedig aan en daag uit. Daarbenewens merk en hersien hulle geskrewe en ander vorme van werk. Deur middel van hierdie aktiwiteite is hulle voortdurend besig om meer uit te vind oor hulle leerders se vermoëns en prestasies. Hierdie kennis lig dan planne in vir toekomstige werk. Opvoeder assessering behels hierdie deurlopende proses. Dit moet nie gesien word as 'n afsonderlike aktiwiteit wat noodwendig die gebruik van ekstra take of toetse vereis nie."

Soos die aanhaling hierbo suggereer, behoort assessering opgeneem te word as deel van die klaskamerpraktyk, eerder as 'n afsonderlike aktiwiteit. Navorsing gedurende die afgelope tien jaar dui aan dat leerders 'n gevoel kry van wat hulle weet en nie weet nie, van wat hulle hieromtrent kan doen en hoe hulle hieroor voel, vanaf gereelde klaskamerassessering en onderwyser terugvoer. Die onderwyser se persepsies van en benadering tot assessering (beide formele en informele assessering) kan 'n invloed hê op die klaskamerkultuur, wat geskep word met betrekking tot die leerders se verwagtinge van en prestasie in assesseringstake. Literatuur oor klaskamerassessering onderskei tussen twee verskillende doelwitte van assessering: assessering van leer en assessering vir leer.

Assessering van leer is geneig om 'n meer formele assessering te wees en assesseer hoeveel leerders geleer het, of op 'n bepaalde punt in die jaarlikse onderrigplan verstaan. Die NKV bied omvattende riglyne oor die soorte en hoeveelheid van formele assessering wat moet plaasvind binne die onderrigjaar, om die skoolgebaseerde assesseringspunt saam te stel. Die skoolgebaseerde assesseringspunt dra 25% by tot die finale persentasie van 'n leerder se promosiepunt; die einde van die jaar eksamen bepaal die ander 75% van die jaarlikse promosiepunt. Daar word van leerders verwag om 7 formele assesseringstake vir hul skoolgebaseerde assesseringspunt te hê. Die aantal take en hul gewig in die graad 12 wiskunde kurrikulum is hieronder opgesom:

		Take	**Gewigstoekening (persent)**
Skool-gebaseerde Assessering	Kwartaal 1	Toets Projek/Ondersoek Opdrag	10 20 10
	Kwartaal 2	Toets Half-jaar eksamens	10 15
	Kwartaal 3	Toets Proefeksamens	10 25
	Kwartaal 4		
Skool-gebaseerde Asseseringspunt			100
Skool-gebaseerde Asseseringspunt (as 'n persent van vorderingspunt)			25%
Eindeksamen			75%
Vorderingspunt			100%

Die volgende is 'n kort verduideliking van elk van die assesseringstake ingesluit in die assesseringsprogram hierbo

Toets

Alle wiskunde-opvoeders is vertroud met hierdie vorm van formele assessering. Die toetse sluit 'n verskeidenheid van items/vrae in wat die onderwerpe dek wat reeds voor die toets aangebied is. Die nuwe NKV bepaal ook dat wiskundetoetse vrae wat betrekking het op die volgende vier tipes kognitiewe vlakke insluit:

Kognitiewe vlakke	Beskrywing	Gewigstoekening (persent)
Kennis	Beramings- en toepaslike afronding van getalle. Bewyse van voorgeskrewe stellings. Die aflei van formules. Direkte herroeping Identifisering en die direkte gebruik van formules op die inligtingsblad (geen verandering van die onderwerp). Gebruik van wiskundige feite.. Toepaslike gebruik van wiskundige woordeskat.	20
Roetine prosedures	Voer bekende prosedures uit. Eenvoudige toepassings en berekeninge. Afleiding vanaf die gegewe inligting. Identifikasie en die gebruik (insluitend die verandering van die onderwerp) van korrekte formules. Vrae oor die algemeen soortgelyk aan dié wat in die klas behandel is.	35
Komplekse prosedures	Probleme behels komplekse berekenings en/of hoër redenasie. Daar is dikwels nie 'n duidelike pad na die oplossing. Probleme hoef nie gebaseer te wees op 'n werklike konteks nie. Kan die vorming van beduidende verbinddings tussen verskillende voorstellings behels. Verreis konseptuele begrip. Vereis konseptuele begrip.	30
Probleemoplossing	Voorheen ongesiende nie-roetine probleme (wat nie noodwendig moeilik is nie). Hoër orde begrip en prosesse is dikwels betrokke. Kan die vermoë om die probleem in sy samestellende dele op te breek, vereis.	15

Die uiteensetting van die toetse oor die vier kwartale van die NKV assesseringsprogram word as volg opgesom:

Kwartaal 1: Een toets/opdrag van ten minste 50 punte en een uur.

Kwartaal 2: Een toets van ten minste 50 punte en een uur.

Kwartaal 3: Een toets van ten minste 50 punte en een uur.

Kwartaal 4: Geen.

Projekte/Ondersoeke

Ondersoeke en projekte bestaan uit oop vrae wat denkprosesse inisiëer en ontwikkel. Die aanleer en ontwikkeling van probleem-vaardighede is 'n noodsaaklike deel van ondersoeke en projekte. Hierdie take bied leerders die geleentheid om ondersoek in te stel, inligting te versamel, resultate te tabuleer, veronderstellings te maak, en hierdie veronderstellings te regverdig of bewys. Voorbeelde van ondersoeke en projekte en moontlike assesseringskale word aangegee in die volgende afdeling oor assessering ondersteuning. Die NKV assesseringsprogram dui aan dat slegs een projek of ondersoek (van ten minste 50 punte) per jaar ingesluit moet word. Alhoewel die projek/ondersoek in die eerste kwartaal aangegee word van die assesseringsskedule, kan dit ook in die tweede kwartaal gedoen word.

Opdragte

Die NKV sluit die volgende take in as goeie voorbeelde van opdragte:

- Oopboe toets
- Vertalingsopdrag
- Foute identifiseer en verbeter
- Korter ondersoek
- Joernaalinskrywing
- Breinkaart (ook bekend as 'n metacog)
- Olimpiade (eerste ronde)
- Wiskunde-handleiding oor 'n hele onderwerp
- Wiskunde tutoriaal op meer komplekse probleemoplossings vrae

Die NKV assesseringsprogram vereis dat 'n opdrag(van ten minste 50 punte) in die tweede kwartaal gegee word. Dit kan 'n kombinasie wees van 'n paar van die voorbeelde hierbo. Meer inligting oor hierdie voorgestelde voorbeelde van opdragte en moontlike assesseringsrubrieke word in die volgende afdeling oor assesseringsondersteuning gegee.

Eksamens

Opvoeders is goed vertroud met hierdie summatiewe vorm van assessering wat gewoonlik tweekeer per jaar gedoen word: die middel-van-die-jaar eksamens en einde-van-jaar eksamens. Dit is soortgelyk aan toetse, maar dek 'n groter verskeidenheid van onderwerpe wat voltooi is voor elke eksamen. Die NKV bepaal dat elke eksamen die vier kognitiewe vlakke sal dek volgens hul aanbevole gewigte soos saamgevat in die afdeling oor toetse. Die volgende tabel gee 'n opsomming van die vereistes en inligting van die NKV vir die twee eksamens.

Eksamen	Punte	Uiteensetting	inhoud en puntverspreiding
Middel-van-die-jaar eksamens	300 150 + 150	Een van die eksamens in kwartaal 2 en 3 moet uit twee drie-uurvraestelle bestaan.	Onderwerpe voltooi
Proefeksamens	300	Een van die eksamens in kwartaal 2 en 3 moet uit twee drie-uurvraestelle bestaan.	Alle onderwerpe
Einde-van-die-jaar eksamen	150 +	Vraestel 1: 3 uur	Getalpatrone en sekwensies (± 25) Finansies, groei en decay (± 15) Funksies en grafieke (± 35) Algebraiese uitdrukkings, vergelykings en ongelykhede (± 25) Differensiaalrekene (± 35) Waarskynlikheid (± 15)
Einde-van-die-jaar eksamen	150	Vraestel 2: 3 uur	Euklidiese meetkunde en meting (± 50) Analyties meetkunde (± 40) Statistiek (± 20) Trigonometrie (± 40)

In die jaarlikse opsommende onderrigplan van die NKV in Wiskunde vir Graad 12, verskaf die pasaanduider afdeling 'n gedetailleerde model van die voorgestelde onderwerpe wat gedek moet word in elke week van elke kwartaal en die gepaardgaande formele assessering.

Assesering **vir** leer is geneig om meer informeel te wees en fokus op die toepassing van assessering in die loop van die daaglikse klaskameraktiwiteite. Dit sluit in:

1. Nasien van huiswerk
2. Basislynasseserings
3. Diagnostiese assessering
4. Groepwerk
5. Klasbesprekings
6. Mondelinge aanbiedings
7. Self-assessering
8. Eweknie-assessering

Hierdie aktiwiteite word uitgebrei in die volgende afdeling oor assesseringsondersteuning en voorgestelde assesseringskale word voorsien. Waar formele assessering geneig is om die leerder te beperk tot skriftelike assesseringstake, is die informele assessering nodig is om leerders se vordering in verbale wiskundige redenasie- en kommunikasievaardighede te evalueer en aan te moedig. Dit bied ook 'n minder formele assesseringsomgewing wat leerders toelaat om hulleself openlik en eerlik te assesseer, om verantwoordelikheid te neem vir hul eie leer, sonder die swaar las van die prestasie (of punte) komponent. Die assessering-vir-leer aktiwiteite moet ten minste een keer 'n week ingesluit word in die klaskamer-aktiwiteite (as deel van' n les) om te verseker dat die opvoeder in staat is om voortdurend die leerders se begrip van die onderwerpe wat gedek is en hulle doeltreffendheid te evalueer. Dit bemagtig ook die opvoeder om enige moontlike tekortkominge in sy of haar eie onderrig van die onderwerpe te identifiseer.

Assessering ondersteuning

'n Verskeidenheid van verduidelikings, voorbeelde en voorgestelde assesseringskale vir die assessering van leer (formele vorme van assessering) en die assessering vir leer (informele vorme van assessering), wat in die vorige afdeling genoem is, word in hierdie afdeling uiteengesit.

Basislynasseserings

Basislyn- of grondlynassessering is 'n metode vir die vasstelling van:

- die voorkennis waaroor ‘n leerder beskik
- 'n leerder se vlak van kennis oor 'n spesifieke leerarea
- die vaardigheids- en toepassingsvlak wat ‘n leerder toon
- ‘n leerder se vlak van begrip van die verskillende leerareas

Dit is nuttig vir ‘n opvoeder om te weet wat ‘n leerder se individuele vertrekpunt is, ten einde hom/haar te help na 'n meer gevorderde vlak en om sodoende vordering maak. Dit help ook voorkom dat groot "gapings"bestaan in leerders se kennis soos wat hulle beweeg deur die onderwysstelsel. Uitkomsgebaseerde onderwys is 'n meer leerder-gesentreerde benadering as waaraan ons in Suid-Afrika gewoond is; dus moet die klem moet nou verskuif na die vlak van elke individuele leerder, eerder as dié van die hele klas.

Die basislynassessering dien ook as ‘n maatstaf om leerders in staat te stel om meer verantwoordelikheid vir hulle eie leer te neem en hulle eie vordering te monitor. In die tradisionele assesseringstelsel daal die swakker leerders dikwels van 'n gemiddeld van 40% in die eerste kwartaal tot 'n gemiddeld van 30% in die vierde kwartaal as gevolg van 'n toename in die werkslading. Hulle toon dus geen duidelike vordering nie. Basislynassessering gee inligting oor die vlakke wat verbeter kan word en soos die leerder vorder deur 'n afdeling van die werk, kan aangetoon word of die leerder meer kennis, begrip en vaardigheid in daardie gebied verwerf.

Diagnostiese assessering

Dit word gebruik om uit te vind of enige spesifieke probleme bestaan ten opsigte van 'n afdeling van die werk ten einde die leerder te voorsien van toepaslike addisionele hulp en leiding. Die assessering help die opvoeder en die leerder om probleemareas, misverstande, wanopvattings en foutiewe gebruik en interpretasie van notasie te identifiseer.

'n Paar punte om in gedagte te hou:

- Probeer om nie te veel konsepte te toets binne 'n enkele diagnostiese assessering nie.
- Wees selektief in die tipe vrae wat jy kies.
- Diagnostiese assesserings moet met 'n sekere struktuur in gedagte ontwerp word. As 'n opvoeder moet jy besluit presies watter uitkomste jy wil assesseer en die inhoud van die assessering dienooreenkomstig struktureer.
- Die beoordeling is anders gemerk ander toetse wat die punt is nie die fokus nie, maar eerder die tipe foute wat die leerder gemaak het.

Die beoordeling word anders gemerk as ander toetse want die punt is nie die fokus nie, maar eerder die tipe foute wat die leerder gemaak het.

0: dui aan dat die leerder nie die konsep onder die knie het nie en dat daar 'n fundementele wiskundige probleem bestaan.

1: dui aan dat die leerder 'n idee het van die inhoud, maar nie ware begrip van die inhoud of die notasie toon nie.

2: dui op getuienis van 'n mate van begrip deur die leerder, maar verdere konsolidasie is steeds 'n vereiste.

3: dui op 'n duidelike bewys dat die leerder die konsep verstaan en die notasie korrek kan gebruik.

Sakrekenaar werkblad: assessering van diagnostiese vaardighede

1. Bereken:
   a) $242 + 63 =$
   b) $2 - 36 \times (114 + 25) =$
   c) $\sqrt{144 + 25} =$
   d) $\sqrt[4]{729} =$
   e) $-312 + 6 + 879 - 321 + 18\,901 =$
2. Bereken:
   a) $\frac{2}{7} + \frac{1}{3} =$
   b) $2\frac{1}{5} - \frac{2}{9} =$
   c) $-2\frac{5}{6} + \frac{3}{8} =$
   d) $4 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} =$
   e) $\left(\frac{9}{10} - \frac{8}{9}\right) \div \frac{3}{5} =$
   f) $2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) =$
   g) $\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{4}{16}} =$

Self-assessering rubriek:

Naam:

Vraag	Antwoord	ja	nee	Indien nee, volgorde neer waarin die sleutels gedruk is
1a				
1b				
1c				
1d				
1e				
Subtotaal				
2a				
2b				
2c				
2d				
2e				
Subtotaal				
Totaal				

Opvoeder-assessering rubriek:

Tipe vaardigheid	Bemeester	Benodig oefening	Probleem
Verhoging na 'n mag			
Vind 'n wortel			
Berekeninge met breuke			
Hakies en volgorde van berekeninge			
Skattings en hoofreken-kontrole			

Riglyne vir assessering van sakrekenaarvaardighede:

Tipe vaardigheid	Onderafdeling	Vrae
Verhoging tot 'n mag	Vierkante en derdemagte Hoer orde magte	1a, 2f 1b
Vind 'n wortel	Vierkants en derdermagswortels Hoer order wortels	1c, 2g 1d
Berekeninge met breuke	Basiese erekeninge Gemengde getalle Negatiewe getalle Kwadree breuke Vierkantswortel van breuke	2a, 2d 2b, 2c 1e, 2c 2f 2g
Hakies en volgende van berekeninge	Korrekte gebruik van hakies of volgorde van berekenininge	1b, 1c, 2e, 2f, 2g
Skattings en hoofrekenkontrole	Algeheel	Almal

Voorgestelde riglyn vir die toekenning van algehele vlakke

Vlak 1

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Die leerder toon nie voldoende hoofrekenskatting en -kontrole vaardighede nie.

Vlak 2

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants-en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.
- Leerder toon 'n mate van hoofrekenskatting en –kontrole tegnieke.

Vlak 3

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen op die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants-en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is ook in staat om hoër-orde magte en wortels te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.
- Leerder werk korrek met negatiewe getalle.
- Leerder is in staat om hakies te gebruik in sekere berekeninge, maar verstaan nog nie ten volle die volgorde van bewerkings wat die sakrekenaar geprogrammeer is om uit te voer nie, vandaar die behoefte aan hakies.
- Leerder is in staat om moontlike foute en probleme in hul berekeninge te identifiseer, maar het hulp nodig om die probleem op te los.

Vlak 4

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen op die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants-en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is ook in staat om hoër-orde-magte en wortels te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.
- Leerder werk korrek met negatiewe getalle.
- Leerder is in staat om korrek te werk met hakies en om die noodsaaklikheid en die gebruik van hakies en die "= sleutelïn berekeninge reg te hanteer volgens die aard van 'n wetenskaplike sakrekenaar.
- Leerder is in staat om moontlike foute en probleme in hul berekeninge te identifiseer en om oplossings hiervoor te vind ten einde by 'n "meer geloofwaardigeäntwoord uit te kom.

Ander kort diagnostiese toetse

Dit is kort toetse wat klein hoeveelhede herroeping en toepassing van kennis op 'n dag-tot-dag basis assesseer. Sulke toetse kan vrae oor een of 'n kombinasie van die volgende insluit:

- Definisies
- Stellings
- Meetkunderprobleme
- Formules
- Toepassings
- Gekombineerde vrae

Oefeninge

Dit behels enige werk uit die handboek of 'n ander bron wat aan die leerder gegee word deur die opvoeder om in die klas óf tuis te voltooi. Opvoeders moet leerders aanmoedig om nie mekaar se werk te kopieer nie en moet oplettend en noukeurig wees in die nagaan van hierdie werk. Dit word aanbeveel dat hierdie tipe werk gemerk/gekontroleer sal word met behulp van 'n kontrolelys (hieronder) om die proses vir die opvoeder te bespoedig.

Die punte wat behaal word deur die leerder vir 'n spesifieke stuk werk moet nie gebaseer wees op korrekte of verkeerde antwoorde nie, maar verkieslik op die volgende:

1. die poging van die leerder om antwoorde te produseer.
2. die kwaliteit van die regstellings aan werk wat voorheen verkeerd was.
3. die vermoë van die leerder om die inhoud van 'n paar geselekteerde voorbeelde (hetsy skriftelik of mondeling) te verduidelik.

Die volgende rubriek kan gebruik word om klas- of huiswerkoefeningete assesseer:

Kriteria	**Prestasie-aanduiders**		
Werk gedoen	2 Al die werk gedoen	1 Gedeeltelik voltooi	0 Geen werk gedoen
Werk netjies gedoen	2 Werk netjies gedoen	1 Sekere werk nie netjies gedoen nie	0 Slordig en deurmekaar
Regstellings gedoen	2 Deurgaans alle regstellings gedoen	1 Ten minste helfte van die restellings gedoen	0 Geen restellings gedoen
Korrekte wiskundige metode	2 Deurgaans	1 Soms	0 Glad nie
Begrip van wiskundige tegnieke en prosses	2 Kan konsepte en prosese akkuraat verduidelik	1 Verduidelikings is dubbelsinnig en nie gefokus nie	0 Verduidelikings is verwarrend of irrelevant

Joernaalinskrywings

'n Joernaalinskrywing is 'n poging deur 'n leerder om in geskrewe woorde uit te druk wat in Wiskunde gebeur. Dit is belangrik om in staat wees om 'n wiskundige probleem en die oplossing daarvan in die geskrewe taal te verwoord. Dit kan op verskillende maniere gedoen word:

- Vandag in wiskunde het ons geleer...
- Skryf 'n brief aan 'n vriend wat siek was om te verduidelik wat vandag gebeur het in die klas.
- Verduidelik die denkproses agter die poging om 'n spesifieke wiskundeprobleem op te los, bv. skets die grafiek va $y = x^2 - 2x^2 + 1$ en verduidelik hoe om so 'n grafiek te teken.
- Gee 'n oplossing vir 'n probleem, besluit of dit korrek is, en indien nie, verduidelik die moontlike probleme wat ervaar word deur die persoon wat die verkeerde oplossing geskryf het.

'n Joernaal is 'n waardevolle hulpmiddel wat die opvoeder in staat stel om wiskundige wanopvattings van die leerders te identifiseer. Die nasien van hierdie soort oefening kan gesien word as subjektief, maar 'n rubriek kan die taak vereenvoudig.

Die volgende rubriek kan gebruik word om joernaalinskrywings te merk. Die assesseringsrubriek moet aan leerders gegee voor die taak gedoen word.

Taak	**Bevoegd (2 punte)**	**Ontwikkel nog (1 punt)**	**Nog nie ontwikkel (0 punte)**
Voltooi binne tydsbeperking?			
Korrektheid van die verduideliking?			
Korrekte en toepaslike gebruik van wiskundige taal?			
Is die konsep korrek geinterpreteer?			

Vertalings

Vertaling assesseer die leerder se vermoë om woorde te vertaal in wiskundige notasie of om ’n verduideliking van wiskundige konsepte in woorde te gee. Dikwels wanneer leerders wiskundige taal en notasie korrek kan gebruik, toon hulle ’n groter begrip van die konsepte.

Byvoorbeeld:

Skryf die letter van die korrekte uitdrukking langs die ooreenstemmende nommer:

x word met 10 vermeeder	a)	xy
Die produk van x en y	b)	$x-2$
Die som van ’n sekere getal en dubbel daardie getal	c)	x^2
Helfte van ’n sekere getal vermenigvuldig met homself	d)	$\frac{1}{2}\times 2$
Twee minder as x	e)	$x+x+2$
’n Sekere getal vermenigvuldig met homself	f)	x^2

Groep werk

Een van die beginsels in die NKV is om leerders te produseer wat in staat is om effektief te werk in groepsverband. Leerders vind dit oor die algemeen moeilik om te doen, daarom moet hulle aangemoedig word om in klein groepies te werk. Dikwels ontwikkel leerders ‘n beter begrip van konsepte en prosesse wanneer hulle met bystand van hulle maats werk. Slim leerders vind hierdie tipe taak gewoonlik moeilik, en tog is dit belangrik dat hulle leer hoe om te help en effektief te kommunikeer met ander leerders.

Breinkarts of metacogs

’n Metacog of ”breinkaart ïs ’n nuttige hulpmiddel. Dit help om idees te koppel en verbindings te vorm van sake wat andersins onverwant voorgekom het. ’n Breinkaart kan gebruik word aan die begin of einde van ’n afdeling ten einde leerders ’n oorsigtelike perspektief van die werk te gee, of as ’n herinnering aan ’n gedeelte van die werk wat reeds afgehandel is. Dit moet beklemtoon word dat dit nie ’n opsomming is nie. Ongeag hoe jy dit gebruik, dit is ’n geleentheid wat ’n leerder gegee word om navorsing te doen in ’n bepaalde veld en te kan toon dat hy/sy ‘n begrip het van die betrokke afdeling.

Dit is ’n oopboek vorm van assessering en leerders kan enige materiaal gebruik wat hulle voel sal kan help. Daar word voorgestel dat hierdie aktiwiteit geoefen word, met behulp van ander onderwerpe, voor ’n breinkaart-toets voorgelê word vir portefeulje-assessering.

Na voltooiing van die beinkaart, moet die leerders in staat wees om insiggewende vrae daaroor te beantwoord. Dit is wat ‘n breinkaart onderskei van ’n gewone opsomming van ’n afdeling van die werk. Leerders moet verwys na hul breinkaart wanneer die vrae beantwoord word, maar mag nie verwys na enige verwysingsmateriaal nie. Hier is ’n paar riglyne om aan leerders te gee waaraan voldoen moet word wanneer ‘n breinkaart saamgestel word, sowel as twee voorbeelde om leerders te help om aan die gang te kom . ’n Assesseringsrubriek word ook voorsien. Dit moet beskikbaar gestel word aan die leerders voor hulle begin om hulle breinkaarte saam te stel. Op die volgende bladsy is ’n modelvraag vir ’n breinkaart, asook ’n paar voorbeelde van vrae wat gevra kan word binne die konteks van die samestelling van ‘n breinkaart oor analitiese meetkunde.

’n Basiese breinkaart word op die volgende wyse saamgestel:

- Skryf die titel/onderwerp van die vak in die middel van die bladsy en trek ’n sirkel daar rondom.
- Vir die eerste hoofopskrif van die onderwerp, trek ’n streep uit die sirkel in enige rigting, en skryf die opskrif bo of onder die lyn.
- Vir die sub-opskrifte van die hoofopskrif, trek lyne vir elke onderafdeling uit die eerste lyn en benoem elkeen.
- Vir individuele feite, trek lyne uit die toepaslike opskrif.

'n Metacog (breinkaart) is 'n mens se persoonlike eiendom. Sodra iemand verstaan hoe om die basiese struktuur saam te stel, kan hulle hulle eie kodering en konvensies ontwikkel om dinge verder te neem, byvoorbeeld hoe om verbande en skakels tussen feite aan te toon. Die volgende wenke kan opvoeders en leerders help om die doeltreffendheid van hul breinkaarte te verbeter:

- Gebruik die enkele woorde of eenvoudige frases vir meer inligting. Oortollige woorde kompliseer die breinkaart en neem onnodige tyd om neer te skryf.
- Gebruik drukskrif: aanmekaar- of onduidelike skrif lees moeiliker en is minder aantreklik om na te kyk.
- Gebruik kleur om verskillende idees te skei - dit sal jou brein help om verskillende idees van mekaar te onderskei waar nodig, en help met visualisering van die breinkaart vir maklike herroepping. Kleur help ook om organisasie te wys.
- Gebruik simbole en diagramme/sketse waar van toepassing. As 'n simbool iets vir jou beteken en meer inligting oordra as woorde, gebruik dit. Prente/foto's help ook om inligting te onthou.
- Gebruik vorms, sirkels en raampies om brokkies inligting met mekaar te verbind - dit is 'n bykomende hulpmiddels om die groepering van inligting voor te stel.

Gebruik die konsep van analitiese meetkunde as jou onderwerp en konstrueer 'n breinkaart (of metacog) met al die inligting (insluitend terminologie, definisies, formules en voorbeelde) wat jy ken oor die onderwerp van analitiese meetkunde. Moontlike vrae om die leerder te vra na voltooiing van die breinkaart:

- Verduidelik kortliks wat die wiskunde onderwerp van analitiese meetkunde behels.
- Identifiseer en verduidelik die afstandformule, die afleiding daarvan en die gebruik daarvan op jou breinkaart.
- Hoe verskil of stem die berekening van gradiënt in analitiese meetkunde ooreen met die benadering wat gebruik word om die gradiënt te bereken wanneer daar met funksies gewerk word?

'n Voorgestelde eenvoudige rubriek vir nasien van 'n breinkaart:

Taak	**Bevoegd (2 punte)**	**In ontwikkeling (1 punt)**	**Nog nie ontwikkel 1 punte)**
Betyds voltooi			
Hoofopskrifte			
Korrekte teorie (Formules, definisies, terminologie, ens.)			
Verduidelikking			
Leesbaarheid			

10 punte vir die vrae wat gemerk is met behulp van die volgende skaal:

0 - geen poging of 'n totaal verkeerde poging is gemaak

1 - 'n korrekte poging is aangewend, maar die leerder het nie die korrekte antwoord gekry nie

2 - 'n korrekte poging is aangewend en die antwoord is korrek

Ondersoeke

Ondersoeke bestaan uit oop vrae wat denkprosesse inisieer en uitbrei. Die aanleer en ontwikkeling van probleemoplossingsvaardighede is 'n noodsaaklike deel van die uitvoer van ondersoeke.

Dit word voorgestel dat 2 - 3 uur toegelaat word vir hierdie taak. Gedurende die eerste 30 - 45 minute behoort leerders aangemoedig te word om te praat oor die probleem, punte van

verwarring uit te klaar, en die aanvanklike hipoteses met ander te bespreek. Die finale skriftelike weergawe moet individueel gedoen word en moet ongeveer vier bladsye beslaan.

Assessering van ondersoeke kan terugvoer of voordragte deur groepe of individue oor die resultate insluit, terwyl die volgende in gedagte gehou word:

- gebruik 'n logiese volgorde in die oplossing van probleme
- die pre-kennis wat nodig is om die probleem op te los
- die korrekte gebruik van wiskundige taal en notasie
- doelgerigtheid van die oplossing
- die kwaliteit van die geskrewe en mondelinge aanbieding

Enkele voorbeelde van voorgestelde assesseringskale ingesluit is op die volgende paar bladsye, gevolg deur 'n seleksie van onderwerpe vir moontlike ondersoeke. Die volgende riglyne moet aan leerders voorsien word voordat hulle 'n ondersoek begin:

Algemene instruksies aan leerders

- Jy kan enige van die gegewe projekte of ondersoeke kies (kyk modelvraag oor ondersoeke).
- Volg die instruksies wat saam met elke taak gegee word noukeurig aangesien dit beskryf hoe die finale produk aangebied moet word.
- Julle mag die probleem in groepe bespreek om kwessies uit te klaar, maar elke individu moet sy/haar eie weergawe op skrif stel.
- Kopiëring van mede-leerders sal meebring dat die taak gediskwalifiseer word.
- Jou opvoeders is 'n bron van hulp vir jou, en al sal hulle nie antwoorde of oplossings verskaf nie, kan hulle genader word vir wenke.

Die ondersoek moet ingehandig word op die datum deur jou opvoeder bepaal. Dit moet ten minste die volgende bevat:

- 'n beskrywing van die probleem
- 'n bespreking van die manier waarop jy te werk gaan om die probleem te hanteer
- 'n beskrywing van die finale resultaat met 'n toepaslike motivering oor die geldigheid van die oplossing
- persoonlike refleksies wat wiskundige of ander lesse wat geleer is, insluit, sowel as die gevoelens wat ervaar is in die ondersoek van die probleem.
- die geskrewe weergawe moet aantreklik en netjies aangebied word op sowat vier A4-bladsye.
- hoewel die gebruik van tegnologie in die aanbieding aangemoedig word, moet die wiskundige inhoud en prosesse die hooffokus bly.

Hier is 'n paar voorbeelde van 'n moontlike rubriek wat gebruik kan word vir die nasien van die ondersoek:

Vlak van prestasie	Kriteria
4	• Bevat 'n volledige antwoord. • Duidelike, samehangende, ondubbelsinnige en elegante verduideliking. • Sluit duidelike en eenvoudige diagramme in waar van toepassing. • Toon begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer die belangrikste elemente van die vraag. • Sluit voorbeelde en teenvoorbeelde in. • Gee sterk ondersteunende argumente. • Gaan verder as die vereistes van die probleem.
3	• Bevat 'n volledige antwoord. • Verduideliking minder elegant, minder volledig. • Toon begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer die belangrikste elemente van die vraag. • Gaan nie verder as die vereistes van die probleem nie.
2	• Bevat 'n onvolledige antwoord. • Verduideliking is nie logies en duidelik nie. • Toon 'n mate van begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer sommige van die belangrikste elemente van die vraag. • Bied argumente aan, maar onvolledig. • Sluit diagramme in, maar onvanpas of onduidelik.
1	• Bevat 'n onvolledige antwoord. • Laat belangrike dele van die vraag of die hele vraag en antwoord weg. • Bevat groot foute. • Gebruik onvanpaste strategieë.
0	• Geen sigbare antwoord of poging.

Mondelinge Assessering

'n Mondelinge assessering behels dat die leerder aan die hele klas of 'n groep of die opvoeder verduidelik wat hy/sy verstaan van 'n konsep of 'n probleem of spesifieke vrae beantwoord. Die fokus hier is op die korrekte gebruik van wiskundige taal deur die leerders; die bondigheid en logiese volgorde van die verduidelikings, sowel as hul kommunikasievaardighede.

Mondelinge gedoen kan op 'n aantal maniere gedoen word:

- 'n Leerder verduidelik die oplossing van 'n huiswerkprobleem wat deur die opvoeder gekies is.
- Die opvoeder vra die leerder 'n spesifieke vraag of 'n stel vrae om seker te maak dat die leerder verstaan en evalueer die leerder op sy/haar verduideliking.
- Die opvoeder neem 'n groep leerders waar wat interaksie het met mekaar en assesseer die leerders op hul bydraes en verduidelikings binne die groep.
- 'n Punt word toegeken aan die groep as geheel, op grond van die antwoord wat enige lid van die groep gee op 'n vraag.

'n Voorbeeld van 'n merkrubriek vir 'n mondeling:

1 - die leerder het die vraag verstaan en probeer om dit te beantwoord

2 - die leerder gebruik die korrekte wiskundige taal

2 - die verklaring van die leerder volg 'n logiese progressie

2 - die leerder se verduideliking is bondig en akkuraat

2 - die leerder toon 'n begrip van die konsep wat verduidelik is

1 - die leerder demonstreer goeie kommunikasievaardighede

Maksimum punt = 10

'n Voorbeeld van 'n eweknie-assesseringsrubriek vir 'n mondeling:

My naam:

Naam van persoon wat ek assesseer:

Kriteria	**Punt toegeken**	**Maksimum punt**
Korrekte antwoord		2
Helderheid en verduideliking		3
Korrektheid van verduideliking		3
Bewyse van begrip		2
Totaal		10

HOOFSTUK



Rye en Reekse

- Bespreek en verduidelik belangrike terminologie.
- Wees konsekwent met die gebruik van 'gemene', of gemeenskaplike, verskil en 'konstante' verhouding sodat leerders nie verwar word nie.
- Leerders moet die verskil tussen rekenkundige en meetkundige rye verstaan.
- Verduidelik sigmanotasie baie goed aangesien heelwat leerders probleme het met hierdie konsep.
- Moedig leerders aan om die korrekte notasie (byvoorbeeld T_n, S_n ens.) te gebruik wanneer hulle probleme oplos.
- Gebruik die ondersoek vir die som van 'n oneindige reeks om die konsepte van konvergensie en divergensie in te lei.

2.1 Rekenkundige rye

Oefening 2 – 1: Rekenkundige rye

Vind die gemene verskil en skryf die volgende 3 terme van die ry neer.

1. $2; 6; 10; 14; 18; 22; \ldots$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= 6 - 2 \\ &= 4 \\ \text{of} & \\ d &= 10 - 6 \\ &= 4 \\ \therefore T_7 &= 22 + 4 \\ &= 26 \\ T_8 &= 26 + 4 \\ &= 30 \\ T_9 &= 30 + 4 \\ &= 34 \end{aligned}$$

2. $-1; -4; -7; -10; -13; -16; \ldots$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= -4 - (-1) \\ &= -3 \\ \text{of} & \\ d &= -7 - (-4) \\ &= -3 \\ \therefore T_7 &= -16 - 3 \\ &= -19 \\ T_8 &= -19 - 3 \\ &= -22 \\ T_9 &= -22 - 3 \\ &= -25 \end{aligned}$$

3. $-5; -3; -1; 1; 3; \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= -3-(-5) \\ &= 2 \\ \text{of} & \\ d &= -1-(-3) \\ &= 2 \\ \therefore T_7 &= 3+2 \\ &= 5 \\ T_8 &= 5+2 \\ &= 7 \\ T_9 &= 7+2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

4. $-1; 10; 21; 32; 43; 54; \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= 10-(-1) \\ &= 11 \\ \text{of} & \\ d &= 21-10 \\ &= 11 \\ \therefore T_7 &= 54+11 \\ &= 65 \\ T_8 &= 65+11 \\ &= 76 \\ T_9 &= 76+11 \\ &= 87 \end{aligned}$$

5. $a-3b; a-b; a+b; a+3b; \ldots$

Oplossing:

Hierdie is 'n voorbeeld van 'n nie-numeriese rekenkundige ry.

$$\begin{aligned} d &= (a-b)-(a-3b) \\ &= a-b-a+3b \\ &= 2b \\ \text{of} & \\ d &= (a+b)-(a-b) \\ &= a+b-a+b \\ &= 2b \\ \therefore T_7 &= a+3b+2b \\ &= a+5b \\ T_8 &= a+5b+2b \\ &= a+7b \\ T_9 &= a+7b+2b \\ &= a+9b \end{aligned}$$

6. $-2; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \ldots$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
d &= -\frac{3}{2} - (-2) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

of

$$
\begin{aligned}
d &= -1 - \left(-\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \\
\therefore T_8 &= 1 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2} \\
T_9 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 2 \\
T_{10} &= 2 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29K5 2. 29K6 3. 29K7 4. 29K8 5. 29K9 6. 29KB

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Die algemene term vir 'n rekenkundige ry

Oefening 2 – 2: Rekenkundige Rye

1. Gegee die ry $7; 5{,}5; 4; 2{,}5; \ldots$
   a) Vind die volgende term in die ry.
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
d &= 5{,}5 - 7 \\
&= -1{,}5 \\
\therefore T_5 &= 2{,}5 + (-1{,}5) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

   b) Bepaal die algemene term van die ry.
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= a + (n-1)d \\
&= 7 + (n-1)(-1{,}5) \\
&= 8{,}5 - 1{,}5n
\end{aligned}
$$

   c) Watter term het 'n waarde van -23?
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= 8{,}5 - 1{,}5n \\
\therefore -23 &= 8{,}5 - 1{,}5n \\
31{,}5 &= 1{,}5n \\
\therefore n &= 21 \\
\text{Dus } T_{21} &= -23
\end{aligned}
$$

2. Gegee die ry $2; 6; 10; 14; \ldots$

a) Is dit 'n rekenkundige ry? Bevestig jou antwoord deur berekeninge.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_2 - T_1 &= 6 - 2 = 4 \\
T_3 - T_2 &= 10 - 6 = 4 \\
T_4 - T_3 &= 14 - 10 = 4
\end{aligned}
$$

Ja, dit is 'n rekenkundige ry aangesien daar 'n gemene verskil van 4 tussen opeenvolgende terme is.

b) Bereken T_{55}.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= a + (n-1)d \\
&= 2 + (n-1)4 \\
&= 4n - 2 \\
\therefore T_{55} &= 4(55) - 2 \\
&= 218
\end{aligned}
$$

c) Watter term het 'n waarde van 322?

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= 4n - 2 \\
\therefore 322 &= 4n - 2 \\
324 &= 4n \\
\therefore n &= 81 \\
\therefore T_{81} &= 322
\end{aligned}
$$

d) Bepaal deur berekening of 1204 'n term van die ry is of nie.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= 4n - 2 \\
\therefore 1204 &= 4n - 2 \\
1206 &= 4n \\
\therefore n &= 301\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Die waarde van n is nie 'n positiewe heelgetal nie, dus is 1204 nie 'n term van hierdie ry nie.

3. 'n Rekenkundige ry het die algemene term $T_n = -2n + 7$.

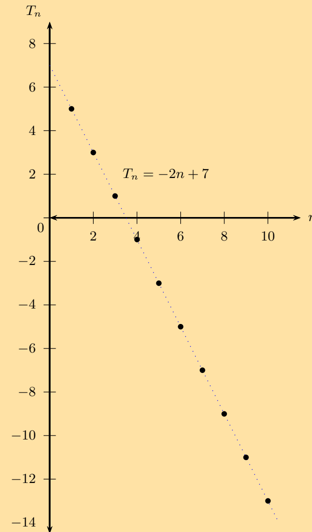
a) Bereken die tweede, derde en tiende terme van die ry.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_2 &= -2(2) + 7 = 3 \\
T_3 &= -2(3) + 7 = 1 \\
T_{10} &= -2(10) + 7 = -13
\end{aligned}
$$

b) Trek 'n grafiek van die ry as $0 < n \leq 10$.

Oplossing:



4. Die eerste term van 'n rekenkundige ry is $-\frac{1}{2}$ en $T_{22} = 10$. Vind T_n.

Oplossing:

Bereken die gemene verskil (d):

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2} \\ \text{Algemene formule: } T_n &= a + (n-1)d \\ T_{22} &= -\frac{1}{2} + (22-1)d \\ \therefore 10 &= -\frac{1}{2} + 21d \\ 10 + \frac{1}{2} &= 21d \\ \frac{21}{2} &= 21d \\ \therefore d &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bepaal nou die algemene term vir die ry:

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)d \\ T_n &= -\frac{1}{2} + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \\ \therefore T_n &= \frac{1}{2}n - 1 \end{aligned}$$

5. Wat is die belangrike eienskappe van 'n rekenkundige ry?

Oplossing:

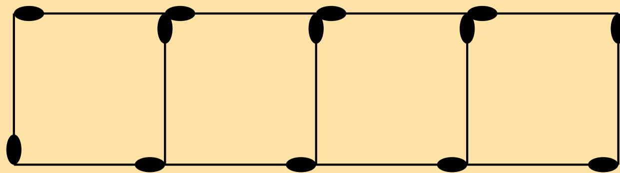
- Daar is 'n gemene verskil tussen enige twee opeenvolgende terme in die ry.
- Die grafiek van T_n vs. n is 'n reguitlyn.

6. Die eerste vier terme van 'n rekenkundige ry word gegee. Beskryf die metode wat jy sal gebruik om die formule te vind vir die n^{de} term van die ry.

Oplossing:

- Gebruik die gegewe terme om die gemene verskil (d) : $d = T_2 - T_1$ te bereken in.
- Van die gegewe terme weet ons dat $T_1 = a$.
- Stel die waardes vir a en d in die vergelyking $T_n = a + (n - 1)d$.
- Vereenvoudig en groepeer soortgelyke terme.

7. 'n Enkele vierkant word gevorm deur 4 vuurhoutjies. Om twee vierkante in 'n ry te maak, neem 7 vuurhoutjies, terwyl drie vierkante in 'n ry 10 vuurhoutjies benodig.



a) Skryf die eerste vier terme in die ry neer.

Oplossing: $4; 7; 10; 13$

b) Wat is die gemene verskil?

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Algemene formule: } d &= T_2 - T_1 \\ &= 7 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

c) Bepaal die formule vir die algemene term.

Oplossing:

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ d &= 3 \\ T_n &= a + (n - 1)d \\ &= 4 + (n - 1)(3) \\ &= 4 + 3n - 3 \\ \therefore T_n &= 3n + 1 \end{aligned}$$

d) Hoeveel vuurhoutjies is daar in 'n ry van 25 vierkante?

Oplossing:

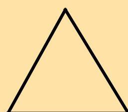
$$\begin{aligned} T_n &= a + (n - 1)d \\ T_{25} &= 4 + (25 - 1)(3) \\ &= 4 + (24)(3) \\ &= 76 \end{aligned}$$

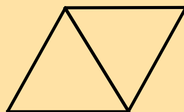
e) As daar 109 vuurhoutjies is, bereken die aantal vierkante in die ry.

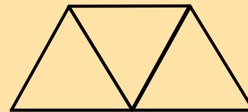
Oplossing:

$$\begin{aligned} T_n &= 3n + 1 \\ 109 &= 3n + 1 \\ 108 &= 3n \\ \therefore n &= 36 \\ \therefore T_{36} &= 109 \end{aligned}$$

8. 'n Patroon van gelyksydige driehoeke versier die rand van 'n meisie se romp. Elke driehoek word gevorm deur drie steke, elk met 'n lengte van 1 cm.







1 2 3

a) Voltooi die tabel:

Figuurno.	1	2	3	q	r	n
Aantal steke	3	5	p	15	71	s

Oplossing:

$$\begin{aligned} p &= 7 \\ q &= 7 \\ r &= 35 \\ s &= 2n + 1 \end{aligned}$$

b) Die rand van die romp is 2 m lank. As die totale lengte van die rand versier word met die driehoekige patroon, hoeveel steke sal daar wees?

Oplossing:

$$\begin{aligned} 2 \text{ m} &= 200 \text{ cm} \\ 2 \text{ driehoeke } &= 1 \text{ cm om die rand} \\ \therefore 2 \times 200 &= 400 \text{ driehoeke om die rand} \\ \text{Aantal steke: } T_n &= 2n + 1 \\ &= 2(400) + 1 \\ &= 801 \end{aligned}$$

9. Die terme p; $(2p + 2)$; $(5p + 3)$ vorm 'n rekenkundige ry. Vind p en die 15^{e} term van die ry.
[IEB, Nov 2011]

Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= (2p + 2) - (p) \\ &= p + 2 \\ \text{of} & \\ d &= T_3 - T_2 \\ &= (5p + 3) - (2p + 2) \\ &= 3p + 1 \\ \therefore 3p + 1 &= p + 2 \\ 2p &= 1 \\ \therefore p &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{15} &= a + 14d \\ &= p + 14(p + 2) \\ &= 15p + 28 \\ &= 15\left(\frac{1}{2}\right) + 28 \\ &= 35\frac{1}{2} \end{aligned}$$

10. Die rekenkundige gemiddelde van $3a - 2$ en x is $4a - 4$. Bepaal die waarde van x in terme van a.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3a-2+x}{2} &= 4a-4\\ 3a-2+x &= 8a-8\\ \therefore x &= 5a-6\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}T_2 - T_1 &= T_3 - T_2\\ \therefore (4a-4)-(3a-2) &= (x)-(4a-4)\\ 4a-4-3a+2 &= x-4a+4\\ \therefore 5a-6 &= x\end{aligned}$$

11. Voeg sewe rekenkundige gemiddeldes tussen die terme $(3s-t)$ en $(-13s+7t)$ in.

Oplossing:

Laat die rekenkundige gemiddeldes wees: $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7$

Die ry is dus:

$$T_1; a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7; T_9$$

$$\begin{aligned}T_1 &= 3s-t\\ T_9 &= -13s+7t\\ d &= \frac{T_9-T_1}{8}\\ &= \frac{-13s+7t-3s+t}{8}\\ &= \frac{-16s+8t}{8}\\ &= -2s+t\\ \therefore T_1 &= 3s-t\\ a_1 &= (3s-t)+(-2s+t)\\ &= s\\ a_2 &= (s)+(-2s+t)\\ &= -s+t\\ a_3 &= (-s+t)+(-2s+t)\\ &= -3s+2t\\ a_4 &= (-3s+2t)+(-2s+t)\\ &= -5s+3t\\ a_5 &= (-5s+3t)+(-2s+t)\\ &= -7s+4t\\ a_6 &= (-7s+4t)+(-2s+t)\\ &= -9s+5t\\ a_7 &= (-9s+5t)+(-2s+t)\\ &= -11s+6t\\ T_9 &= (-11s+6t)+(-2s+t)\\ &= -13s+7t\end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29KC 2. 29KD 3. 29KF 4. 29KG 5. 29KH 6. 29KJ
7. 29KK 8. 29KM 9. 29KN 10. 29KP 11. 29KQ

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 2 – 3: Kwadratiese rye

1. Bepaal die tipe van elk van die volgende rye

- 'n lineêre ry;
- 'n kwadratiese ry;
- of geeneen van die twee nie.

a) $8; 17; 32; 53; 80; \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 9; 15; 21; 27\\ \text{Tweede verskil: } &= 6\end{aligned}$$

Kwadratiese ry

b) $3p^2; 6p^2; 9p^2; 12p^2; 15p^2; \ldots$

Oplossing:

$$\text{Eerste verskil: } = 3p^2$$

Lineêre ry

c) $1; 2{,}5; 5; 8{,}5; 13; \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 1{,}5;\ 2{,}5;\ 3{,}5;\ 4{,}5\\ \text{Tweede verskil: } &= 1\end{aligned}$$

Kwadratiese ry

d) $2; 6; 10; 14; 18; \ldots$

Oplossing:

$$\text{Eerste verskil: } = 4$$

Lineêre ry

e) $5; 19; 41; 71; 109; \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 14; 22; 30; 38\\ \text{Tweede verskil: } &= 8\end{aligned}$$

Kwadratiese ry

f) $3; 9; 16; 21; 27; \ldots$

Oplossing:

Nie een van die twee nie

g) $2k; 8k; 18k; 32k; 50k; \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 6k; 10k; 14k; 18k\\ \text{Tweede verskil: } &= 4k\end{aligned}$$

Kwadratiese ry

h) $2\frac{1}{2}; 6; 10\frac{1}{2}; 16; 22\frac{1}{2}; \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 3{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}5;\ 6{,}5\\ \text{Tweede verskil: } &= 1\end{aligned}$$

Kwadratiese ry

2. 'n Kwadratiese patroon word gegee deur $T_n = n^2 + bn + c$. Vind die waardes van b en c as die ry begin met die volgende terme:

$$-1\ ;\ 2\ ;\ 7\ ;\ 14\ ;\ \ldots$$

Oplossing:

Beginnende met die eerste term, het ons $n = 1$ en $T_1 = -1$:

$$\begin{aligned} T_1 &= (1)^2 + b(1) + c \\ (-1) &= 1 + b + c \\ -2 &= b + c \end{aligned}$$

Vir die tweede term gebruik ons $n = 2$ en $T_2 = 2$:

$$\begin{aligned} T_2 &= (2)^2 + b(2) + c \\ (2) &= 4 + 2b + c \\ -2 &= 2b + c \end{aligned}$$

Nou moet ons hierdie vergelykings gelyktydig oplos. Ons kan dit doen deur vervanging, maar hier vind ons die oplossing deur die 'eliminasie' metode (wat beteken dat ons die een vergelyking van die ander aftrek ten einde die c's te elimineer).

$$\begin{aligned} -2 &= 2b + c \\ -(-2 &= \ b + c) \\ 0 &= \ b \end{aligned}$$

Ten slotte, bereken ons die waarde van c. Soos gewoonlik vir gelyktydige vergelykings, beteken dit dat ons die $b = 0$ vervang in enige van die twee vergelykings wat ons hierbo gebruik het. Laat ons die vergelyking $-2 = b + c$ gebruik.

$$\begin{aligned} b = 0 \ \longrightarrow \quad -2 &= b + c \\ -2 &= (0) + c \\ -2 &= \ c \end{aligned}$$

Die finale antwoorde is $b = 0$ en $c = -2$.

NOTA: Ons weet die algemene term vir die ry is $T_n = n^2 - 2$. Ons kan dit gebruik om ons antwoorde te kontroleer. Ons weet $T_3 = 7$. Vervang $n = 3$ in die algemene formule om te kontroleer:

$$\begin{aligned} T_n &= n^2 - 2 \\ T_3 &= (3)^2 - 2 \\ &= (9) + 0 - 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

3. $a^2; -a^2; -3a^2; -5a^2; \ldots$ is die eerste 4 terme van 'n ry.

   a) Is die ry lineêr of kwadraties? Motiveer you antwoord.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= -a^2 - a^2 = -2a^2 \\ T_3 - T_2 &= -3a^2 - (-a^2) = -2a^2 \\ T_4 - T_3 &= -5a^2 - (-3a^2) = -2a^2 \end{aligned}$$

   Dit is 'n rekenkundige ry omdat daar 'n gemene verskil van $-2a^2$ tussen opeenvolgende terme is.

b) Wat is die volgende term in die ry?

Oplossing:

$$\begin{aligned} T_5 &= -5a^2 + \left(-2a^2\right) \\ &= -7a^2 \end{aligned}$$

c) Bereken T_{100}.

Oplossing:

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)d \\ \therefore T_{100} &= a^2 + (99)(-2a^2) \\ &= a^2 - 198a^2 \\ \therefore T_{100} &= -197a^2 \end{aligned}$$

4. Gegee $T_n = n^2 + bn + c$, bepaal die waardes van b en c as die ry begin met die terme:

$$2\ ;\ 7\ ;\ 14\ ;\ 23\ ;\ \ldots$$

Oplossing:

Beginnende met die eerste term, het ons $n = 1$ en $T_1 = 2$:

$$\begin{aligned} T_1 &= (1)^2 + b(1) + c \\ (2) &= 1 + b + c \\ 1 &= b + c \end{aligned}$$

Vir die tweede term, gebruik ons $n = 2$ en $T_2 = 7$:

$$\begin{aligned} T_2 &= (2)^2 + b(2) + c \\ (7) &= 4 + 2b + c \\ 3 &= 2b + c \end{aligned}$$

Nou moet ons hierdie vergelykings gelyktydig oplos. Ons kan dit doen deur substitusie, maar hier sal ons die oplossing vind deur die 'eliminasie' metode te gebruik (wat beteken dat ons die een vergelyking van die ander aftrek ten einde die c's te elimineer).

$$\begin{aligned} 3 &= 2b + c \\ -(1 &= \ b + c) \\ 2 &= \ b \end{aligned}$$

Laastens, bereken die waarde van c. Soos gewoonlik vir gelyktydige vergelykings, beteken dit dat ons die $b = 2$ vervang in enige van die vergelykings wat ons hierbo gebruik het. Laat ons die vergelyking $1 = b + c$ gebruik.

$$\begin{aligned} b = 2 \quad \longrightarrow \quad 1 &= b + c \\ 1 &= (2) + c \\ -1 &= \ c \end{aligned}$$

Die finale antwoorde is $b = 2$ en $c = -1$.

NOTA: Ons weet die algemene term vir die ry is $T_n = n^2 + 2n - 1$. Ons kan dit gebruik om ons antwoorde te kontroleer. Ons weet $T_3 = 14$. Vervang $n = 3$ in die algemene formule om te kontroleer:

$$\begin{aligned} T_n &= n^2 + 2n - 1 \\ T_3 &= (3)^2 + 2(3) - 1 \\ &= (9) + 6 - 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

5. Die eerste term van 'n kwadratiese ry is 4, die derde term is 34 en die gemene tweede verskil is 10. Bepaal die eerste ses terme in die ry.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } T_2 &= x \\
\therefore T_2 - T_1 &= x - 4 \\
\text{En } T_3 - T_2 &= 34 - x \\
\text{Tweede verskil } &= (T_3 - T_2) - (T_2 - T_1) \\
&= (34 - x) - (x - 4) \\
\therefore 10 &= 38 - 2x \\
2x &= 28 \\
\therefore x &= 14
\end{aligned}$$

$4; 14; 34; 64; 104; 154$

6. 'n Kwadratiese ry het 'n tweede term van 1, 'n derde term gelyk aan -6 en 'n vierde term gelyk aan -14.

   a) Bepaal die tweede verskil vir die ry.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
T_3 - T_2 &= -6 - (1) \\
&= -7 \\
T_4 - T_3 &= -14 - (-6) \\
&= -8 \\
\therefore \text{Tweede verskil} &= -1
\end{aligned}$$

   b) Vervolgens, bereken die eerste term van die patroon.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 1 + 6 \\
&= 7
\end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29KR 1b. 29KS 1c. 29KT 1d. 29KV 1e. 29KW 1f. 29KX
1g. 29KY 1h. 29KZ 2. 29M2 3. 29M3 4. 29M4 5. 29M5
6. 29M6

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

2.2 Meetkundige rye

Oefening 2 – 4: Konstante verhouding van 'n meetkundige ry

Bepaal die konstante verhouding vir elk van die volgende meetkundige rye en skryf die volgende drie terme in die ry neer:

1. $5; 10; 20; \ldots$

   Oplossing:

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{10}{5}$$
$$= 2$$
$$\therefore \text{Volgende terme: } 40; 80; 160$$

2. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$

   Oplossing:

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}$$
$$\therefore \text{Volgende terme: } \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}$$

3. $7; 0{,}7; 0{,}07; \ldots$

   Oplossing:

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{0{,}7}{7}$$
$$= 0{,}1$$
$$\therefore \text{Volgende terme: } 0{,}007; 0{,}0007; 0{,}00007$$

4. $p; 3p^2; 9p^3; \ldots$

   Oplossing:

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{3p^2}{p}$$
$$= 3p$$
$$\therefore \text{Volgende terme: } 27p^4; 81p^5; 243p^6$$

5. $-3; 30; -300; \ldots$

   Oplossing:

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{30}{-3}$$
$$= -10$$
$$\therefore \text{Volgende terme: } 3000; -30\ 000; 300\ 000; -3\ 000\ 000;$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29M8 2. 29M9 3. 29MB 4. 29MC 5. 29MD

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 2 – 5: Algemene term van 'n meetkundige ry

Bepaal die algemene formule vir die n^{de} term van die volgende meetkundige ry:

1. $5; 10; 20; \ldots$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} a &= 5 \\ r = \frac{T_2}{T_1} &= \frac{10}{5} \\ &= 2 \\ T_n &= ar^{n-1} \\ \therefore T_n &= 5(2)^{n-1} \end{aligned}$$

2. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ r = \frac{T_2}{T_1} &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \\ T_n &= ar^{n-1} \\ \therefore T_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

3. $7; 0{,}7; 0{,}07; \ldots$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} a &= 7 \\ r = \frac{T_2}{T_1} &= \frac{0{,}7}{7} \\ &= 0{,}1 \\ T_n &= ar^{n-1} \\ \therefore T_n &= 7(0{,}1)^{n-1} \end{aligned}$$

4. $p; 3p^2; 9p^3; \ldots$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} a &= p \\ r = \frac{T_2}{T_1} &= \frac{3p^2}{p} \\ &= 3p \\ T_n &= ar^{n-1} \\ \therefore T_n &= p(3p)^{n-1} \end{aligned}$$

5. $-3; 30; -300; \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned} a &= -3 \\ r = \frac{T_2}{T_1} &= \frac{30}{-3} \\ &= -10 \\ T_n &= ar^{n-1} \\ \therefore T_n &= -3(-10)^{n-1} \end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29MF 2. 29MG 3. 29MH 4. 29MJ 5. 29MK

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 2 – 6: Gemengde oefeninge

1. Die n^{de} term in 'n ry word gegee deur die formule $T_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

a) Skryf die eerste drie terme van die ry neer.

Oplossing:

$$\begin{aligned} T_1 &= 6\left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ &= 6 \\ T_2 &= 6\left(\frac{1}{3}\right)^1 \\ &= 2 \\ T_3 &= 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\therefore 6; 2; \frac{2}{3} \ldots$

b) Watter tipe ry is dit?

Oplossing:

$$\begin{aligned} r &= \frac{T_2}{T_1} \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \\ \text{Kontroleer: } r &= \frac{T_3}{T_2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dus is dit 'n meetkundige ry met konstante verhouding $r = \frac{1}{3}$.

2. Beskou die volgende terme:

$$(k-4); (k+1); m; 5k$$

Die eerste drie terme vorm 'n rekenkundige ry en die laaste drie terme vorm 'n meetkundige ry. Bepaal die waardes van k en m as beide positiewe heelgetalle is.

[IEB, Nov 2006]

Oplossing:

Beskou eers die rekenkundige ry: $(k-4); (k+1); m$

$$\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 \\
&= (k+1) - (k-4) \\
&= k + 1 - k + 4 \\
&= 5 \\
\text{En } d &= T_3 - T_2 \\
&= m - (k+1) \\
&= m - k - 1 \\
\therefore 5 &= m - k - 1 \\
k + 6 &= m \ldots\ldots (1)
\end{aligned}$$

Beskou nou die meetkundige ry: $(k+1); m; 5k$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{T_2}{T_1} \\
&= \frac{m}{k+1} \\
\text{En } r &= \frac{T_3}{T_2} \\
&= \frac{5k}{m} \\
\therefore \frac{m}{k+1} &= \frac{5k}{m} \\
m^2 &= 5k(k+1) \\
m^2 &= 5k^2 + 5k \ldots\ldots (2) \\
\text{Stel in verg. } (1) \to (2): (k+6)^2 &= 5k^2 + 5k \\
k^2 + 12k + 36 &= 5k^2 + 5k \\
4k^2 - 7k - 36 &= 0 \\
(4k+9)(k-4) &= 0 \\
\therefore k &= -\frac{9}{4} \text{ of } k = 4 \\
\text{Maar } k &\in \mathbb{Z} \\
\text{Dus is } k &= 4 \\
\text{En } m &= k + 6 \\
&= 4 + 6 \\
&= 10
\end{aligned}$$

Dus $k = 4$ en $m = 10$ gee die terme $0; 5; 10; 20$

3. Gegee: 'n meetkundige ry met tweede term $\frac{1}{2}$ en negende term 64.

   a) Bepaal die waarde van r.

      Oplossing:

$$T_2 = \frac{1}{2}$$
$$\therefore ar = \frac{1}{2}$$
$$T_9 = 64$$
$$\therefore ar^8 = 64$$
$$\frac{ar^8}{ar} = \frac{64}{\frac{1}{2}}$$
$$\therefore r^7 = 128$$
$$= 2^7$$
$$\therefore r = 2$$

b) Vind die waarde van a.

Oplossing:

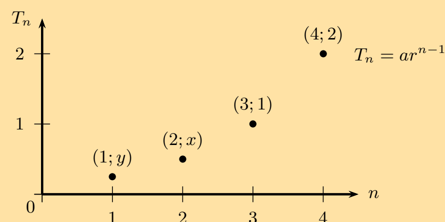
$$T_2 = \frac{1}{2}$$
$$\therefore ar = \frac{1}{2}$$
$$a(2) = \frac{1}{2}$$
$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

c) Bepaal die algemene formule van die ry.

Oplossing:

$$T_n = ar^{n-1}$$
$$= \frac{1}{4}(2)^{n-1}$$
$$= 2^{-2} \ . \ 2^{n-1}$$
$$= 2^{n-1-2}$$
$$= 2^{n-3}$$
$$= 2^n \ . \ 2^{-3}$$
$$= \frac{2^n}{8}$$

4. Die diagram toon vier stelle waardes van opeenvolgende terme van 'n meetkundige ry met algmene formule $T_n = ar^{n-1}$.



a) Bepaal a en r.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
(3;1): \quad T_3 &= ar^{3-1} \\
\therefore 1 &= ar^2 \\
\therefore \frac{1}{r^2} &= a \ldots\ldots (1) \\
(4;2): \quad T_4 &= ar^{4-1} \\
\therefore 2 &= ar^3 \ldots\ldots (2) \\
\text{Stel in } (1) \to (2): \quad 2 &= \left(\frac{1}{r^2}\right) r^3 \\
\therefore 2 &= r \\
\text{Stel terug in } (1): \quad a &= \frac{1}{(2)^2} \\
\therefore a &= \frac{1}{4} \\
\therefore T_n &= \frac{1}{4}(2)^{n-1}
\end{aligned}$$

b) Vind x en y.

Oplossing:

Bepaal y:

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{4}(2)^{n-1} \\
T_1 &= \frac{1}{4}(2)^{1-1} \\
\therefore y &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Bepaal x:

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{4}(2)^{n-1} \\
T_2 &= \frac{1}{4}(2)^{2-1} \\
\therefore x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c) Vind die vyfde term van die ry.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{4}(2)^{n-1} \\
T_5 &= \frac{1}{4}(2)^{5-1} \\
&= \frac{1}{4}(2)^4 \\
&= \frac{1}{4}(16) \\
&= 4
\end{aligned}$$

5. Skryf die volgende twee terme neer vir die gegewe ry:

$$1; \sin\theta; 1 - \cos^2\theta; \ldots$$

Oplossing:

Kontroleer of hierdie 'n meetkundige ry is:

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{T_2}{T_1} \\
&= \sin\theta \\
\text{En } r &= \frac{T_3}{T_2} \\
&= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta} \\
&= \sin\theta
\end{aligned}
$$

Hierdie is 'n meetkundige ry met $r = \sin\theta$. Dus, $T_4 = \sin^3\theta$ en $T_5 = \sin^4\theta$.

6. $5; x; y$ is 'n rekenkundige ry en $x; y; 81$ is 'n meetkundige ry. Alle terme in die rye is heelgetalle. Bereken die waarde van x en y.

Oplossing:

Vir die rekenkundige ry:

$$
\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1 \\
&= x - 5 \\
\text{En } d &= T_3 - T_2 \\
&= y - x \\
\therefore x - 5 &= y - x \\
2x - 5 &= y \ldots\ldots (1)
\end{aligned}
$$

Vir die meetkundige ry:

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{T_2}{T_1} \\
&= \frac{y}{x} \\
\text{En } r &= \frac{T_3}{T_2} \\
&= \frac{81}{y} \\
\therefore \frac{y}{x} &= \frac{81}{y} \\
y^2 &= 81x \ldots\ldots (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Stel in verg. } (1) \to (2): \quad (2x-5)^2 &= 81x \\
4x^2 - 20x + 25 &= 81x \\
4x^2 - 101x + 25 &= 0 \\
(4x-1)(x-25) &= 0 \\
\therefore x &= \frac{1}{4} \text{ of } x = 25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{As } x = \frac{1}{4}: \quad y^2 &= 81x \\
&= \frac{81}{4} \\
\therefore y &= \pm\frac{9}{2} \\
\text{As } x = 25: y^2 &= 81x \\
&= 81 \times 25 \\
&= 2025 \\
\therefore y &= \pm 45
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\text{Rekenkundige ry: } & 5; \frac{1}{4}; -\frac{9}{2}; \ldots \\
\text{of } & 5; 25; 45; \ldots \\
\text{Meetkundige ry: } & \frac{1}{4}; -\frac{9}{2}; 81; \ldots \\
\text{of } & 25; -45; 81; \ldots
\end{aligned}$$

7. Die twee getalle $2x^2y^2$ en $8x^4$ word gegee.

   a) Skryf die meetkundige gemiddelde tussen die twee getalle neer in terme van x en y.
   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat die gemiddelde wees } T_2 &= p \\
\frac{T_2}{T_1} &= \frac{T_3}{T_2} \\
\frac{p}{2x^2y^2} &= \frac{8x^4}{p} \\
\therefore p^2 &= (2x^2y^2)(8x^4) \\
p^2 &= 16x^6y^2 \\
\therefore p &= 4x^3y
\end{aligned}$$

   Let op: in hierdie geval is slegs die positiewe vierkantswortel geldig.

   b) Bepaal die konstante verhouding van die ry wat ontstaan.
   Oplossing:

$$\begin{aligned}
r &= \frac{T_2}{T_1} \\
&= \frac{4x^3y}{2x^2y^2} \\
&= \frac{2x}{y}
\end{aligned}$$

8. Voeg drie meetkundige gemiddeldes in, tussen -1 en $-\frac{1}{81}$. Gee alle moontlik antwoorde.

   Oplossing:
   Gestel die meetkundige ry is $-1; T_2; T_3; T_4; -\frac{1}{81}$

$$\begin{aligned}
T_1 &= -1 = a \\
T_5 &= -\frac{1}{81} = ar^4 \\
\therefore (-1)r^4 &= -\frac{1}{81} \\
r^4 &= \frac{1}{81} \\
\therefore r &= \pm\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

   Dus is moontlike meetkundige rye:
   $-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$
   $-1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; -\frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29MM 2. 29MN 3. 29MP 4. 29MQ 5. 29MR 6. 29MS
7. 29MT 8. 29MV

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

2.3 Reekse

Sigmanotasie

Oefening 2 – 7: Sigmanotasie

1. Bepaal die waarde van die volgende:

a)

$$\sum_{k=1}^{4} 2$$

Oplossing:

$2 + 2 + 2 + 2 = 8$

b)

$$\sum_{i=-1}^{3} i$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\sum_{i=-1}^{3} i &= -1 + 0 + 1 + 2 + 3 \\ &= 5\end{aligned}$$

c)

$$\sum_{n=2}^{5} (3n - 2)$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{5} (3n - 2) &= [3(2) - 2] + [3(3) - 2] + [3(4) - 2] + [3(5) - 2] \\ &= 4 + 7 + 10 + 13 \\ &= 34\end{aligned}$$

2. Brei die reeks uit:

a)

$$\sum_{k=1}^{6} 0^k$$

Oplossing:

$0^1 + 0^2 + 0^3 + 0^4 + 0^5 + 0^6 = 0$

b)

$$\sum_{n=-3}^{0} 8$$

Oplossing:

$8 + 8 + 8 + 8 = 32$

c)

$$\sum_{k=1}^{5} (ak)$$

Oplossing:

$$\sum_{k=1}^{5}(ak) = a + 2a + 3a + 4a + 5a$$
$$= 15a$$

3. Bereken die waarde van a

a)

$$\sum_{k=1}^{3}\left(a \,.\, 2^{k-1}\right) = 28$$

Oplossing:

$$\sum_{k=1}^{3}\left(a \,.\, 2^{k-1}\right) = 28$$
$$\therefore a + 2a + 4a = 28$$
$$7a = 28$$
$$\therefore a = 4$$

b)

$$\sum_{j=1}^{4}\left(2^{-j}\right) = a$$

Oplossing:

$$\sum_{j=1}^{4}\left(2^{-j}\right) = a$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = a$$
$$\therefore \frac{15}{16} = a$$

4. Skryf die volgende in sigmanotasie:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + 3$$

Oplossing:

Meetkundige reeks met $a = \frac{1}{9}$, konstante verhouding $r = 3$ en algemene formule $T_n = ar^{n-1}$.

$$T_n = ar^{n-1}$$
$$= \frac{1}{9}(3)^{n-1}$$
$$= 3^{-2} \,.\, 3^{n-1}$$
$$= 3^{n-3}$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{4}\left(3^{n-3}\right)$$

5. Skryf die som neer van die eerste 25 terme van die onderstaande reeks in sigmanotasie:

$$11 + 4 - 3 - 10 \ldots$$

Oplossing:

Rekenkundige reeks met $a = 11$, gemeenskakplike verskil $d = -7$ en algemene formule $T_n = a + (n-1)d$.

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)d \\ &= 11 + (n-1)(-7) \\ &= 11 - 7n + 7 \\ &= 18 - 7n \\ \therefore &\sum_{n=1}^{25} (18 - 7n) \end{aligned}$$

6. Skryf die som neer van die eerste 1000 natuurlike, onewe getalle in sigmanotasie.

Oplossing:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$$

Rekenkundige reeks met $a = 1$, gemeenskakplike verskil $d = 2$ en algemene formule $T_n = a + (n-1)d$.

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)d \\ &= 1 + (n-1)(2) \\ &= 1 + 2n - 2 \\ &= 2n - 1 \\ \therefore &\sum_{n=1}^{1000} (2n - 1) \\ \text{of } &\sum_{n=0}^{999} (2n + 1) \end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29MW 1b. 29MX 1c. 29MY 2a. 29MZ 2b. 29N2 2c. 29N3
3a. 29N4 3b. 29N5 4. 29N6 5. 29N7 6. 29N8

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

2.4 Eindige rekenkundige reeks

Algemene formule vir ’n eindige rekenkundige reeks

Oefening 2 – 8: Som van ’n rekenkundige reeks

1. Bepaal die waarde van k:

$$\sum_{n=1}^{k} (-2n) = -20$$

Oplossing:

$$(-2(1)) + (-2(2)) + (-2(3)) + \ldots + (-2(k)) = -20$$
$$-2 - 4 - 6 + \ldots - 2k = -20$$

Hierdie is 'n rekenkundige reeks met $a = -2$ en $d = -2$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\
-20 &= \frac{n}{2}[2(-2) + (n-1)(-2)] \\
-40 &= n[-4 + -2n + 2] \\
-40 &= n[-2n - 2] \\
-40 &= -2n^2 - 2n \\
2n^2 + 2n - 40 &= 0 \\
n^2 + n - 20 &= 0 \\
(n+5)(n-4) &= 0 \\
\therefore n = -5 &\text{ of } n = 4 \\
\therefore S_4 &= -20 \\
\therefore k &= 4
\end{aligned}$$

2. Die som van n terme van 'n rekenkundige reeks is $S_n = \frac{n}{2}(7n + 15)$.

   a) Hoeveel terme van die reeks moet bymekaargetel word om 'n som van 425 te gee?

      Oplossing:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}(7n + 15) \\
\therefore 425 &= \frac{n}{2}(7n + 15) \\
850 &= n(7n + 15) \\
&= 7n^2 + 15n \\
0 &= 7n^2 + 15n - 850 \\
&= (7n + 85)(n - 10) \\
\therefore n = -\frac{85}{7} &\text{ of } n = 10
\end{aligned}$$

      maar n moet 'n positiewe heelgetal wees, dus $n = 10$.

   b) Bepaal die sesde term van die reeks.

      Oplossing:

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}(7n+15) \\
S_1 &= T_1 = a \\
S_1 &= \frac{n}{2}(7n+15) \\
&= \frac{1}{2}(7(1)+15) \\
\therefore a &= 11 \\
S_2 &= \frac{2}{2}(7(2)+15) \\
&= 29 \\
\therefore T_1 + T_2 &= 29 \\
\therefore T_2 &= 29 - 11 \\
\text{En } d &= T_2 - T_1 \\
&= 18 - 11 \\
&= 7 \\
\therefore T_n &= a + (n-1)d \\
&= 11 + (n-1)(7) \\
&= 11 + 7n - 7 \\
&= 7n + 4 \\
\therefore T_6 &= 7(6) + 4 \\
&= 46
\end{aligned}
$$

3. a) Die gemene verskil van 'n rekenkundige reeks is 3. Bereken die waardes van n waarvoor die n^{de} term van die reeks 93 is en die som van die eerste n terme 975 is.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
d &= 3 \\
T_n &= a + (n-1)d \\
93 &= a + 3(n-1) \\
&= a + 3n - 3 \\
96 &= a + 3n \\
\therefore a &= 96 - 3n \\
S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\
\therefore 975 &= \frac{n}{2}[2(96-3n) + 3(n-1)] \\
1950 &= n[192 - 6n + 3n - 3] \\
1950 &= 189n - 3n^2 \\
0 &= -3n^2 + 189n - 1950 \\
0 &= n^2 - 63n + 650 \\
0 &= (n-13)(n-50) \\
\therefore n &= 13 \text{ of } n = 50
\end{aligned}
$$

b) Verduidelik waarom daar twee moontlike antwoorde is.

Oplossing:

Daar is twee reekse wat die gegewe parameters bevredig.

$$d = 3$$
$$a = 96 - 3n$$
$$\text{As } n = 13$$
$$a = 96 - 3(13)$$
$$= 57$$
$$\therefore 57 + 60 + 63 + \ldots + T_{13} = 975$$
$$\text{As } n = 50$$
$$a = 96 - 3(50)$$
$$= -54$$
$$\therefore (-54) + (-51) + (-48) + \ldots + T_{50} = 975$$

4. Die derde term van 'n rekenkundige ry is -7 en die sewende term is 9. Bepaal die som van die eerste 51 terme van die ry.

   Oplossing:

$$T_3 = -7 = a + 2d \ldots\ldots (1)$$
$$T_7 = 9 = a + 6d \ldots\ldots (2)$$
$$\therefore \text{Trek af: } (1) - (2) \quad -7 - (9) = a + 2d - (a + 6d)$$
$$-16 = -4d$$
$$\therefore 4 = d$$
$$\text{Stel terug in verg. } (1) \quad a = -7 - 2(4)$$
$$\therefore a = -15$$
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$S_{51} = \frac{51}{2}[2(-15) + (51-1)(4)]$$
$$= \frac{51}{2}[-30 + 200]$$
$$= (51)(85)$$
$$\therefore S_{51} = 4335$$

5. Bereken die som van die rekenkundige reeks $4 + 7 + 10 + \cdots + 901$.

   Oplossing:

$$a = 4$$
$$l = 901$$
$$d = T_2 - T_1$$
$$= 7 - 4$$
$$= 3$$
$$\text{En } T_n = a + (n-1)d$$
$$= 4 + (n-1)(3)$$
$$\therefore 901 = 4 + 3n - 3$$
$$900 = 3n$$
$$\therefore 300 = n$$
$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$
$$S_{300} = \frac{300}{2}[4 + 901]$$
$$= (150)(905)$$
$$\therefore S_{300} = 135750$$

6. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bereken die waarde van: $\dfrac{4 + 8 + 12 + \cdots + 100}{3 + 10 + 17 + \cdots + 101}$

Oplossing:

Beskou die teller: $4 + 8 + 12 + \ldots + 100$

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ l &= 100 \\ d &= T_2 - T_1 \\ &= 8 - 4 \\ &= 4 \\ \text{En } T_n &= a + (n-1)d \\ 100 &= 4 + (n-1)(4) \\ 100 &= 4n \\ \therefore 25 &= n \\ S_n &= \frac{n}{2}[a + l] \\ S_{25} &= \frac{25}{2}[4 + 100] \\ S_{25} &= (25)(52) \end{aligned}$$

Beskou die noemer: $3 + 10 + 17 + \ldots + 101$

$$\begin{aligned} a &= 3 \\ l &= 101 \\ d &= T_2 - T_1 \\ &= 10 - 3 \\ &= 7 \\ \text{En } T_n &= a + (n-1)d \\ 101 &= 3 + (n-1)(7) \\ 101 &= 3 + 7n - 7 \\ 105 &= 7n \\ \therefore 15 &= n \\ S_n &= \frac{n}{2}[a + l] \\ S_{15} &= \frac{15}{2}[3 + 101] \\ S_{15} &= (15)(52) \end{aligned}$$

Beskou nou die kwosiënt van die twee reekse:

$$\begin{aligned} \frac{S_{25}}{S_{15}} &= \frac{25 \times 52}{15 \times 52} \\ &= \frac{25}{15} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

7. Die tweede term van die rekenkundige reeks is -4 en die som van die eerste ses terme van die reeks is 21.

   a) Vind die eerste term en die gemene verskil.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= a + (n-1)d \\
T_2 &= a + d \\
-4 &= a + d \ldots\ldots (1) \\
S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\
S_6 &= \frac{6}{2}[2a + (6-1)d] \\
21 &= 3[2a + 5d] \\
\therefore 7 &= 2a + 5d \ldots\ldots (2) \\
\text{Verg. } (1) \times 2: \quad -8 &= 2a + 2d \\
\text{Verg. } (2) - 2(1): \quad 7 - (-8) &= (2a + 5d) - (2a + 2d) \\
15 &= 3d \\
\therefore 5 &= d \\
\text{En } a &= -4 - 5 \\
&= -9
\end{aligned}
$$

b) Bepaal vervolgens T_{100}.
[IEB, Nov 2004]

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= a + (n-1)d \\
T_{100} &= -9 + (100-1)(5) \\
&= -9 + 495 \\
&= 486
\end{aligned}
$$

8. Bepaal die waarde van die volgende:

a)

$$\sum_{w=0}^{8} (7w + 8)$$

Oplossing:
Rekenkundige reeks: $8 + 15 + 22 + \ldots + 64$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\
a &= 8 \\
d &= 15 - 8 = 7 \\
\therefore S_9 &= \frac{9}{2}[2(8) + (9-1)(7)] \\
&= \frac{9}{2}[16 + 56] \\
&= \frac{9}{2}[72] \\
&= (9)(36) \\
&= 324
\end{aligned}
$$

b)

$$\sum_{j=1}^{8} 7j + 8$$

Oplossing:
Rekenkundige reeks: $7 + 14 + 21 + \ldots + 56$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\
a &= 7 \\
d &= 14 - 7 = 7 \\
\therefore S_8 &= \frac{8}{2}[2(7) + (8-1)(7)] \\
&= 4[14 + 49] \\
&= 4(63) \\
&= 252 \\
\therefore S_8 + 8 &= 260
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Of } S_n &= \frac{n}{2}[a + l] \\
a &= 7 \\
l &= 56 \\
\therefore S_8 &= \frac{8}{2}[7 + 56] \\
&= 4(63) \\
&= 252 \\
\therefore S_8 + 8 &= 260
\end{aligned}
$$

9. Bepaal die waarde van n.

$$
\sum_{c=1}^{n} (2 - 3c) = -330
$$

Oplossing:

Reeks: $-1 - 4 - 7 \ldots + (2 - 3n)$

$$
\begin{aligned}
a &= -1 \\
d &= T_2 - T_1 = -4 - (-1) = -3 \\
d &= T_3 - T_2 = -7 - (-4) = -3 \\
&\therefore \text{dit is 'n rekenkundige reeks} \\
\therefore S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\
-330 &= \frac{n}{2}[2(-1) + (n-1)(-3)] \\
-660 &= n[-2 - 3n + 3] \\
-660 &= n - 3n^2 \\
\therefore 0 &= -3n^2 + n + 660 \\
0 &= 3n^2 - n - 660 \\
0 &= (3n + 44)(n - 15) \\
\therefore n &= -\frac{44}{3} \text{ of } n = 15
\end{aligned}
$$

maar n moet 'n positiewe heelgetal wees, dus $n = 15$.

Alternatiewe metode:

$$a = -1$$
$$l = 2 - 3n$$
$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[a + 1]$$
$$-330 = \frac{n}{2}[-1 + 2 - 3n]$$
$$-660 = n(1 - 3n)$$
$$-660 = n - 3n^2$$
$$\therefore 0 = -3n^2 + n + 660$$
$$0 = 3n^2 - n - 660$$
$$0 = (3n + 44)(n - 15)$$
$$\therefore n = -\frac{44}{3} \text{ of } n = 15$$

maar n moet 'n positiewe heelgetal wees, dus $n = 15$.

10. Die som van n terme van 'n rekenkundige reeks is $5n^2 - 11n$ vir alle waardes van n. Bepaal die gemene verskil.

Oplossing:

$$S_n = 5n^2 - 11n$$
$$\therefore S_1 = 5(1)^2 - 11(1)$$
$$= -6$$
$$\text{En } S_2 = 5(2)^2 - 11(2)$$
$$= 20 - 22$$
$$= -2$$
$$= T_1 + T_2$$
$$\therefore T_2 = S_2 - S_1$$
$$= -2 - (-6)$$
$$= 4$$
$$\therefore d = T_2 - T_1$$
$$= 4 - (-6)$$
$$= 10$$

11. Die som van 'n rekenkundige reeks is 100 maal die waarde van sy eerste term, terwyl die waarde van die laaste term 9 maal die waarde van die eerste term is. Bereken die aantal terme in die reeks as die eerste term nie gelyk is aan nul nie.

Oplossing:

$$S_n = 100a$$
$$l = 9a$$
$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$
$$100a = \frac{n}{2}[a + 9a]$$
$$100a = \frac{n}{2}[10a]$$
$$100a = 5a(n)$$
$$\frac{100a}{5a} = n$$
$$\therefore 20 = n$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29NB 2a. 29NC 2b. 29ND 3. 29NF 4. 29NG 5. 29NH
6. 29NJ 7. 29NK 8a. 29NM 8b. 29NN 9. 29NP 10. 29NQ
11. 29NR

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

2.5 Eindige meetkundige reeks

Algemene formule vir 'n eindige meetkundige reeks

Oefening 2 – 9: Som van 'n meetkundige reeks

1. Bewys dat $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ en noem enige beperkings.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \ldots (1) \\ r \times S_n &= ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \ldots (2) \\ &\text{Trek verg. } (1) \text{ van verg. } (2) \text{ af} \\ \therefore rS_n - S_n &= ar^n - a \\ S_n(r-1) &= a(r^n - 1) \\ \therefore S_n &= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \end{aligned}$$

   waar $r \neq 1$.

2. Gegee die meetkundige reeks $1; -3; 9; \ldots$ bepaal:

   a) Die agtste term van die reeks.
   Oplossing:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ r &= \frac{T_2}{T_1} = -3 \\ T_n &= ar^{n-1} \\ \therefore T_8 &= (1)(-3)^{8-1} \\ &= (1)(-3)^7 \\ &= -2187 \end{aligned}$$

   b) Die som van die eerste agt terme van die reeks.
   Oplossing:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ \therefore S_8 &= \frac{(1)(1-(-3)^8)}{1-(-3)} \\ &= \frac{1-6561}{4} \\ &= -\frac{6560}{4} \\ &= -1640 \end{aligned}$$

3. Bepaal:

$$\sum_{n=1}^{4} 3\ .\ 2^{n-1}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} S_4 &= 3 + 6 + 12 + 24 \\ &= 45 \end{aligned}$$

4. Vind die som van die eerste 11 terme van die meetkundige reeks $6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \cdots$

Oplossing:

$$\begin{aligned} a &= 6 \\ r &= \frac{1}{2} \\ S_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \\ S_{11} &= \frac{6(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11})}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= 12\left(1 - \frac{1}{2048}\right) \\ &= 12\left(\frac{2047}{2048}\right) \\ &= \frac{6141}{512} \end{aligned}$$

5. Toon aan dat die som van die eerste n terme van die meetkundige reeks $54 + 18 + 6 + \cdots + 5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ gegee word deur $\left(81 - 3^{4-n}\right)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} a &= 54 \\ r &= \frac{1}{3} \\ S_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \\ &= \frac{54(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{54(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n)}{\frac{2}{3}} \\ &= 81(1 - 3^{-n}) \\ &= 81 - 81\ .\ 3^{-n} \\ &= 81 - (3^4\ .\ 3^{-n}) \\ &= 81 - 3^{4-n} \end{aligned}$$

6. Die agste term van 'n meetkundige reeks is 640. Die derde term is 20. Vind die som van die eerste 7 terme.

Oplossing:

$$T_8 = 640 = ar^7$$
$$T_3 = 20 = ar^2$$
$$\therefore \frac{T_8}{T_3} = \frac{640}{20}$$
$$\frac{640}{20} = \frac{ar^7}{ar^2}$$
$$32 = r^5$$
$$\therefore 2 = r$$
$$\text{En } 20 = ar^2$$
$$20 = a(2)^2$$
$$\frac{20}{4} = a$$
$$\therefore 5 = a$$
$$r = 2$$
$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$
$$S_7 = \frac{5((2)^7 - 1)}{2 - 1}$$
$$= 5(128 - 1)$$
$$= 635$$

7. Gegee:

$$\sum_{t=1}^{n} 8\left(\frac{1}{2}\right)^t$$

a) Bepaal die eerste drie terme in die reeks.
Oplossing:

$$t = 1: \quad T_1 = 4$$
$$t = 2: \quad T_2 = 2$$
$$t = 3: \quad T_3 = 1$$
$$4;2;1$$

b) Bereken die aantal terme in die reeks as $S_n = 7\frac{63}{64}$.
Oplossing:

$$a = 4$$
$$r = \frac{1}{2}$$
$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$
$$\frac{511}{64} = \frac{4(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \frac{4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{511}{128} = 4 - (2^2 \,.\, 2^{-n})$$
$$2^{2-n} = 4 - \frac{511}{128}$$
$$2^{2-n} = \frac{1}{128}$$
$$2^{2-n} = 2^{-7}$$
$$2 - n = -7$$
$$\therefore 9 = n$$

8. Die verhouding tussen die som van die eerste drie terme van 'n meetkundige reeks en die som van die 4^{de}, 5^{de} en 6^{de} terme van dieselfde reeks is $8 : 27$. Bepaal die konstante verhouding en die eerste 2 terme as die derde term 8 is.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
T_1 + T_2 + T_3 &= a + ar + ar^2 \\
&= a(1 + r + r^2) \\
T_4 + T_5 + T_6 &= ar^3 + ar^4 + ar^5 \\
&= ar^3(1 + r + r^2) \\
\therefore \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_4 + T_5 + T_6} &= \frac{a(1 + r + r^2)}{ar^3(1 + r + r^2)} \\
\text{En} \quad \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_4 + T_5 + T_6} &= \frac{8}{27} \\
\therefore \frac{8}{27} &= \frac{a(1 + r + r^2)}{ar^3(1 + r + r^2)} \\
&= \frac{1}{r^3} \\
\therefore r^3 &= \frac{27}{8} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\
\therefore r &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{En } T_3 &= 8 \\
\therefore ar^2 &= 8 \\
a\left(\frac{3}{2}\right)^2 &= 8 \\
\therefore a &= 8 \times \frac{4}{9} \\
\therefore T_1 &= \frac{32}{9} \\
T_2 &= ar \\
&= \frac{32}{9} \times \frac{3}{2} \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29NT 2a. 29NV 2b. 29NW 3. 29NX 4. 29NY 5. 29NZ
6. 29P2 7a. 29P3 7b. 29P4 8. 29P5

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

2.6 Oneindige reeks

Oefening 2 – 10: Konvergente en divergente reekse

Vir elk van die algemene terme hieronder:

- Bepaal of dit 'n rekenkundige of meetkundige reeks vorm.
- Bereken S_1, S_2, S_{10} en S_{100}.
- Bepaal of die reeks konvergeer of divergeer.

1. $T_n = 2n$

   Oplossing:

   $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots$

$$\begin{aligned}
a &= 2 \\
d &= 2 \\
&\therefore \text{dit is 'n rekenkundige reeks} \\
S_1 &= 2 \\
S_2 &= 2 + 4 = 6 \\
S_n &= \frac{n}{2}(2a + [n-1]d) \\
S_{10} &= 5(2(2) + 9(2)) = 110 \\
S_{100} &= 50(2(2) + 99(2)) = 10100
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= 2 \\
S_n &= \frac{n}{2}(2(2) + [n-1]2) \\
&= \frac{n}{2}(2 + 2n) \\
&= n(1+n) \\
&= n + n^2 \\
\therefore S_n &\to \infty \text{ as } n \to \infty
\end{aligned}$$

   Dus, dit is 'n divergente reeks.

2. $T_n = (-n)$

   Oplossing:

   $(-1) + (-2) + (-3) + (-4) + \ldots$

$$\begin{aligned}
a &= -1 \\
d &= -1 \\
&\therefore \text{dit is 'n rekenkundige reeks} \\
S_1 &= -1 \\
S_2 &= -1 - 2 = -3 \\
S_n &= \frac{n}{2}(2a + [n-1]d) \\
S_{10} &= 5(2(-1) + 9(-1)) = -55 \\
S_{100} &= 50(2(-1) + 99(-1)) = -5050
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}(2(-1) + [n-1](-1)) \\
&= \frac{n}{2}(-2 - n + 1) \\
&= -\frac{n}{2}(n+1) \\
\therefore S_n &\to -\infty \text{ as } n \to \infty
\end{aligned}$$

   Dit is 'n divergente reeks.

3. $T_n = (\frac{2}{3})^n$

Oplossing:

$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \ldots$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2}{3} \\
r &= \frac{2}{3} \\
&\therefore \text{die is 'n meetkundige reeks (met } r < 1) \\
S_1 &= \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots \\
S_2 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9} = 1{,}111\ldots \\
S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\
S_{10} &= \frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)}{1-\frac{2}{3}} \\
&= 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right) \\
&= 1{,}965\ldots \\
S_{100} &= \frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right)}{1-\frac{2}{3}} \\
&= 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right) \\
&= 2{,}00\ldots \\
S_n &= \frac{\frac{2}{3}(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n})}{1-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)}{\frac{1}{3}} \\
&= 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right) \\
&= 2-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}
\end{aligned}$$

Dus, as $n \to \infty \;\; S_n \to 2$

Hierdie reeks is konvergent (aangesien die $r < 1$) en konvergeer na 2.

4. $T_n = 2^n$

Oplossing:

$2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$

$$a = 2$$
$$r = 2$$
$\therefore$ die is 'n meetkundige reeks (met r > 1)
$$S_1 = 2$$
$$S_2 = 2 + 4 = 6$$
$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$
$$S_{10} = \frac{2\left((2)^{10} - 1\right)}{2 - 1}$$
$$= 2\left((2)^{10} - 1\right)$$
$$= 2046$$
$$S_{100} = \frac{2\left((2)^{100} - 1\right)}{2 - 1}$$
$$= 2\left((2)^{100} - 1\right)$$
$$= 2{,}5 \times 10^{30}$$
$$S_n = \frac{2((2)^n - 1)}{2 - 1}$$
$$= (2)^{n+1} - 2$$
$\therefore S_n \to \infty$ as $n \to \infty$

Dit is 'n divergente reeks.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29P6 2. 29P7 3. 29P8 4. 29P9

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oneindige meetkundige reeks

Oefening 2 – 11:

1. Na watter waarde neig $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ as n neig na ∞?

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \ldots \\
\therefore a &= \frac{2}{5} \\
\text{En } r &= \frac{\frac{4}{25}}{\frac{2}{5}} \\
&= \frac{2}{5} \qquad (-1 < r < 1) \\
\text{Dus } S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\
&= \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} \\
&= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

2. Vind die som tot oneindig van die meetkundige reeks $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
a &= 3 \\
r &= \frac{1}{3} \\
S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\
&= \frac{3}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{3}{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

3. Bepaal vir watter waardes van x, sal die meetkundige reeks $2 + \frac{2}{3}(x+1) + \frac{2}{9}(x+1)^2 + \cdots$ konvergeer.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
a &= 2 \\
r &= \frac{\frac{2}{3}(x+1)}{2} \\
&= \frac{1}{3}(x+1)
\end{aligned}$$

   Vir die reeks om te konvergeer, $-1 < r < 1$, dus:

$$\begin{aligned}
-1 &< r < 1 \\
-1 &< \frac{1}{3}(x+1) < 1 \\
-3 &< (x+1) < 3 \\
-3-1 &< x < 3-1 \\
-4 &< x < 2
\end{aligned}$$

4. Die som tot oneindig van 'n meetkundige reeks met positiewe terme is $4\frac{1}{6}$ en die som van die eerste twee terme is $2\frac{2}{3}$. Vind a, die eerste term, en r, die konstante verhouding tussen opeenvolgende terme.

Oplossing:

$$T_1 + T_2 = \frac{8}{3}$$
$$\therefore a + ar = \frac{8}{3}$$
$$a(1+r) = \frac{8}{3}$$
$$\therefore a = \frac{8}{3(1+r)} \ldots\ldots (1)$$
$$S_\infty = 4\frac{1}{6} = \frac{25}{6}$$
$$\therefore \frac{a}{1-r} = \frac{25}{6}$$
$$6a = 25(1-r) \ldots\ldots (2)$$

Stel verg. $(1) \rightarrow (2)$:
$$6\left(\frac{8}{3(1+r)}\right) = 25(1-r)$$
$$16 = 25(1-r)(1+r)$$
$$16 = 25(1-r^2)$$
$$16 = 25 - 25r^2$$
$$25r^2 = 25 - 16$$
$$25r^2 = 9$$
$$r^2 = \frac{9}{25}$$
$$\therefore r = \pm\frac{3}{5}$$

Maar $T_n > 0$
$$\therefore r = \frac{3}{5}$$

En $a = \dfrac{8}{3(1+r)}$
$$= \frac{8}{3+3r}$$
$$= \frac{8}{3+3\left(\frac{3}{5}\right)}$$
$$= \frac{8}{\frac{15}{5}+\frac{9}{5}}$$
$$= \frac{8}{\frac{24}{5}}$$
$$\therefore a = \frac{5}{3}$$

5. Gebruik die som tot oneindig om te wys dat $0{,}\dot{9} = 1$.

Oplossing:

Herskryf die repeterende desimaal:

$$0{,}\dot{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + + \frac{9}{1000} + \ldots$$

Hierdie is 'n meetkundige reeks met $a = \frac{9}{10}$ en $r = \frac{1}{10}$.

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} \\ &= \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

6. 'n Struik wat 110 cm hoog is, word in 'n tuin geplant. Aan die einde van die eerste jaar, is die struik 120 cm hoog. Daarna groei die struik elke jaar met die helfte van sy groei in die vorige jaar. Toon aan dat die struik nooit hoër as 130 cm sal groei nie. Trek 'n grafiek van die verband tussen tyd en groei.

   [IEB, Nov 2003]

   Oplossing:

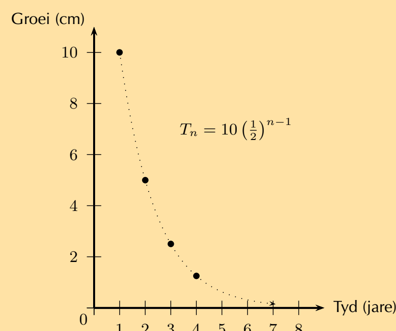
   Skryf die jaarlikse groei van die struik as 'n reeks:

$$10 + 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \ldots$$

   Hierdie is 'n meetkundige reeks met $a = 10$ en $r = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{10}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{10}{\frac{1}{2}} \\ &= 20 \end{aligned}$$

   Dus is die groei van die struik beperk tot 20 cm, en die maksimum hoogte van die struik is dus 110 cm +20 cm = 130 cm.



   Let op: ons mag die punte op die grafiek verbind omdat die groei kontinu is.

7. Vind p:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 27p^k = \sum_{t=1}^{12} (24 - 3t)$$

   Oplossing:

   Skryf die linkerkantste reek uit:

$$\sum_{t=1}^{12} (24 - 3t) = 21 + 18 + 15 + \ldots$$

   Hierdie is 'n rekenkundige reeks met $a = 21$ en $d = -3$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_{12} &= \frac{12}{2}[2(21) + (12-1)(3)] \\ &= 6[42 - 33] \\ &= 54 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{t=1}^{12}(24 - 3t) = 54$$

Skryf die linkerkantste reek uit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 27p^k = 27p + 27p^2 + 27p^3 + \ldots$$

Hierdie is 'n meetkundige reeks met $a = 27p$ en $r = p$ $(-1 < p < 1$ vir die reeks om te konvergeer).

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ \therefore 54 &= \frac{27p}{1-p} \\ 27p &= 54 - 54p \\ 81p &= 54 \\ \therefore p &= \frac{54}{81} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29PC 2. 29PD 3. 29PF 4. 29PG 5. 29PH 6. 29PJ
7. 29PK

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

2.7 Opsomming

Oefening 2 – 12: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Is $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ 'n voorbeeld van 'n *Eindige reeks* of 'n *Oneindige reeks*?

   Oplossing:

   Oneindige rekenkundige reeks

2. 'n Nuwe sokkerkompetisie vereis dat elk van die 8 spanne eenmaal teen elke ander span speel.

   a) Bereken die totale aantal wedstryde wat in die kompetisie gespeel sal word.
   Oplossing:

$$7 + 6 + 5 + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
a &= 7 \\
d &= -1 \\
S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\
S_7 &= \frac{7}{2}[2(7) + (6)(-1)] \\
&= \frac{7}{2}[8] \\
&= 28
\end{aligned}
$$

$S_7 = 28$

b) As elk van n spanne eenmaal teen elke ander span speel, bepaal 'n formule vir die totale aantal wedstryde in terme van n.

Oplossing:

$$
(n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1
$$

$$
\begin{aligned}
a &= n - 1 \\
d &= -1 \\
l &= 1 \\
S_n &= \frac{n}{2}[a + l] \\
S_{n-1} &= \frac{n-1}{2}[(n-1) + (1)] \\
&= \frac{n-1}{2}[n] \\
&= \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

3. Bereken:

$$
\sum_{k=2}^{6} 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}
$$

Oplossing:

Aantal terme = eind-indeks - begin-indeks $+1 = (6-2) + 1 = 5$

$$
\begin{aligned}
k = 2: \quad T_1 &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{27} \\
k = 3: \quad T_2 &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{81} \\
\therefore r &= \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{3} \\
a &= \frac{1}{27} \\
\therefore S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\
S_5 &= \frac{\frac{1}{27}(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5)}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{\frac{1}{27}\left(\frac{242}{243}\right)}{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{242}{6561} \times \frac{3}{2} \\
&= \frac{121}{2187}
\end{aligned}
$$

4. Die eerste drie terme van 'n konvergerende meetkundige reeks is: $x+1; x-1; 2x-5$.

   a) Bereken die waarde van x, ($x \neq 1$ of 1).

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \\
\frac{x-1}{x+1} &= \frac{2x-5}{x-1} \\
\therefore (x-1)^2 &= (2x-5)(x+1) \\
x^2-2x+1 &= 2x^2-3x-5 \\
x^2-x-6 &= 0 \\
(x-3)(x+2) &= 0 \\
\therefore x &= 3 \text{ of } x = -2 \\
\text{As } x &= -2 \\
\text{Meetkundige ry: } &-1; -3; -9 \\
\therefore r &= 3 \\
&\therefore \text{ sal divergeer} \\
\text{As } x &= 3 \\
\text{Meetkundige ry: } &4; 2; 1 \\
\therefore r &= \frac{1}{2} \\
&\therefore \text{ sal konvergeer} \\
\therefore x &= 3
\end{aligned}
$$

   b) Som tot oneindig van die reeks.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
4;\ 2;\ 1;\ldots& \\
S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\
&= \frac{4}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4}{\frac{1}{2}} \\
&= 8
\end{aligned}
$$

5. Skryf die som van die eerste twintig terme van die volgende reeks neer in $\sum$ notasie

$$6+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\cdots$$

   Oplossing:

   Hierdie is 'n meetkundige reeks:

$$
\begin{aligned}
a &= 6 \\
r &= \frac{1}{2} \\
T_n &= ar^{n-1} \\
&= 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
\therefore &\sum_{n=1}^{20} 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

6. Bepaal:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$$

Oplossing:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$$

$$\begin{aligned} &\therefore \text{dit is 'n meetkundige ry} \\ r &= \frac{1}{5} \\ &\therefore \text{reeks konvergeer} \\ a &= 12 \\ S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{12}{1-\frac{1}{5}} \\ &= \frac{12}{\frac{4}{5}} \\ &= 15 \end{aligned}$$

7. 'n Man is beseer in 'n ongeluk by die werk. Hy kry 'n ongeskiktheidstoelaag van R 4800 in die eerste jaar. Hierdie toelaag neem toe met 'n vaste bedrag elke jaar.

   a) Wat is die jaarlikse toename as hy in totaal R 143 500 oor 20 jaar ontvang?
   Oplossing:

   $$4800 + (4800 + d) + (4800 + 2d) + \ldots$$

   Dit is 'n rekenkundige reeks.

   $$\begin{aligned} a &= 4800 \\ S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_{20} &= \frac{20}{2}[2(4800) + (20-1)d] \\ \text{En } S_{20} &= 143\ 500 \\ \therefore 143\ 500 &= 10[9600 + 19d] \\ 14\ 350 &= 9600 + 19d \\ 4750 &= 19d \\ \therefore 250 &= d \end{aligned}$$

   b) Sy aanvanklike jaarlikse uitgawes is R 2600, en dit neem toe teen 'n tempo van R 400 per jaar. Na hoeveel jaar sal sy uitgawes sy inkomste oorskrei?
   Oplossing:

   $$2600 + 3000 + 3400 + \ldots$$

   Dit is 'n rekenkundige reeks.

   $$\begin{aligned} a &= 2600 \\ d &= 400 \\ S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_{\text{uitgawes}} &= \frac{n}{2}[2(2600) + (n-1)(400)] \\ S_e &= \frac{n}{2}[5200 + 400n - 400] \\ &= \frac{n}{2}[4800 + 400n] \end{aligned}$$

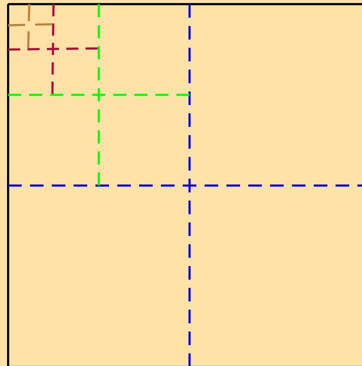
$$\begin{aligned}
S_{\text{inkomste}} &= \frac{n}{2}[2(4800) + (n-1)(250)] \\
S_i &= \frac{n}{2}[2(4800) + (n-1)(250)] \\
&= \frac{n}{2}[9600 + 250n - 250] \\
&= \frac{n}{2}[9350 + 250n]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{laat } S_e &= S_i \\
\frac{n}{2}[4800 + 400n] &= \frac{n}{2}[9350 + 250n] \\
4800 + 400n &= 9350 + 250n \\
150n &= 4550 \\
\therefore n &= \frac{4550}{150} \\
&= 30{,}333\ldots
\end{aligned}$$

Dus, sy uitgawes sal sy inkomste oorskrei na 30 jaar.

8. Die sylengte van 'n vierkant is 4 eenhede. Hierdie vierkant word in 4 gelyke kleiner vierkante verdeel. Een van hierdie kleiner vierkante word verder in nog vier gelyke vierkante verdeel. Een van hierdie selfs kleiner vierkante word ook in vier kleiner gelyke vierkante verdeel. Hierdie proses word 'n onbeperkte aantal kere herhaal. Bereken die som van die oppervlaktes van al die vierkante.

   Oplossing:

   $$\begin{aligned}
   \text{Na eerste verdeling van vierkant: Oppervlakte } &= 2 \times 2 = 4 \\
   \text{Na tweede verdeling van vierkant: Oppervlakte } &= 1 \times 1 = 1 \\
   \text{Na derde verdeling van vierkant: Oppervlakte } &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}
   \end{aligned}$$

   Dit gee die meetkundige reeks:

   $$4 + 1 + \frac{1}{4} + \ldots$$

   $$\begin{aligned}
   a &= 4 \\
   r &= \frac{1}{4} \\
   S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\
   &= \frac{4}{1-\frac{1}{4}} \\
   &= \frac{4}{\frac{3}{4}} \\
   &= \frac{16}{3}
   \end{aligned}$$

9. Thembi werk deeltyds om 'n Wiskundeboek te koop wat R $29{,}50$ kos. Op 1 Februarie spaar sy R $1{,}60$, en elke dag spaar sy 30 sent meer as wat sy die vorige dag gespaar het. So, op die tweede dag spaar sy R $1{,}90$, ensovoorts. Na hoeveel dae sal sy genoeg geld gespaar het om die boek te koop?

Oplossing:

$$1{,}60 + 1{,}90 + 2{,}10 + \ldots$$

Dit is 'n rekenkundige reeks.

$$\begin{aligned} a &= 1{,}60 \\ d &= 0{,}3 \\ S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ \therefore 29{,}50 &= \frac{n}{2}[2(1{,}60) + (n-1)(0{,}3)] \\ 59 &= n[3{,}2 + 0{,}3n - 0{,}3] \\ 59 &= 2{,}9n + 0{,}3n^2 \\ (\times 10:) \quad 590 &= 29n + 3n^2 \\ 0 &= 3n^2 + 29n - 590 \\ 0 &= (3n+59)(n-10) \\ \therefore n &= -\frac{59}{3} \text{ of } n = 10 \\ \therefore n &= 10 \end{aligned}$$

aangesien n 'n positiewe heelgetal moet wees.

10. 'n Plant bereik 'n hoogte van 118 mm na een jaar, onder ideale omstandighede in 'n kweekhuis. Gedurende die volgende jaar, vermeerder die hoogte met 12 mm. In elke opeenvolgende jaar, neem die hoogte toe met $\frac{5}{8}$ van die vorige jaar se groei. Toon aan dat die plant nooit 'n hoogte van meer as 150 mm sal bereik nie.

Oplossing:

$$12 + 12\left(\frac{5}{8}\right) + 12\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \ldots 12\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

Dis is 'n meetkundige reeks.

$$\begin{aligned} a &= 12 \\ r &= \frac{5}{8} \\ S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{12}{1-\frac{5}{8}} \\ &= \frac{12}{\frac{3}{8}} \\ &= 32 \end{aligned}$$

Dus die hoogte van die plant is beperk tot 118 mm $+$ 32 mm $=$ 150 mm

11. Bereken die waarde van n as:

$$\sum_{a=1}^{n}(20-4a) = -20$$

Oplossing:

$$16 + 12 + 8 + \ldots$$

Dit is 'n rekenkundige reeks.

$$\begin{aligned}
a &= 16 \\
d &= -4 \\
S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\
-20 &= \frac{n}{2}[2(16) + (n-1)(-4)] \\
-40 &= n[32 - 4n + 4] \\
-40 &= 36n - 4n^2 \\
0 &= -4n^2 + 36n + 40 \\
&= n^2 - 9n - 10 \\
&= (n+1)(n-10) \\
&= (n+1)(n-10) \\
\therefore n &= -1 \text{ of } n = 10 \\
\therefore n &= 10
\end{aligned}$$

aangesien n 'n positiewe heelgetal moet wees.

12. Michael spaar R 400 gedurende die eerste maand van sy werksloopbaan. In elke opeenvolgende maand spaar hy 10% meer as wat hy in die vorige maand gespaar het.

    a) Hoeveel het hy gespaar in die sewende maand wat hy gewerk het?
    Oplossing:

    $$400 + 400(1{,}1) + 400(1{,}1)^2 + \ldots$$

    Dis is 'n meetkundige reeks.

    $$\begin{aligned}
    a &= 400 \\
    r &= 1{,}1 \\
    T_n &= ar^{n-1} \\
    \therefore T_7 &= 400(1{,}1)^6 \\
    &= 708{,}62
    \end{aligned}$$

    Dus het hy R $708{,}62$ gespaar in die sewende maand.

    b) Hoeveel het hy altesaam gespaar in sy eerste 12 werkende maande?
    Oplossing:

    $$\begin{aligned}
    S_{12} &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\
    &= \frac{400(1-(1{,}1)^{12})}{1-1{,}1} \\
    &= 8553{,}71
    \end{aligned}$$

    Dus het hy R $8553{,}71$ gespaar in die eerste 12 maande.

13. Kaapstad Hoërskool wil 'n skoolsaal bou en hulle is besig met fondsinsameling. Mnr. Manuel, 'n oudleerder van die skool en 'n suksesvolle politikus, bied aan om geld te skenk vir die skool. Omdat hy Wiskunde op skool geniet het, besluit hy om 'n bedrag geld te skenk op die volgende basis. Hy stel 'n wiskunde vasvra op met 20 vrae. Vir die korrekte antwoord op die eerste vraag (enige leerder mag antwoord), kry die skool R 1, vir 'n korrekte antwoord op die tweede vraag, kry die skool R 2, ensovoorts. Die donasies $1; 2; 4; \ldots$ vorm 'n meetkundige reeks. Bereken, tot die naaste Rand:

a) Die bedrag geld wat die skool sal ontvang vir die korrekte antwoord op die 20^{th} vraag.

Oplossing:

$$1 + 2 + 4 + \ldots$$

Dis is 'n meetkundige reeks.

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ r &= 2 \\ T_n &= ar^{n-1} \\ \therefore T_{20} &= (1)\left(2^{19}\right) \\ &= 524\ 288 \end{aligned}$$

Hulle ontvang R $524\ 288$ vir vraag 20.

b) Die totale bedrag geld wat die skool sal ontvang as al die 20 vrae korrek beantwoord word.

Oplossing:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{(1)[2^{20} - 1]}{2 - 1} \\ &= 1\ 048\ 575 \end{aligned}$$

Hulle ontvang R $1\ 048\ 575$!

14. Die eerste term van 'n meetkundige reeks is 9, en die verhouding van die som van die eerste agt terme tot die som van die eerste vier terme is $97 : 81$. Vind die eerste drie terme van die reeks, as dit gegee word dat al die terme positief is.

Oplossing:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \\ a &= 9 \\ \frac{S_8}{S_4} &= \frac{97}{81} \\ &= \frac{\frac{9(1-r^8)}{1-r}}{\frac{9(1-r^4)}{1-r}} \\ &= \frac{1 - r^8}{1 - r^4} \\ \therefore \frac{97}{81} &= \frac{1 - r^8}{1 - r^4} \\ \frac{97}{81} &= \frac{(1 - r^4)(1 + r^4)}{1 - r^4} \\ \frac{97}{81} &= 1 + r^4 \\ \frac{16}{81} &= r^4 \\ \therefore r &= \pm\frac{2}{3} \\ \text{Maar terme is positief } \therefore r &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$9; 6; 4; \ldots$$

15. Gegee die meetkundige reeks: $6 + p; 10 + p; 15 + p$

a) Bepaal p, ($p \neq -6$ of -10).

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{10+p}{6+p} &= \frac{15+p}{10+p} \\ \therefore (10+p)(10+p) &= (15+p)(6+p) \\ 100+20p+p^2 &= 90+21p+p^2 \\ \therefore p &= 10 \end{aligned}$$

b) Toon aan dat die konstante verhouding $\frac{5}{4}$ is.

Oplossing:

$$\begin{aligned} r &= \frac{10+p}{6+p} \\ &= \frac{20}{16} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

c) Bepaal die tiende term van die reeks korrek tot een desimale plek.

Oplossing:

$$\begin{aligned} T_n &= ar^{n-1} \\ T_{10} &= (16)\left(\frac{5}{4}\right)^9 \\ &= 119{,}2 \end{aligned}$$

$T_{10} = 119{,}2$

16. Die tweede en vierde terme van 'n konvergerende meetkundige reeks is 36 en 16, onderskeidelik. Vind die som tot oneindig van hierdie reeks, as al die terme positief is.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{T_4}{T_2} &= \frac{ar^3}{ar} \\ &= \frac{16}{36} \\ \therefore r^2 &= \frac{16}{36} \\ r &= \pm\frac{2}{3} \\ \text{Maar terme is positief, } r &= \frac{2}{3} \\ T_2 &= ar \\ &= 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\left(\frac{2}{3}\right) &= 36 \\ \therefore a &= 54 \\ S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{54}{1-\frac{2}{3}} \\ &= 162 \end{aligned}$$

17. Evalueer:

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{k\left(k+1\right)}{2}$$

Oplossing:

$$\frac{2(2+1)}{2} + \frac{3(3+1)}{2} + \frac{4(4+1)}{2} + \frac{5(5+1)}{2}$$

$$3 + 6 + 10 + 15 = 34$$

18. $S_n = 4n^2 + 1$ verteenwoordig die som van die eerste n terme van 'n spesifieke reeks. Vind die tweede term.

Oplossing:

$$\begin{aligned} S_n &= 4n^2 + 1 \\ S_1 &= 4(1)^2 + 1 = 5 \\ S_2 &= 4(2)^2 + 1 = 17 \\ T_2 &= S_2 - S_1 \\ &= 17 - 5 \\ &= 12 \end{aligned}$$

19. Bepaal of die volgende reeks konvergeer vir die gegewe waardes van x. As dit konvergeer, bereken die som tot oneindig.

$$\sum_{p=1}^{\infty} (x+2)^p$$

a) $x = -\frac{5}{2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{5}{2} \\ \sum_{p=1}^{\infty} (x+2)^p &= \sum_{p=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{2} + 2\right)^p \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^p \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \ldots$$

Dit is 'n meetkundige reeks.

$$\begin{aligned} r &= -\frac{1}{2} \\ &\therefore \text{ reeks konvergeer omdat} \\ -1 &< r < 1 \\ S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) $x = -5$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x &= -5 \\
\sum_{p=1}^{\infty}(x+2)^p &= \sum_{p=1}^{\infty}(-5+2)^p \\
&= \sum_{p=1}^{\infty}(-3)^p \\
-3; 9; -27; \ldots
\end{aligned}
$$

Dit is 'n meetkundige reeks.

$$
\begin{aligned}
& r = -3 \\
& \therefore \text{ reeks konvergeer nie omdat } r < -1
\end{aligned}
$$

20. Bereken:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 5\left(4^{-i}\right)$$

Oplossing:

$$\frac{5}{4}; \frac{5}{4^2}; \frac{5}{4^3}; \ldots \frac{5}{4^n}$$

Dit is 'n meetkundige reeks.

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{1}{4} \\
a &= \frac{5}{4} \\
S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\
&= \frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

21. Die som van die eerste p terme van 'n reeks is $p\,(p+1)$. Vind die tiende term.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
p = 10: \quad S_{10} &= 10(10+1) = 110 \\
p = 9: \quad S_9 &= 9(9+1) = 90 \\
\text{En } T_{10} &= S_{10} - S_9 \\
\therefore T_{10} &= 110 - 90 \\
&= 20
\end{aligned}
$$

Alternatiewe metode:

$$
\begin{aligned}
p = 1: \quad S_1 &= a = 1(1+1) = 2 \\
p = 2: \quad S_2 &= 2(2+1) = 6 \\
\text{En } S_2 &= T_1 + T_2 = 6 \\
\therefore T_2 &= 6 - 2 = 4 \\
S_3 &= T_1 + T_2 + T_3 = 3 \times 4 = 12 \\
\therefore T_3 &= 12 - 6 = 6
\end{aligned}
$$

$$2; 4; 6; \ldots$$

Dit is 'n rekenkundige reeks.

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ d &= 2 \\ T_n &= a + (n-1)d \\ T_{10} &= 2 + (10-1)(2) \\ &= 20 \end{aligned}$$

22. Die magte van 2 word verwyder uit die versameling positiewe heelgetalle $1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots; 1998; 1999; 2000$
Vind die som van die oorblywende heelgetalle.

Oplossing:

$$1; 2^1; 3; 2^2; 5; 6; \ldots 2000$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[a + l] \\ S_{2000} &= \frac{2000}{2}[1 + 2000] \\ &= 1000(2001) \\ &= 2001000 \end{aligned}$$

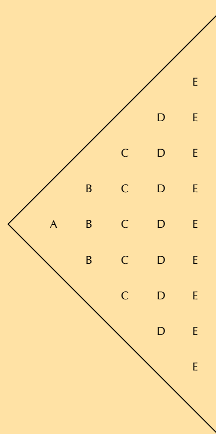
Verwyder die magte van 2 om 'n aparte reeks te vorm:

$$2^0; 2^1; 2^2; \ldots 2^{10}$$

Dis is 'n meetkundige reeks.

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ r &= 2 \\ S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \\ S_{11} &= \frac{1(2^{11} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2047 \\ \therefore S_{2000} - S_{11} &= 2001000 - 2047 \\ &= 1998953 \end{aligned}$$

23. Beskou die patroon hieronder:



a) As die patroon voortgesit word, vind die aantal letters in die kolom wat die M's bevat.

Oplossing:

$$1; 3; 5; 7; \ldots$$

Dit is 'n rekenkundige reeks.

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ d &= 2 \\ T_n &= a + (n-1)d \\ \text{Vir die letter M:} \quad n &= 13: \\ T_{13} &= 1 + (12)(2) \\ &= 25 \end{aligned}$$

b) As die totale aantal letters in die patroon 361 is, watter letter sal in die laaste kolom wees?

Oplossing:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ 361 &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)(2)] \\ 361 &= n[1 + n - 1] \\ 361 &= n^2 \\ \therefore n &= \pm 19 \\ \therefore n &= 19 \end{aligned}$$

dus die letter "s"sal in die laaste kolom wees.

24. Skryf $0{,}5\dot{7}$ as 'n gewone breuk.

Oplossing:

Herskryf die repeterende desimaal:

$$\begin{aligned} 0{,}5\dot{7} &= 0{,}5 + 0{,}0\dot{7} \\ 0{,}5\dot{7} &= 0{,}5 + [0{,}07 + 0{,}007 + \ldots] \end{aligned}$$

Die deel in vierkantige hakies is 'n meetkundige reeks met $a = \frac{7}{100}$ en $r = \frac{1}{10}$.

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{\frac{7}{100}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{\frac{7}{100}}{\frac{9}{10}} \\ &= \frac{7}{90} \\ \therefore 0{,}5\dot{7} &= 0{,}5 + 0{,}0\dot{7} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{7}{90} \\ &= \frac{52}{90} \\ &= \frac{26}{45} \end{aligned}$$

25. Gegee:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(1+x)^p}{1-x}$$

a) Vir watter waardes van x sal $f(x)$ konvergeer?
Oplossing:

$$\frac{(1+x)}{1-x} + \frac{(1+x)^2}{1-x} + \frac{(1+x)^3}{1-x} + \ldots$$

Dit is 'n meetkundige reeks met $a = \frac{(1+x)}{1-x}$ en $r = (1+x)$. Vir die reeks om te konvergeer:

$$\begin{aligned} -1 &< r < 1 \\ -1 &< 1+x < 1 \\ -2 &< x < 0 \end{aligned}$$

b) Bepaal die waarde van $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{\frac{1+x}{1-x}}{1-(1+x)} \\ &= \frac{1+x}{(1-x)(-x)} \\ \text{Stel in } x &= -\frac{1}{2} \\ f(-\frac{1}{2}) &= \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

26. Vanaf die definisie van 'n meetkundige reeks, lei 'n formule af vir die berekening van die som van n terme van die reeks

$$a^2 + a^4 + a^6 + \cdots$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} r &= a^2 \\ T_n &= a^{2n} \\ \therefore S_n &= a^2 + a^4 + a^6 + \ldots + a^{2n-2} + a^{2n} \ldots\ldots (1) \\ r \times S_n = a^2 S_n &= \qquad a^4 + a^6 + \ldots + a^{2n} + a^{2n+2} \ldots\ldots (2) \\ (1)-(2): \quad S_n - a^2 S_n &= a^2 - a^{2n+2} \\ S_n(1-a^2) &= a^2 - a^2 \ . \ a^{2n} \\ \therefore S_n &= \frac{a^2(1-a^{2n})}{(1-a^2)} \end{aligned}$$

27. Bereken die tiende term van die reeks as, $S_n = 2n + 3n^2$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} p = 10: \quad S_{10} &= 2(10) + 3(10)^2 \\ &= 20 + 300 = 320 \\ p = 9: \quad S_9 &= 2(9) + 3(9)^2 \\ &= 18 + 243 = 261 \\ \text{En } T_{10} &= S_{10} - S_9 \\ \therefore T_{10} &= 320 - 261 \\ &= 59 \end{aligned}$$

Alternatiewe metode:

$$\begin{aligned}
S_1 &= T_1 = 5\\
S_2 &= T_1 + T_2 = 16\\
\therefore T_2 &= 16 - 5\\
&= 11\\
S_3 &= 2(3) + 3(3)^2 = 33\\
\therefore 33 &= T_3 + S_2\\
\therefore T_3 &= 17\\
S_n &= 5 + 11 + 17 + \ldots\\
d &= 11 - 5 = 6\\
d &= 17 - 11 = 6\\
&\therefore \text{dit is 'n rekenkundige reeks}\\
T_{10} &= a + (n-1)d\\
&= 5 + (9)(6)\\
&= 59
\end{aligned}$$

28. 'n Teater word vol teen 'n tempo van 4 mense in die eerste minuut, 6 mense in die tweede minuut, en 8 mense in die derde minuut ensovoorts. Na 6 minute is die teater half vol. Na hoeveel minute sal die teater vol wees?

[IEB, Nov 2001]

Oplossing:

$$4 + 6 + 8 + \ldots$$

$$\begin{aligned}
d &= T_2 - T_1\\
&= 6 - 4\\
&= 2\\
d &= T_3 - T_2\\
&= 8 - 6\\
&= 2\\
&\therefore \text{dit is 'n rekenkundige reeks}\\
S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]\\
S_6 &= \frac{6}{2}[2(4) + (5)(2)]\\
&= 3(18)\\
&= 54 \quad \text{(teater is halfvol)}\\
\therefore 2 \times 54 &= 108 \quad \text{(teater is vol)}\\
S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]\\
108 &= \frac{n}{2}[2(4) + (n-1)(2)]\\
216 &= n[8 + 2n - 2]\\
0 &= 2n^2 + 6n - 216\\
0 &= n^2 + 3n - 108\\
0 &= (n+12)(n-9)\\
\therefore n &= -12 \text{ of } n = 9\\
&n \text{ moet 'n positiewe heelgetal wees}\\
\therefore n &= 9
\end{aligned}$$

Dit neem 9 minute vir die teater om vol te word.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29PM	2a. 29PN	2b. 29PP	3. 29PQ	4a. 29PR	4b. 29PS
5. 29PT	6. 29PV	7a. 29PW	7b. 29PX	8. 29PY	9. 29PZ
10. 29Q2	11. 29Q3	12a. 29Q4	12b. 29Q5	13a. 29Q6	13b. 29Q7
14. 29Q8	15a. 29Q9	15b. 29QB	15c. 29QC	16. 29QD	17. 29QF
18. 29QG	19a. 29QH	19b. 29QJ	20. 29QK	21. 29QM	22. 29QN
23a. 29QP	23b. 29QQ	24. 29QR	25. 29QS	26. 29QT	27. 29QV
28. 29QW					

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 3

Funksies

- Leerders moet aangemoedig word om seker te maak of die inverse 'n funsie is of nie.
- Dit is baie belangrik dat leerders sal verstaan dat die $f^{-1}(x)$ notasie slegs gebruik kan word as die inverse 'n funksie is.
- Leerders moenie die inverse funksie f^{-1} en die resiprook $\frac{1}{f(x)}$ met mekaar verwar nie.
- Moedig leerders aan om beperkings te noem, veral as dit kwadratiese funksies is.
- Leerders moet verstaan dat $y = \sqrt{-x}$ reële wortels het vir $x < 0$.
- Oefeninge oor paraboliese funksies met horisontale en vertikale verskuiwings is ingesluit vir verryking en is duidelik so gemerk.
- Die logaritmiese funksie word voorgestel as die inverse van die eksponensiële funksie. Leerders moet verstaan dat die logaritmiese funksie ons toelaat om die eksponensiële funksie oor te skryf met die eksponent as die onderwerp van die formule.
- Dit is baie belangrik dat leerders moet kan verander van eksponensiële vorm na logaritmiese vorm en omgekeerd. Die vaardigheid is ook belangrik om die periode van 'n belegging of lening in Finansiële Wiskunde te bepaal.
- Leerders moet aangemoedig word om die definisie en die verandering van die grondtal te gebruik om probleme op te los. Manipulasie met die logaritmiese wette word nie gevra in die eksamen nie.
- Leerders moet aangemoedig word om die LOG funksie op hul sakrekenaars te leer gebruik en dan ook die sakrekenaar te gebruik om hul antwoorde te toets.
- Inhoud vir verryking is nie eksamineerbaar nie en word duidelik so gemerk.

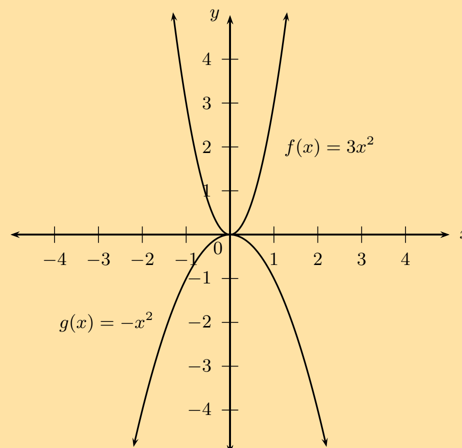
3.1 Hersiening

Oefening 3 – 1: Hersiening

1. Skets die grafieke op dieselfde assestelsel en bepaal die volgende vir elke funksie:
   - Afsnitte
   - Draaipunt
   - Simmetrie-as
   - Gebied en terrein
   - Maksimum en minimum waardes

   a) $f(x) = 3x^2$ en $g(x) = -x^2$

   Oplossing:



Vir $f(x)$:

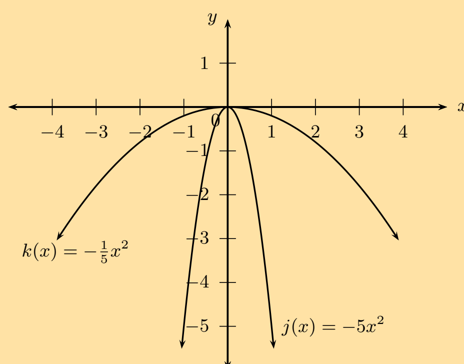
Afsnit: $(0;0)$
Draaipunt: $(0;0)$
Asse van simmetrie: $x = 0$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$
Minimum waarde: $y = 0$

Vir $g(x)$:

Afsnit: $(0;0)$
Draaipunt: $(0;0)$
Asse van simmetrie: $x = 0$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \leq 0, y \in \mathbb{R}\}$
Maksimum waarde: $y = 0$

b) $j(x) = -\frac{1}{5}x^2$ en $k(x) = -5x^2$

Oplossing:



Vir $j(x)$:

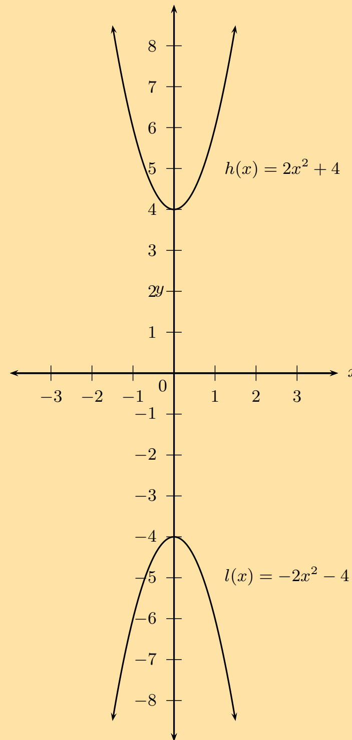
Afsnitte: $(0;0)$ $(0;0)$
Draaipunt: $(0;0)$
Asse van simmetrie: $x = 0$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \leq 0, y \in \mathbb{R}\}$
Maksimum waarde: $y = 0$

Vir $k(x)$:

Afsnitte: $(0;0)$ $(0;0)$
Draaipunt: $(0;0)$
Asse van simmetrie: $x = 0$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \leq 0, y \in \mathbb{R}\}$
Maksimum waarde: $y = 0$

c) $h(x) = 2x^2 + 4$ en $l(x) = -2x^2 - 4$

Oplossing:



Vir $h(x)$:

$$\begin{aligned}
\text{Afsnit: } & (0;4) \\
\text{Draaipunt: } & (0;4) \\
\text{Asse van simmetrie: } & x = 0 \\
\text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\
\text{Terrein: } & \{y : y \geq 4, y \in \mathbb{R}\} \\
\text{Minimum waarde: } & y = 4
\end{aligned}$$

Vir $l(x)$:

$$\begin{aligned}
\text{Afsnit: } & (0;-4) \\
\text{Draaipunt: } & (0;-4) \\
\text{Asse van simmetrie: } & x = 0 \\
\text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\
\text{Terrein: } & \{y : y \leq -4, y \in \mathbb{R}\} \\
\text{Maksimum waarde: } & y = -4
\end{aligned}$$

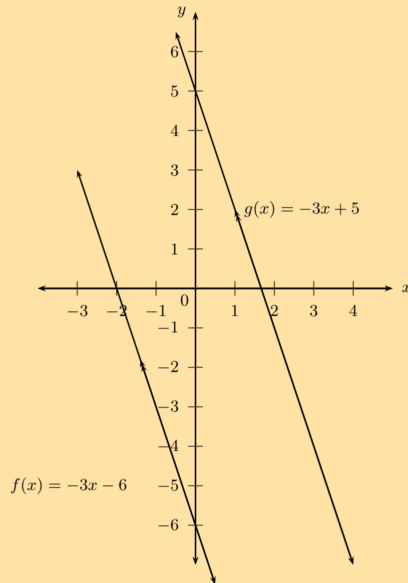
2. Gegee $f(x) = -3x - 6$ en $g(x) = mx + c$. Bepaal die waardes van m en c as $g \parallel f$ en g deur die punt $(1;2)$ gaan. Skets die grafieke van beide funksies op dieselfde assestelsel.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
g(x) &= mx + c \\
m &= -3 \\
g(x) &= -3x + c \\
\text{Vervang } (1;2) \quad 2 &= -3(1) + c \\
\therefore c &= 5 \\
\therefore g(x) &= -3x + 5
\end{aligned}$$

$$\text{Afsnitte vir } g: \quad (\frac{5}{3};0);(0;5)$$

$$\text{Afsnitte vir } f: \quad (-2;0);(0;-6)$$



3. Gegee $m : \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ en $n : -\frac{y}{3} = 1$. Bepaal die x- en y-afsnitte en skets beide grafieke op dieselfde assestelsel.

Oplossing:

Vir $m(x)$:

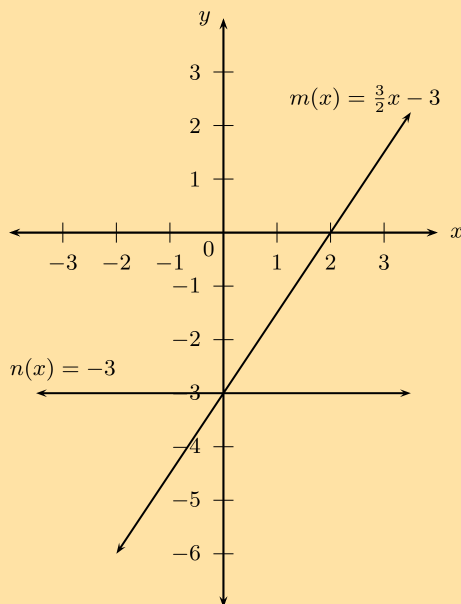
$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$$
$$\text{Laat } x = 0 : \quad -\frac{y}{3} = 1$$
$$y = -3$$
$$\text{Laat } y = 0 : \quad \frac{x}{2} = 1$$
$$x = 2$$
$$\text{Afsnitte: } (2; 0); (0; -3)$$

Vir $n(x)$:

$$-\frac{y}{3} = 1$$
$$\therefore y = -3$$
$$\text{Afsnitte: } (0; -3)$$

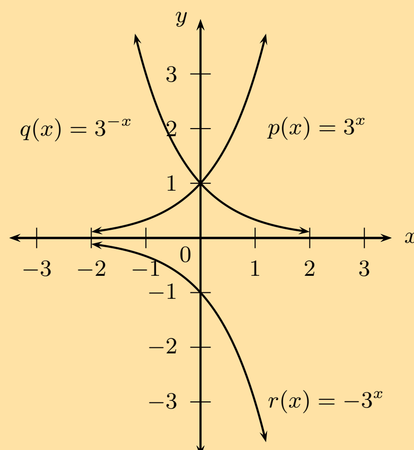
Skryf die lineêre funksie in standaardvorm:

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$$
$$\frac{3x}{2} - y = 3$$
$$\frac{3x}{2} - 3 = y$$
$$\therefore y = \frac{3x}{2} - 3$$



4. Gegee $p(x) = 3^x, q(x) = 3^{-x}$ en $r(x) = -3^x$.

   a) Skets p, q en r op dieselfde assestelsel.
   Oplossing:



   b) Bepaal die afsnitte, asimptote, gebied en terrein vir elk van die funksies.
   Oplossing:
   Vir $p(x)$:

$$\begin{aligned}\text{Afsnit: } & (0;1)\\ \text{Asimptote: } & y = 0\\ \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\}\\ \text{Terrein: } & \{y : y > 0\}\end{aligned}$$

   Vir $q(x)$:

$$\begin{aligned}\text{Afsnit: } & (0;1)\\ \text{Asimptote: } & y = 0\\ \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\}\\ \text{Terrein: } & \{y : y > 0\}\end{aligned}$$

   Vir $r(x)$:

Afsnit: $(0; -1)$
Asimptote: $y = 0$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y < 0\}$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

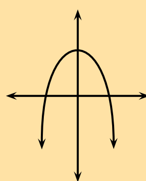
1a. 29QX 1b. 29QY 1c. 29QZ 2. 29R2 3. 29R3 4a. 29R4 4b. 29R5

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

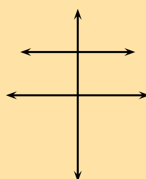
3.2 Funksies en relasies

Oefening 3 – 2: Herkenning van funksies

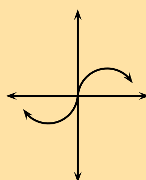
1. Beskou die grafieke hieronder en bepaal of hulle funksies is of nie:

a) 

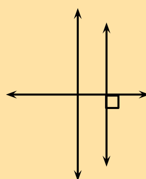
Oplossing:
Ja

b) 

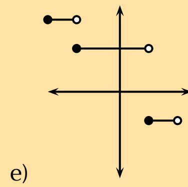
Oplossing:
Ja

c) 

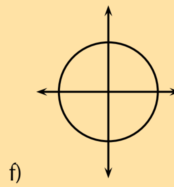
Oplossing:
Ja

d) 

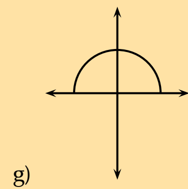
Oplossing:
Nee

e) 

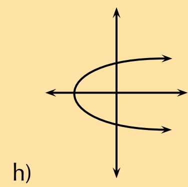
Oplossing:
Ja

f) 

Oplossing:
Nee

g) 

Oplossing:
Ja

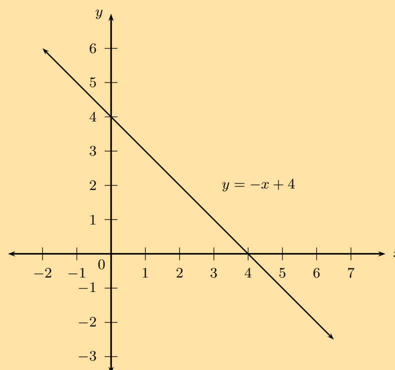
h) 

Oplossing:
Nee

2. Skets die volgende en bepaal of hulle funksies is of nie:

a) $x + y = 4$

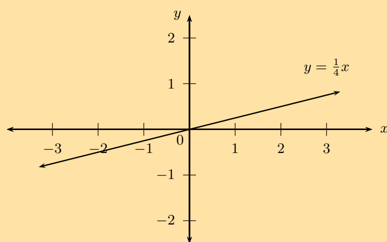
Oplossing:



Een-tot-een relasie: dus is dit 'n funsie.

b) $y = \frac{x}{4}$

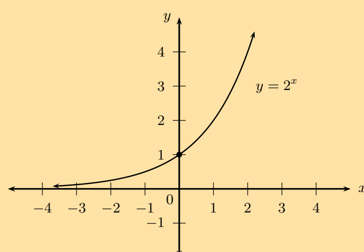
Oplossing:



Een-tot-een relasie: dus is dit 'n funsie.

c) $y = 2^x$

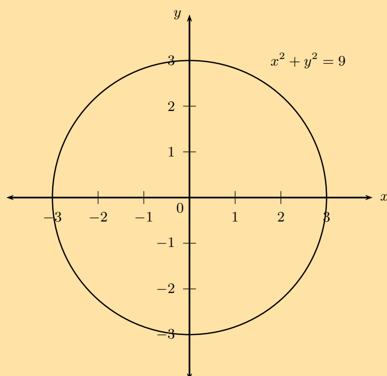
Oplossing:



Een-tot-een relasie: dus is dit 'n funsie.

d) $x^2 + y^2 = 9$

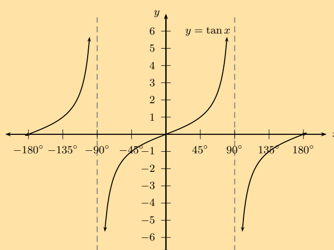
Oplossing:



een-tot-meer relasie: dus is dit nie 'n funksie nie.

e) $y = \tan x$

Oplossing:



Baie-tot-een relasie: dus is dit 'n funksie.

3. Die tabel hieronder gee die gemiddelde inkomste per kop, d, in 'n sekere streek van die land as 'n funksie van u, die persentasie werklose mense. Skryf 'n vergelyking neer wat toon dat die gemiddelde inkomste 'n funksie van die persentasie werklose mense is.

u	1	2	3	4
d	22 500	22 000	21 500	21 000

Oplossing:

Die inkomste per kop is 'n maatstaf van die gemiddelde inkomste wat 'n persoon in 'n sekere streek verdien.

Ons sien dat daar 'n konstante verskil van -500 tussen die opeenvolgende waardes van d is, dus is die relasie 'n lineêre funksie in die vorm $y = mx + c$:

u is die onafhanklike veranderlike en d is die afhanklike veranderlike.

$$d = mu + c$$
$$m = -500$$
$$d = -500u + c$$

Stel enige van die gegewe stel waardes in om vir c op te los:

$$22\ 500 = -500(1) + c$$
$$\therefore c = 23\ 000$$

Die funksie is: $d = -500u + 23\ 000$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29R6 1b. 29R7 1c. 29R8 1d. 29R9 1e. 29RB 1f. 29RC
1g. 29RD 1h. 29RF 2a. 29RG 2b. 29RH 2c. 29RJ 2d. 29RK
2e. 29RM 3. 29RN

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

3.3 Inverse funksies

3.4 Lineêre funksies

Inverse van die funksie $y = ax + q$

Oefening 3 – 3: Inverse van die funksie $y = ax + q$

1. Gegee $f(x) = 5x + 4$, bepaal $f^{-1}(x)$.

   Oplossing:

$$f(x) : y = 5x + 4$$
$$f^{-1}(x) : x = 5y + 4$$
$$\therefore x - 4 = 5y$$
$$y = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$$
$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$$

2. Beskou die relasie $f(x) = -3x - 7$.

   a) Is die relasie 'n funksie? Gee 'n rede vir jou antwoord.

Oplossing:
Ja dit is 'n funksie. Elke x-waarde word verbind met slegs een y-waarde, dit is dus 'n een-tot-een relasie.

b) Identifiseer die gebied en terrein.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Gebied } &\{x : x \in \mathbb{R}\}\\ \text{Terrein } &\{y : y \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

c) Bepaal $f^{-1}(x)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}f(x) &: y = -3x - 7\\ f^{-1}(x) &: x = -3y - 7\\ \therefore x + 7 &= -3y\\ y &= -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}\\ \therefore f^{-1}(x) &= -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}\end{aligned}$$

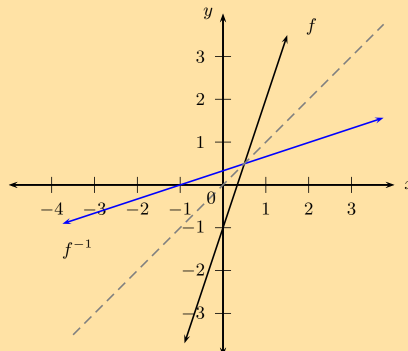
3. a) Skets die grafiek van die funksie $f(x) = 3x - 1$ en sy inverse op dieselfde assestelsel. Dui die afsnitte en simmetrie-as van die twee grafieke aan.

Oplossing:

$$\begin{aligned}y &= 3x - 1\\ x &= 3y - 1\\ \therefore 3y &= x + 1\\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Die afsnitte is:

$$\begin{aligned}f(x) &: x = 0, y = -1\\ &y = 0, x = \frac{1}{3}\\ f^{-1}(x) &: x = 0, y = \frac{1}{3}\\ &y = 0, x = -1\end{aligned}$$



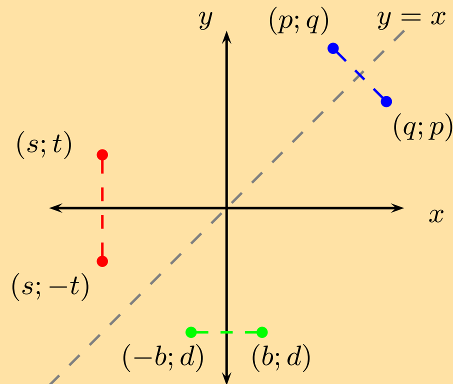
b) $T\left(\frac{4}{3}; 3\right)$ is 'n punt op f en R is 'n punt op f^{-1}. Bepaal die koördinate van R as R en T simmetries is.

Oplossing: $R\left(3; \frac{4}{3}\right)$

4. a) Verduidelik waarom die lyn $y = x$ 'n simmetrie-as is vir die funksie en sy inverse.

Oplossing:

Om 'n funksie te reflekteer om die y-as, vervang ons elke x met $-x$. Net so, om 'n funksie te reflekteer om x-as, vervang ons elke y met $-y$. Om 'n funksie te reflekteer om 'n lyn $y = x$, vervang ons x met y en y met x, wat eintlik is hoe ons 'n inverse bepaal.



b) Sal die lyn $y = -x$ 'n simmetrie-as vir die funksie en sy inverse wees?

Oplossing: Nee dit sal nie.

5. a) Gegee $f^{-1}(x) = -2x + 4$, bepaal $f(x)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) : y &= -2x + 4 \\ f(x) : x &= -2y + 4 \\ \therefore 2y &= -x + 4 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 2 \\ \therefore f(x) &= -\frac{1}{2}x + 2 \end{aligned}$$

b) Bereken die afsnitte van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$.

Oplossing:

Beskou $f(x)$:

$$\begin{aligned} \text{Laat } y &= -\frac{1}{2}x + 2 \\ \text{Laat } x = 0: \quad y &= -\frac{1}{2}(0) + 2 \\ y &= 2 \\ \therefore y &- \text{afsnit is } (0;2) \\ \\ \text{Laat } y = 0: \quad 0 &= -\frac{1}{2}x + 2 \\ -2 &= -\frac{1}{2}x \\ x &= 4 \\ \therefore x &- \text{afsnit is } (4;0) \end{aligned}$$

Beskou $f^{-1}(x)$:

$$\text{Laat } y = -2x + 4$$
$$\text{Laat } x = 0: \quad y = -2(0) + 4$$
$$y = 4$$
$$\therefore y - \text{afsnit is } (0;4)$$

$$\text{Laat } y = 0: \quad 0 = -2x + 4$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$
$$\therefore x - \text{afsnit is } (2;0)$$

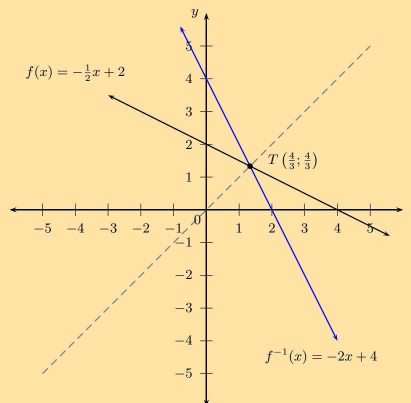
Daarom is die afsnitte van $f(x)$, $(4;0)$ en $(0;2)$ en die afsnitte van $f^{-1}(x)$ is $(2;0)$ en $(0;4)$.

c) Bereken die koördinate van T, die snypunt van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$.
Oplossing:
Om die snypunt te bepaal, laat ons $f(x) = f^{-1}(x)$:

$$-\frac{1}{2}x + 2 = -2x + 4$$
$$-\frac{1}{2}x + 2x = 4 - 2$$
$$\frac{3}{2}x = 2$$
$$\therefore x = \frac{4}{3}$$
$$\text{En } y = -2\left(\frac{4}{3}\right) + 4$$
$$= -\frac{8}{3} + 4$$
$$= \frac{4}{3}$$

Dit gee die punt $T\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

d) Skets die grafieke van f en f^{-1} op dieselfde assestelsel. Toon die afsnitte en die punt T op die grafiek aan.
Oplossing:



e) Is f^{-1} 'n stygende of dalende funksie?
Oplossing:
Dalende funksie. Die funksie se waardes neem af as x toeneem.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29RR 2a. 29RS 2b. 29RT 2c. 29RV 3. 29RW 4. 29RX
5. 29RY

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Inverse van die funksie $y = ax^2$

Oefening 3 – 4: Inverses - gebied, terrein, afsnitte, beperkings

1. Bepaal die inverse van elk van die volgende funksies:

a) $y = \frac{3}{4}x^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{4}x^2 \\ \text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x &= \frac{3}{4}y^2 \\ \frac{4}{3}x &= y^2 \\ \therefore y &= \pm\sqrt{\frac{4}{3}x} \qquad (x \geq 0) \end{aligned}$$

b) $4y - 8x^2 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad 4x - 8y^2 &= 0 \\ 4x &= 8y^2 \\ \frac{1}{2}x &= y^2 \\ \therefore y &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}x} \qquad (x \geq 0) \end{aligned}$$

c) $x^2 + 5y = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad y^2 + 5x &= 0 \\ y^2 &= -5x \\ \therefore y &= \pm\sqrt{-5x} \qquad (x \leq 0) \end{aligned}$$

d) $4y - 9 = (x + 3)(x - 3)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 4y - 9 &= x^2 - 9 \\ 4y &= x^2 \\ \text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad 4x &= y^2 \\ \therefore y &= \pm\sqrt{4x} \qquad (x \geq 0) \end{aligned}$$

2. Die funksie $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ vir $x \geq 0$ word gegee.

a) Bepaal die inverse van g

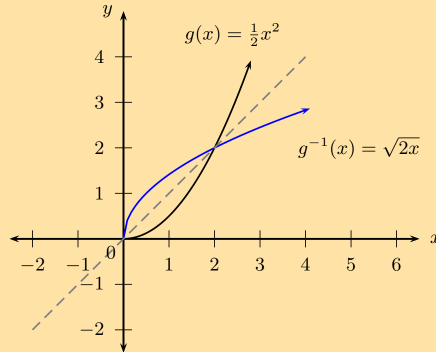
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } y &= \frac{1}{2}x^2 \qquad (x \geq 0) \\
\text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x &= \frac{1}{2}y^2 \qquad (y \geq 0) \\
2x &= y^2 \\
y &= \sqrt{2x} \qquad (x \geq 0, y \geq 0)
\end{aligned}$$

$$\therefore g^{-1}(x) = \sqrt{2x} \qquad (x \geq 0)$$

b) Skets g en g^{-1} op dieselfde assestelsel.

Oplossing:



c) Is g^{-1} 'n funksie? Verduidelik jou antwoord.

Oplossing:

Ja. Dit slaag die vertikale lyn toets en is 'n een-tot-een relasie.

d) Gee die definisieversameling en waardeversameling van g en g^{-1}.

Oplossing:

g :	definisieversameling $x \geq 0$	waardeversameling $y \geq 0$
g^{-1} :	definisieversameling $x \geq 0$	waardeversameling $y \geq 0$

e) Bepaal die koördinate van die snypunt(e) van die funksie en sy inverse.

Oplossing:

Om die snypunte te bepaal, stel ons $g(x)$ en $g^{-1}(x)$ gelyk aan mekaar:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^2 &= \sqrt{2x} \\
\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 &= \left(\sqrt{2x}\right)^2 \\
\frac{1}{4}x^4 &= 2x \\
x^4 &= 8x \\
x^4 - 8x &= 0 \\
x(x^3 - 8) &= 0 \\
x(x-2)(x^2 + 2x + 4) &= 0 \\
\therefore x = 0 \text{ of } x = 2 \text{ of } & x^2 + 2x + 4 = 0
\end{aligned}$$

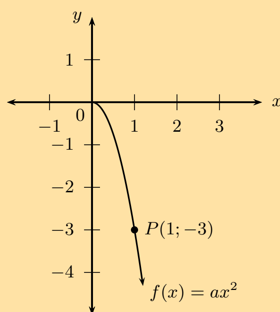
$$\begin{aligned}
\text{As } x &= 0 \\
y &= 0 \\
\text{As } x &= 2 \\
y &= \frac{1}{2}(2)^2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\text{As } x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Gebruik die kwadratiese formule: } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} \\ &= \text{geen reële oplossing} \end{aligned}$$

Dus kry ons die punte $(0; 0)$ of $(2; 2)$.

3. Die grafiek van die parabool $f(x) = ax^2$ word gegee met $x \geq 0$ en dit gaan deur die punt $P(1; -3)$.



a) Bepaal die vergelyking van die parabool.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Laat } y &= ax^2 \\ \text{Vervang } P(1; -3): \quad -3 &= a(1)^2 \\ \therefore a &= -3 \\ \therefore f(x) &= -3x^2 \quad (x \geq 0) \end{aligned}$$

b) Bepaal die gebied en terrein van f.

Oplossing:

f : gebied $\{x : x \geq 0\}$ terrein $\{y : y \leq 0\}$

c) Gee die koördinate van die punt op f^{-1} wat simmetries is met die punt P om die lyn $y = x$.

Oplossing: $(-3; 1)$

d) Bepaal die vergelyking van f^{-1}.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Laat } y &= -3x^2 \qquad (x \geq 0) \\ \text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x &= -3y^2 \qquad (y \geq 0) \\ -\frac{1}{3}x &= y^2 \\ y &= \sqrt{-\frac{1}{3}x} \qquad (x \leq 0, y \geq 0) \end{aligned}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{1}{3}x} \qquad (x \leq 0)$$

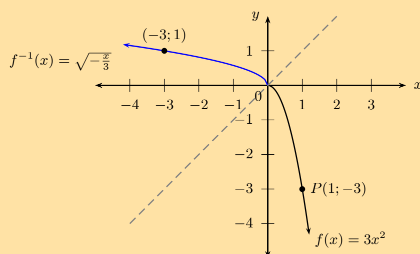
e) Bepaal die definisieversameling en waardeversameling van f^{-1}.

Oplossing:

f^{-1} : definisieversameling $\{x : x \leq 0\}$ waardeversameling $\{y : y \geq 0\}$

f) Skets die grafiek van f^{-1}.

Oplossing:



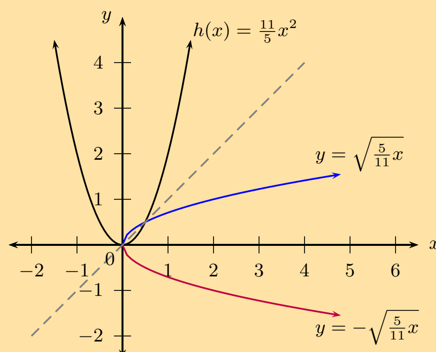
4. a) Bepaal die inverse van $h(x) = \frac{11}{5}x^2$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{Laat } y &= \frac{11}{5}x^2 \\
\text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om :} \quad x &= \frac{11}{5}y^2 \\
\frac{5}{11} &= y^2 \\
\therefore y &= \pm\sqrt{\frac{5}{11}x} \qquad (x \geq 0)
\end{aligned}
$$

b) Skets beide grafieke op dieselfde assestelsel:

Oplossing:

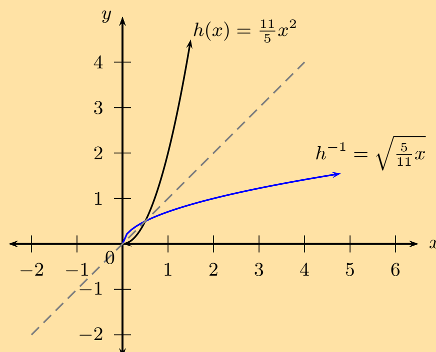


c) Beperk die definisieversameling van h sodat die inverse 'n funksie is.

Oplossing:

Opsie 1: Beperk die definisieversameling van h tot $x \geq 0$ sodat die inverse $\left(h^{-1}\right)$ ook 'n funksie is. Die beperking $x \geq 0$ op die definisieversameling van h sal die waardeversameling van h^{-1} beperk sodat $y \geq 0$.

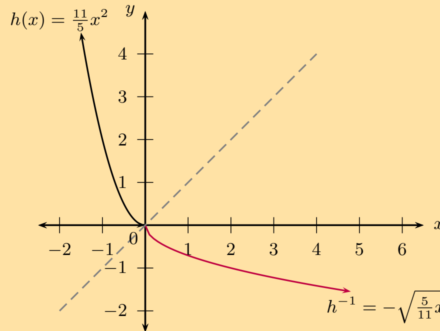
h :	definisieversameling $x \geq 0$	waardeversameling $y \geq 0$
h^{-1} :	definisieversameling $x \geq 0$	waardeversameling $y \geq 0$



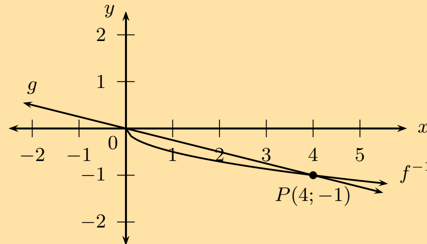
of

Opsie 2: Beperk die definisieversameling van h tot $x \leq 0$ sodat die inverse $\left(h^{-1}\right)$ ook 'n funksie is. Die beperking $x \leq 0$ op die definisieversameling van h sal die waardeversameling van h^{-1} beperk sodat $y \leq 0$.

$$\begin{array}{rll} h: & \text{definisieversameling } x \leq 0 & \text{waardeversameling } y \geq 0 \\ h^{-1}: & \text{definisieversameling } x \geq 0 & \text{waardeversameling } y \leq 0 \end{array}$$



5. Die diagram toon die grafieke van $g(x) = mx + c$ en $f^{-1}(x) = a\sqrt{x}$, $(x \geq 0)$. Beide die grafieke gaan deur die punt $P(4;-1)$.



a) Bepaal die waardes van a, c en m.

Oplossing:

Op die grafiek sien ons dat die reguitlyn deur die oorsprong gaan, dus is $c = 0$.

$$\begin{aligned} g(x) &= mx \\ \text{Vervang } P(4;-1): \quad -1 &= 4m \\ \therefore m &= -\frac{1}{4} \\ \therefore g(x) &= -\frac{1}{4}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= a\sqrt{x} \\ \text{Vervang } P(4;-1): \quad -1 &= a\sqrt{4} \\ -1 &= 2a \\ \therefore a &= -\frac{1}{2} \\ \therefore f^{-1}(x) &= -\frac{1}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

b) Gee die definisieversameling en waardeversameling van f^{-1} en g.

Oplossing:

$$\begin{array}{rll} g: & \text{definisieversameling: } x \in \mathbb{R} & \text{waardeversameling: } y \in \mathbb{R} \\ f^{-1}: & \text{definisieversameling: } x \geq 0 & \text{waardeversameling: } y \leq 0 \end{array}$$

c) Vir watter waardes van x is $g(x) < f(x)$?

Oplossing:

$x > 4$

d) Bepaal f.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } y &= -\frac{1}{2}\sqrt{x} \\
\text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x &= -\frac{1}{2}\sqrt{y} \qquad (y \geq 0) \\
-2x &= \sqrt{y} \\
\therefore y &= 4x^2 \qquad (y \geq 0)
\end{aligned}$$

e) Bepaal die koördinate van die snypunt(e) van g en f .

Oplossing:

Om die koördinat(e) van die snypunte te bepaal, stel ons g gelyk aan f:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}x &= 4x^2 \\
0 &= 4x^2 + \frac{1}{4}x \\
0 &= x\left(4x + \frac{1}{4}\right) \\
\therefore x &= 0 \text{ of } 4x + \frac{1}{4} = 0 \\
\text{As } x = 0: \quad y &= 0 \\
\text{As } 4x + \frac{1}{4} &= 0: \\
4x &= -\frac{1}{4} \\
x &= -\frac{1}{16} \\
\text{As } x = -\frac{1}{16}: \quad y &= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{16}\right) \\
&= \frac{1}{64}
\end{aligned}$$

Dus sny die twee grafieke by $(0; 0)$ en $\left(-\frac{1}{16}; \frac{1}{64}\right)$.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

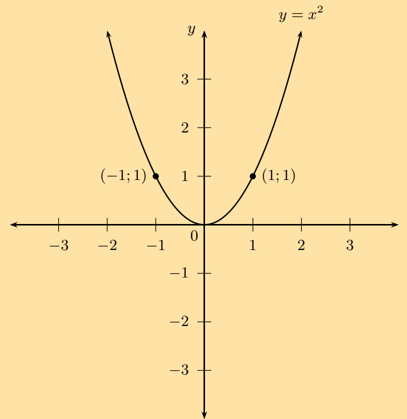
1a. 29RZ 1b. 29S2 1c. 29S3 1d. 29S4 2. 29S5 3. 29S6
4. 29S7 5. 29S8

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 3 – 5: Inverses - gemiddelde gradiënt, dalende en stygende funksies

1. a) Skets die grafiek van $y = x^2$ en gee die koördinate van enige punt behalwe die oorsprong op die grafiek.

Oplossing:



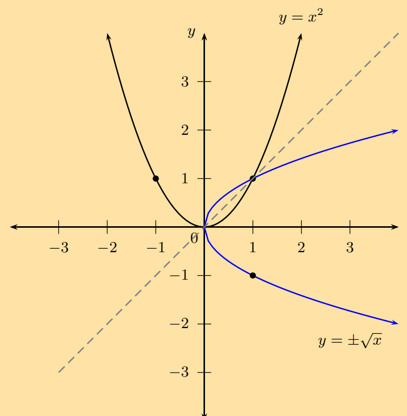
b) Bepaal die vergelyking van die inverse van $y = x^2$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 \\
\text{Inverse: } x &= y^2 \\
\therefore y &= \pm\sqrt{x} \qquad (x \geq 0)
\end{aligned}
$$

c) Skets die grafiek en die inverse op dieselfde assestelsel.

Oplossing:



d) Is die inverse 'n funksie? Verduidelik jou antwoord.

Oplossing:

Nee. Vir sekere waardes van x, sny die inverse die vertikale lyn op twee plekke. Dus is dit nie 'n funksie nie.

e) $P(2;4)$ is 'n punt op $y = x^2$. Bepaal die koördinate van Q, die punt op die grafiek van die inverse wat simmetries is tot P om die lyn $y = x$.

Oplossing:

$Q(4;2)$

f) Bereken die gemiddelde gradiënt tussen:

i. die oorsprong en P;
ii. die oorsprong en Q.

Interpreteer die antwoorde.

Oplossing:

i.

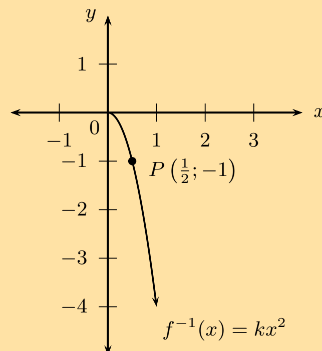
$$
\begin{aligned}
\text{Gemiddelde gradiënt: } &= \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} \\
&= \frac{4-0}{2-0} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

ii.

$$\text{Gemiddelde gradiënt: } = \frac{y_Q - y_O}{x_Q - x_O} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Gemiddelde gradiënt$_{OP} = 2$ en gemiddelde gradiënt$_{OQ} = \frac{1}{2}$.
Beide gradiënte is positief en hulle is ook resiproke van mekaar.

2. Die funksie $f^{-1}(x) = kx^2$, $x \geq 0$ word gegee en dit gaan deur die punt $P\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.



a) Bepaal die waarde van k.
Oplossing:

$$f^{-1}(x) = kx^2$$
$$\text{Vervang } \left(\frac{1}{2}; -1\right) \quad -1 = k\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$-1 = k\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$-4 = k$$
$$\therefore f^{-1}(x) = -4x^2$$

b) Bepaal die gebied en terrein van f^{-1}.
Oplossing:

Gebied: $\{x : x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \leq 0, y \in \mathbb{R}\}$

c) Bepaal die vergelyking van f.
Oplossing:

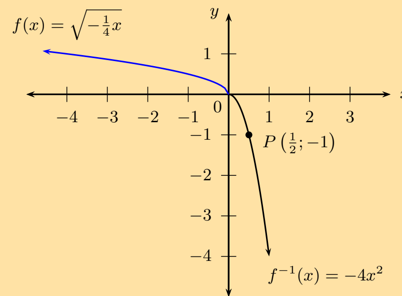
$$f^{-1}: \quad y = -4x^2 \quad (x \geq 0)$$
$$f: \quad x = -4y^2 \quad (y \geq 0)$$
$$-\frac{1}{4}x = y^2$$
$$\therefore y = \sqrt{-\frac{1}{4}x} \quad (x \leq 0)$$

d) Bepaal die gebied en terrein van f.
Oplossing:

Gebied: $\{x : x \leq 0, x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$

e) Skets die grafieke van f en f^{-1} op dieselfde assestelsel.

Oplossing:



f) Is f 'n stygende of dalende funksie?

Oplossing:

Dalende funksie: as die waarde van x toeneem, neem die funksiewaarde af .

3. Gegee: $g(x) = \frac{5}{2}x^2, \ \ x \geq 0$.

a) Bepaal $g^{-1}(x)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } y &= \frac{5}{2}x^2 \qquad (x \geq 0) \\
\text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om : } \quad x &= \frac{5}{2}y^2 \qquad (y \geq 0) \\
\frac{2}{5}x &= y^2 \\
y &= \sqrt{\frac{2}{5}x} \qquad (x \geq 0, y \geq 0) \\
\\
\therefore g^{-1}(x) &= \sqrt{\frac{2}{5}x} \qquad (x \geq 0)
\end{aligned}$$

b) Bereken die punt(e) waar g en g^{-1} mekaar sny.

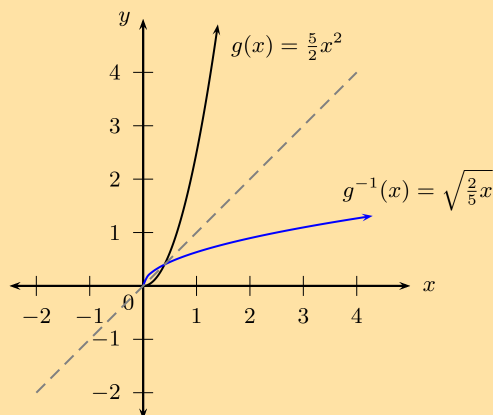
Oplossing:

$$\frac{5}{2}x^2 = \sqrt{\frac{2}{5}x}$$
$$\left(\frac{5}{2}x^2\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{5}x}\right)^2$$
$$\frac{25}{4}x^4 = \frac{2}{5}x$$
$$\frac{25}{4}x^4 - \frac{2}{5}x = 0$$
$$125x^4 - 8x = 0$$
$$x(125x^3 - 8) = 0$$
$$x(5x-2)(25x^2+10x+4) = 0$$
$$\therefore x = 0 \quad \text{of} \quad 5x-2=0 \quad \text{of} \quad 25x^2+10x+4=0$$
$$\text{As } x = 0, \quad y = 0$$
$$\text{As } x = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{5}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2$$
$$\therefore y = \frac{2}{5}$$
$$\text{As } 25x^2+10x+4 = 0$$
$$\text{Gebruik kwadratiese formule:} \quad x = \frac{-10 \pm \sqrt{100-4(25)(4)}}{2(25)}$$
$$= \frac{-10 \pm \sqrt{-300}}{50}$$
$\therefore$geen reële oplossing

Dus die snypunte is $(0;0)$ en $\left(\frac{2}{5};\frac{2}{5}\right)$.

c) Skets g en g^{-1} op dieselfde assestelsel.

Oplossing:



d) Gebruik die skets en bepaal of g en g^{-1} stygende of dalende funksies is.

Oplossing:

$$g: \text{ as } x \text{ toeneem, neem } y \text{ ook toe, } \therefore g \text{ is 'n toenemende funksie.}$$
$$g^{-1}: \text{ as } x \text{ toeneem, neem } y \text{ ook toe, } \therefore g^{-1} \text{ is 'n toenemende funksie.}$$

e) Bereken die gemiddelde gradiënt van g^{-1} tussen die twee snypunte.

Oplossing:

$$\text{Gemiddelde gradiënt:} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{\frac{2}{5} - 0}{\frac{2}{5} - 0}$$
$$= 1$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29S9 2. 29SB 3. 29SC

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

3.6 Eksponensiële funksies

Inverse van die funksie $y = b^x$

Oefening 3 – 6: Bepaal die inverse van $y = b^x$

1. Skryf die volgende in logaritmiese vorm:

   a) $16 = 2^4$
   Oplossing:
   $4 = \log_2 16$

   b) $3^{-5} = \frac{1}{243}$
   Oplossing:
   $-5 = \log_3 \left(\frac{1}{243}\right)$

   c) $(1{,}7)^3 = 4{,}913$
   Oplossing:
   $3 = \log_{1{,}7} (4{,}913)$

   d) $y = 2^x$
   Oplossing:
   $x = \log_2 y$

   e) $q = 4^5$
   Oplossing:
   $\log_4 q = 5.$

   f) $4 = y^g$
   Oplossing:
   $\log_y 4 = g.$

   g) $9 = (x - 4)^p$
   Oplossing:
   $\log_{(x-4)} 9 = p.$

   h) $3 = m^{(a+4)}$
   Oplossing:
   $\log_m 3 = a + 4.$

2. Druk elk van die volgende logaritmes in woorde uit en skryf dit dan in eksponensiële vorm:

   a) $\log_2 32 = 5$
   Oplossing:
   Die logaritme van 32 met grondtal 2 is gelyk aan 5.
   $2^5 = 32$

   b) $\log \frac{1}{1000} = -3$
   Oplossing:
   Die logaritme van $\frac{1}{1000}$ met grondtal 10 is gelyk aan -3.
   $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

c) $\log 0{,}1 = -1$

Oplossing:

Die logaritme van $0{,}1$ met grondtal 10 is gelyk aan -1.

$10^{-1} = 0{,}1$

d) $\log_d c = b$

Oplossing:

Die logaritme van c met grondtal d is gelyk aan b.

$d^b = c$

e) $\log_5 1 = 0$

Oplossing:

Die logaritme van 1 met grondtal 5 is gelyk aan 0.

$5^0 = 1$

f) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$

Oplossing:

Die logaritme van $\frac{1}{81}$ met grondtal 3 is gelyk aan -4.

$3^{-4} = \frac{1}{81}$

g) $\log 100$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Laat } \log 100 &= m \\ 10^m &= 100 \\ &= 10^2 \\ \therefore m &= 2 \\ \therefore \log 100 &= 2 \end{aligned}$$

Die logaritme van 100 tot grondtal 10 is 2.

h) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Laat } \log_{\frac{1}{2}} 16 &= y \\ \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^y &= 16 \\ \therefore 2^{-y} &= 2^4 \\ -y &= 4 \\ \therefore y &= -4 \end{aligned}$$

Die logaritme van 16 met grondtal $\frac{1}{2}$ is -4.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29SF 1b. 29SG 1c. 29SH 1d. 29SJ 1e. 29SK 1f. 29SM
1g. 29SN 1h. 29SP 2a. 29SQ 2b. 29SR 2c. 29SS 2d. 29ST
2e. 29SV 2f. 29SW 2g. 29SX 2h. 29SY

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 3 – 7: Pas die logaritmiese wet toe: $\log_a x^b = b \log_a x$

Vereenvoudig die volgende

1. $\log_8 10^{10}$

   Oplossing:

$$\log_8 10^{10} = 10 \log_8 10$$

2. $\log_{16} x^y$

   Oplossing:

$$\log_{16} x^y = y \log_{16} x$$

3. $\log_3 \sqrt{5}$

   Oplossing:

$$\log_3 \sqrt{5} = \frac{\log_3 5}{2}$$

4. $\log_z y^z$

   Oplossing:

$$\log_z y^z = z \log_z y$$

5. $\log_y \sqrt[x]{y}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \log_y \sqrt[x]{y} &= \log_y y^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x} \log_y y \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

6. $\log_p p^q$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \log_p p^q &= q \log_p p \\ &= q(1) \\ &= q \end{aligned}$$

7. $\log_2 \sqrt[4]{8}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt[4]{8} &= \log_2 8^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \log_2 2^3 \\ &= \frac{1}{4} \times 3 \log_2 2 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

8. $\log_5 \frac{1}{5}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_5 \frac{1}{5} &= \log_5 5^{-1}\\ &= (-1)\log_5 5\\ &= (-1)(1)\\ &= -1\end{aligned}$$

9. $\log_2 8^5$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_2 8^5 &= 5\log_2 8\\ &= 5\log_2 2^3\\ &= 5\times 3\log_2 2\\ &= 15\end{aligned}$$

10. $\log_4 16 \times \log_3 81$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_4 16 \times \log_3 81 &= \log_4 4^2 \times \log_3 3^4\\ &= (2)\log_4 4 \times (4)\log_3 3\\ &= (2)(1)\times(4)(1)\\ &= 8\end{aligned}$$

11. $(\log_5 25)^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned}(\log_5 25)^2 &= \left(\log_5 5^2\right)^2\\ &= (2\log_5 5)^2\\ &= (2(1))^2\\ &= 4\end{aligned}$$

Alternatiewe metode:

$$\begin{aligned}(\log_5 25)^2 &= \log_5 \left(5^2\right)^2\\ &= \log_5 5^4\\ &= 4(1)\\ &= 4\end{aligned}$$

12. $\log_2 0{,}125$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_2 0{,}125 &= \log_2 \frac{125}{1000}\\ &= \log_2 \frac{1}{8}\\ &= \log_2 8^{-1}\\ &= (-1)\log_2 2^3\\ &= (-1)(3)\log_2 2\\ &= (-3)(1)\\ &= -3\end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29T2 2. 29T3 3. 29T4 4. 29T5 5. 29T6 6. 29T7
7. 29T8 8. 29T9 9. 29TB 10. 29TC 11. 29TD 12. 29TF

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 3 – 8: Pas die logaritmiese wet toe: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

1. Skakel die volgende om:
   a) $\log_2 4$ na grondtal 8
   Oplossing:
   $\log_2 4 = \frac{\log_8 4}{\log_8 2}$
   b) $\log_{10} 14$ na grondtal 2
   Oplossing:
   $\log_{10} 14 = \frac{\log_2 14}{\log_2 10}$
   c) $\log 4\frac{1}{2}$ na grondtal 2
   Oplossing:

$$\begin{aligned}\log 4\frac{1}{2} &= \log \frac{9}{2} \\ &= \frac{\log_2 \frac{9}{2}}{\log_2 10} \\ &= \frac{\log_2 9 - \log_2 2}{\log_2 10} \\ &= \frac{\log_2 9 - 1}{\log_2 10}\end{aligned}$$

   d) $\log_2 8$ na grondtal 8
   Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_2 8 &= \frac{\log_8 8}{\log_8 2} \\ &= \frac{1}{\log_8 2}\end{aligned}$$

   e) $\log_y x$ na grondtal x
   Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_y x &= \frac{\log_x x}{\log_x y} \\ &= \frac{1}{\log_x y}\end{aligned}$$

   $\therefore$ 'n logaritme is gelyk aan die resiprook van die inverse.

   f) $\log_{10} 2x$ na grondtal 2
   Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_{10} 2x &= \frac{\log_2 2x}{\log_2 10} \\ &= \frac{\log_2 2 + \log_2 x}{\log_2 10} \\ &= \frac{1 + \log_2 x}{\log_2 10}\end{aligned}$$

2. Vereenvoudig die volgende deur die grondtal te verander:

a) $\log_2 10 \times \log_{10} 2$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_2 10 \times \log_{10} 2 &= \frac{\log 10}{\log 2} \times \frac{\log 2}{\log 10} \\ &= 1\end{aligned}$$

b) $\log_5 100$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_5 100 &= \frac{\log 100}{\log 5} \\ &= \frac{\log 10^2}{\log 5} \\ &= \frac{2\log 10}{\log 5} \\ &= \frac{2}{\log 5}\end{aligned}$$

3. As $\log 3 = 0{,}477$ en $\log 2 = 0{,}301$, bepaal (korrek tot 2 desimale plekke):

a) $\log_2 3$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_2 3 &= \frac{\log 3}{\log 2} \\ &= \frac{0{,}477}{0{,}301} \\ &= 1{,}58\end{aligned}$$

b) $\log_3 2000$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_3 2000 &= \frac{\log 2000}{\log 3} \\ &= \frac{\log(2 \times 1000)}{\log 3} \\ &= \frac{\log 2 + \log 10^3}{\log 3} \\ &= \frac{0{,}301 + 3(1)}{0{,}477} \\ &= \frac{3{,}301}{0{,}477} \\ &= 6{,}92\end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29TH 1b. 29TJ 1c. 29TK 1d. 29TM 1e. 29TN 1f. 29TP
2a. 29TQ 2b. 29TR 3a. 29TS 3b. 29TT

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 3 – 9: Logaritmes en die gebruik van die sakrekenaar

1. Bereken die volgende (korrek tot drie desimale plekke)

   a) $\log 3$
   Oplossing: $0{,}477$

   b) $\log 30$
   Oplossing: $1{,}477$

   c) $\log 300$
   Oplossing: $2{,}477$

   d) $\log 0.66$
   Oplossing: $-0{,}180$

   e) $\log \frac{1}{4}$
   Oplossing: $-0{,}602$

   f) $\log 852$
   Oplossing: $2{,}930$

   g) $\log(-6)$
   Oplossing: geen waarde

   h) $\log_3 4$
   Oplossing: $1{,}262$

   i) $\log 0{,}01$
   Oplossing: -2

   j) $\log_2 15$
   Oplossing: $3{,}907$

   k) $\log_4 10$
   Oplossing: $1{,}661$

   l) $\log_{\frac{1}{2}} 6$
   Oplossing: $-2{,}585$

2. Gebruik 'n sakrekenaar om die volgende te bereken x (korrek tot twee desimale plekke). Toets jou antwoord deur na eksponensiële vorm oor te skakel.

   a) $\log x = 0{,}6$
   Oplossing:

   $$x = 3{,}98$$
   Kontroleer eksponensiële vorm: $10^{0,6} = 3{,}98$

   b) $\log x = -2$
   Oplossing:

   $$x = 0{,}01$$
   Kontroleer eksponensiële vorm: $10^{-2} = 0{,}01$

   c) $\log x = 1{,}8$
   Oplossing:

   $$x = 63{,}10$$
   Kontroleer eksponensiële vorm: $10^{1,8} = 63{,}10$

d) $\log x = 5$
Oplossing:

$$x = 100\ 000$$
$$\text{Kontroleer eksponensiële vorm: } 10^5 = 100\ 000$$

e) $\log x = -0{,}5$
Oplossing:

$$x = 0{,}32$$
$$\text{Kontroleer eksponensiële vorm: } 10^{-0{,}5} = 0{,}32$$

f) $\log x = 0{,}076$
Oplossing:

$$x = 1{,}19$$
$$\text{Kontroleer eksponensiële vorm: } 10^{0{,}076} = 1{,}19$$

g) $\log x = \frac{2}{5}$
Oplossing:

$$x = 2{,}51$$
$$\text{Kontroleer eksponensiële vorm: } 10^{\frac{2}{5}} = 2{,}51$$

h) $\log x = -\frac{6}{5}$
Oplossing:

$$x = 0{,}06$$
$$\text{Kontroleer eksponensiële vorm: } 10^{\left(-\frac{6}{5}\right)} = 0{,}06$$

i) $\log_2 x = 0{,}25$
Oplossing:

$$\log_2 x = 0{,}25$$
$$\therefore \frac{\log x}{\log 2} = 0{,}25$$
$$\therefore \log x = 0{,}25 \times \log 2$$
$$\therefore x = 1{,}19$$
$$\text{Kontroleer eksponensiële vorm: } 2^{0{,}25} = 1{,}19$$

j) $\log_5 x = -0{,}1$
Oplossing:

$$\log_5 x = -0{,}1$$
$$\therefore \frac{\log x}{\log 5} = -0{,}1$$
$$\therefore \log x = -0{,}1 \times \log 5$$
$$\therefore x = 0{,}85$$
$$\text{Kontroleer eksponensiële vorm: } 5^{(-0{,}10)} = 0{,}85$$

k) $\log_{\frac{1}{4}} x = 2$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{4}} x &= 2 \\
\therefore \frac{\log x}{\log \frac{1}{4}} &= 2 \\
\therefore \log x &= 2 \times \log \frac{1}{4} \\
\therefore x &= 0{,}06 \\
\text{Kontroleer eksponensiële vorm: } \left(\frac{1}{4}\right)^2 &= 0{,}06
\end{aligned}$$

l) $\log_7 x = 0{,}3$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\log_7 x &= 0{,}3 \\
\therefore \frac{\log x}{\log 7} &= 0{,}3 \\
\therefore \log x &= 0{,}3 \times \log 7 \\
\therefore x &= 1{,}79 \\
\text{Kontroleer eksponensiële vorm: } 7^{0{,}3} &= 1{,}79
\end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29TV	1b. 29TW	1c. 29TX	1d. 29TY	1e. 29TZ	1f. 29V2
1g. 29V3	1h. 29V4	1i. 29V5	1j. 29V6	1k. 29V7	1l. 29V8
2a. 29V9	2b. 29VB	2c. 29VC	2d. 29VD	2e. 29VF	2f. 29VG
2g. 29VH	2h. 29VJ	2i. 29VK	2j. 29VM	2k. 29VN	2l. 29VP

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

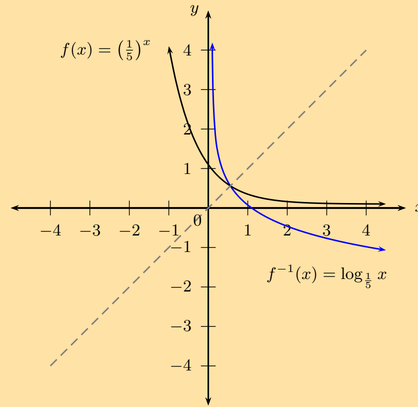
Eksponensiële en logarimiese grafieke

Oefening 3 – 10: Grafieke en inverses van $y = \log_b x$

1. Gegee $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

   a) Skets die grafieke van f en f^{-1} op dieselfde assestelsel. Benoem elke grafiek duidelik.

   Oplossing:



b) Gee die afsnit(te) van beide grafieke.

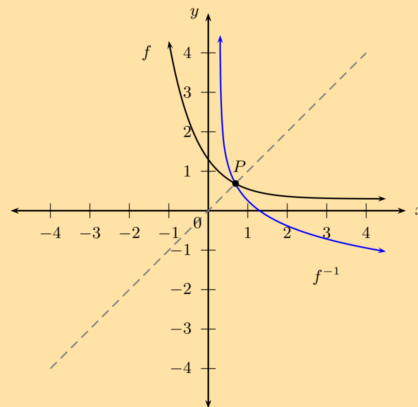
Oplossing:

$f : (0; 1)$ en $f^{-1} : (1; 0)$

c) Dui P, die snypunt van f en f^{-1}, duidelik aan.

Oplossing:

Let op dat die snypunt van die funksie en sy inverse op die lyn $y = x$ lê.

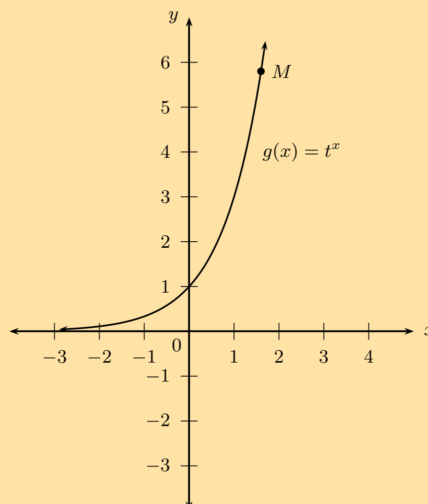


d) Gee die gebied, terrein en vergelykings van asimptote van elke funksie.

Oplossing:

Funksie	Gebied	Terrein	Asimptote
$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$	$\{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\}$	x-as, $y = 0$
$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$	$\{x : x > 0, x \in \mathbb{R}\}$	$\{y : y \in \mathbb{R}\}$	y-as, $x = 0$

2. Gegee $g\left(x\right) = t^x$ met $M\left(1\frac{3}{5}; 5\frac{4}{5}\right)$ 'n punt op die grafiek van g.



a) Bepaal die waarde van t

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Laat } y &= t^x \\ 5{,}8 &= t^{1{,}6} \\ \therefore t &= \sqrt[1{,}6]{5{,}8} \\ &= 3{,}000\ldots \\ \\ \therefore g(x) &= 3^x\end{aligned}$$

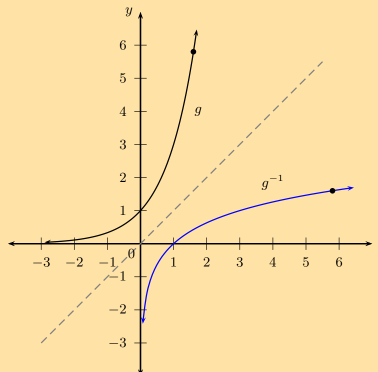
b) Bepaal die inverse van g

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Laat } y &= 3^x \qquad (y > 0) \\ \text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x &= 3^y \qquad (x > 0) \\ \frac{x}{2} &= y^2 \\ y &= \log_3 x \\ \\ \therefore g^{-1}(x) &= \log_3 x \qquad (x > 0)\end{aligned}$$

c) Gebruik simmetrie met betrekking tot die lyn $y = x$ om die grafieke van g en g^{-1} op dieselfde assestelsel te skets.

Oplossing:



d) Punt N lê op die grafiek van g^{-1} en is simmetries tot die punt M om die lyn $y = x$. Bepaal die koördinate van N.

Oplossing:

$N(5{,}8; 1{,}6)$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29VR 2. 29VS

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 3 – 11: Toepassings van logaritmes

1. Die bevolking van Upington groei met 6% elke 3 jare. Hoe lank sal dit neem om te verdriedubbel?

   Gee jou antwoord in jare en rond dit af tot die naaste heelgetal.

   Oplossing:

   Laat die bevolking aan die begin
   $$P = x$$
   wees. Ons wil weet hoeveel tydperke dit vir die bevolking sal neem om te verdriedubbel. Dit beteken dat die finale bevolking
   $$A = 3x$$
   sal wees.

   Laat n die getal periodes wees om te groei tot A. Let op dat elke periode 3 jaar lank is, dus moet ons $\frac{n}{3}$ gebruik.

   Die groeikoers is
   $$i = 6\% = \frac{6}{100}$$
   Ons gebruik die formule vir saamgestelde groei/rente:
   $$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ 3x &= x\left(1+\frac{6}{100}\right)^{\frac{n}{3}} \\ 3 &= (1{,}06)^{\frac{n}{3}} \end{aligned}$$
   Ons gebruik nou die definisie van logaritmes om die vergelyking in terme van n te skryf en dan doen ons die berekening met 'n sakrekenaar:
   $$\begin{aligned} \frac{n}{3} &= \log_{(1{,}06)} 3 \\ &= \frac{\log 3}{\log 1{,}06} \\ &= 18{,}854\ldots \\ \therefore n &= 3 \times 18{,}854\ldots \\ &= 56{,}562\ldots \\ &\approx 57 \end{aligned}$$
   Dit sal omtrent 57 jare neem vir die bevolking om te verdriedubbel.

2. 'n Mierbevolking van 36 miere verdubbel elke maand.

   a) Bepaal 'n formule om die groei in hierdie bevolking te bereken.

   Oplossing:

   Stel die getal maande gelyk aan $M_0; M_1; M_2; \ldots$

M_0		M_1		M_2		$\ldots$
36	$\rightarrow$	72	$\rightarrow$	144	$\rightarrow$	$\ldots$
	$\times 2$		$\times 2$		$\times 2$	

   $36 \times 2^0 \quad \rightarrow \quad 36 \times 2^1 \quad \rightarrow \quad 36 \times 2^2 \quad \rightarrow \quad \ldots$
   $$\text{Groei} = 36 \times 2^n$$
   as n die getal maande is.

   b) Bereken nou hoe lank dit sal neem vir die mierbevolking om te groei tot 'n kwartmiljoen miere.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Groei} &= 36 \times 2^n \\ \frac{1}{4} \times 1\ 000\ 000 &= 36 \times 2^n \\ 250\ 000 &= 36 \times 2^n \\ \frac{250\ 000}{36} &= 2^n \\ \therefore n &= \log_2 \left(\frac{250\ 000}{36} \right) \\ n &= \frac{\log \left(\frac{250\ 000}{36} \right)}{\log 2} \\ \therefore n &= \frac{\log \left(\frac{250\ 000}{36} \right)}{\log 2} \\ &= 12{,}7 \ldots \end{aligned}$$

Daar sal 'n kwartmiljoen miere na omtrent 13 maande wees.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

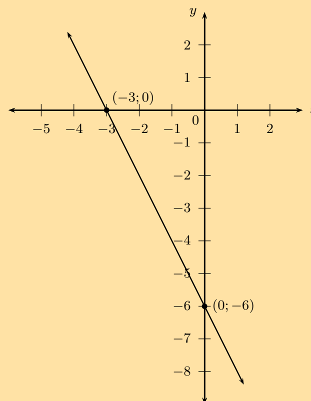
1. 29VV 2. 29VW

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

3.7 Opsomming

Oefening 3 – 12: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Die reguitlyn h word gegee met die afsnitte $(-3; 0)$ en $(0; -6)$.



a) Bepaal die vergelyking van h.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Gradiënt: } m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-6 - 0}{0 - (-3)} \\
&= \frac{-6}{3} \\
&= -2 \\
\therefore h(x) &= -2x - 6
\end{aligned}$$

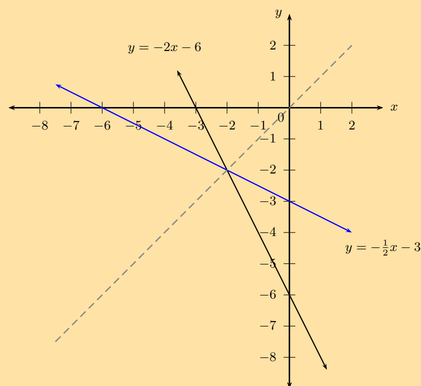
b) Bepaal h^{-1}.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } y &= -2x - 6 \\
\text{Inverse: } x &= -2y - 6 \\
x + 6 &= -2y \\
-\frac{1}{2}(x + 6) &= y \\
y &= -\frac{x}{2} - 3 \\
\therefore h^{-1}(x) &= -\frac{x}{2} - 3
\end{aligned}$$

c) Trek beide grafieke op dieselfde assestelsel.

Oplossing:



d) Bereken die koördinate van S, die snypunt van h en h^{-1}.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
-\frac{x}{2} - 3 &= -2x - 6 \\
-x - 6 &= -4x - 12 \\
-x + 4x &= -12 + 6 \\
3x &= -6 \\
\therefore x &= -2 \\
\text{As } x = -2, \quad y &= -2(-2) - 6 \\
y &= -2(-2) - 6 \\
&= -2
\end{aligned}$$

Dit gee die punt $S(-2; -2)$.

e) Noem die eienskap wat altyd waar sal wees vir die funksie en sy inverse met betrekking tot hulle snypunt.

Oplossing:

Die waarde van die x-koördinate en die y-koördinate sal altyd dieselfde wees omdat die punt op die lyn $y = x$ lê.

2. Die inverse funksie is $f^{-1}(x) = 2x + 4$.

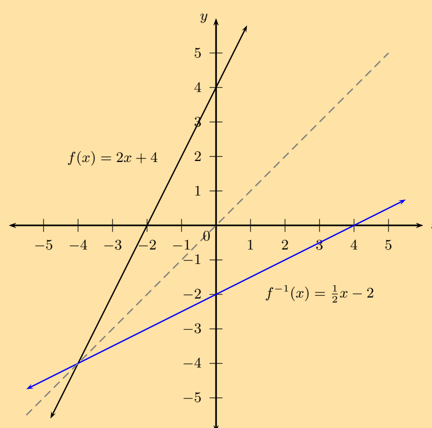
   a) Bepaal f.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{Laat } y &= 2x + 4 \\
\text{Inverse: } x &= 2y + 4 \\
x - 4 &= 2y \\
\frac{1}{2}x - 2 &= y \\
\therefore f(x) &= \frac{1}{2}x - 2
\end{aligned}
$$

   b) Trek f en f^{-1} op dieselfde assestelsel. Merk elke grafiek duidelik.

   Oplossing:



   c) Is f^{-1} 'n stygende of dalende funksie? Verduidelik jou antwoord.

   Oplossing:

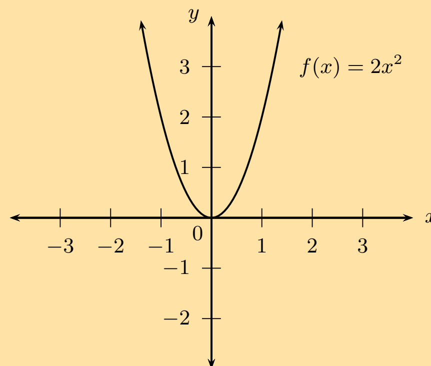
   Stygend. As x toeneem, sal die funksiewaarde toeneem. Alternatiewe rede: gradiënt is positief, dus is die funksie stygend.

3. $f(x) = 2x^2$.

   a) Trek die grafiek van f en gee die gebied en terrein.

   Oplossing:

   Die gebied is: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ en die terrein is: $\{y : y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.



   b) Bepaal die inverse en gee die gebied en terrein.

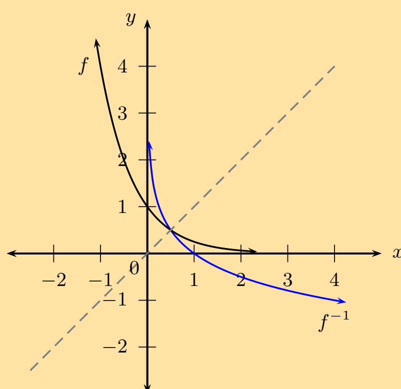
   Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Laat } y &= 2x^2\\ \text{Inverse: } x &= 2y^2\\ \frac{1}{2}x &= y^2\\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}x} &= y\\ \therefore y &= \pm\sqrt{\frac{x}{2}} \qquad (x \geq 0)\end{aligned}$$

Gebied: $\{x : x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$, Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}\}$.

4. Die funksie $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ word gegee.

   a) Skets die grafieke van f en f^{-1} op dieselfde assestelsel.
   Oplossing:



   b) Bepaal of die punt $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ op die grafiek van f lê.
   Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{4}\right)^x\\ \text{Vervang } \left(-\frac{1}{2}; 2\right): \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= 4^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\end{aligned}$$

   Ja, die punt $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ lê op f.

   c) Skryf f^{-1} in die vorm $y = \ldots$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} f: \quad y &= \left(\frac{1}{4}\right)^x\\ f^{-1}: \quad x &= \left(\frac{1}{4}\right)^y\\ \therefore y &= \log_{\frac{1}{4}} x\\ &\text{of}\\ f: \quad y &= (4)^{-x}\\ f^{-1}: \quad x &= (4)^{-y}\\ -y &= \log_4 x\\ \therefore y &= -\log_4 x\end{aligned}$$

   $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ of $y = -\log_4 x$

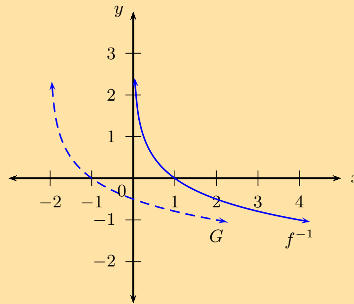
d) As die grafieke van f en f^{-1} mekaar sny by $\left(\frac{1}{2}; P\right)$, bepaal die waarde van P.

Oplossing:

$P = \frac{1}{2}$, omdat die punt op die lyn $y = x$ lê.

e) Gee die vergelyking van die nuwe grafiek, G, as die grafiek van f^{-1} 2 eenhede na links geskuif word.

Oplossing:



$G(x) = -\log_4(x+2)$ of $G(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x+2)$

f) Gee die asimptoot van G.

Oplossing:

Vertikale asimptoot: $x = -2$

5. Beskou die funksie $h(x) = 3^x$.

a) Skryf die inverse in die vorm $h^{-1}(x) = \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Laat: } \quad & y = 3^x \\ \text{Inverse: } \quad & x = 3^y \\ & y = \log_3 x \\ \therefore\ & h^{-1}(x) = \log_3 x \end{aligned}$$

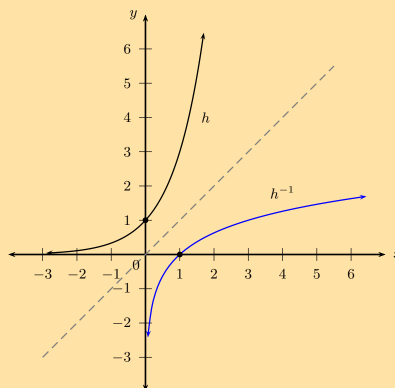
b) Bepaal die gebied en terrein van h^{-1}.

Oplossing:

Gebied: $\{x : x > 0, x \in \mathbb{R}\}$ en terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}\}$.

c) Skets die grafieke van h en h^{-1} op dieselfde assestelsel, dui alle afsnitte duidelik aan.

Oplossing:



d) Vir watter waardes van x sal $h^{-1}(x) < 0$?

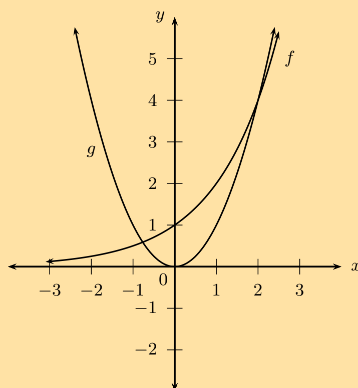
Oplossing:

$0 < x < 1$

6. Beskou die funksies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = x^2$.

a) Skets die grafieke van f en g op dieselfde assestelsel.

Oplossing:



b) Bepaal of f en g mekaar sny of nie by die punt waar $x = -1$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2^x \\
f(-1) &= 2^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \\
g(x) &= x^2 \\
g(-1) &= (-1)^2 \\
&= 1 \\
\therefore f(-1) &\neq g(-1)
\end{aligned}
$$

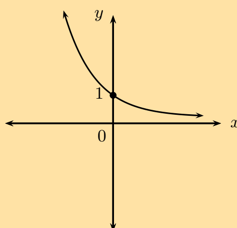
Die grafieke sny mekaar nie by $x = -1$ nie.

c) Hoeveel oplossings het die vergelyking $2^x = x^2$?

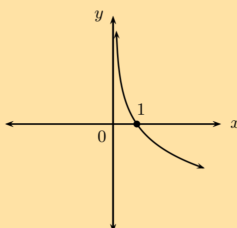
Oplossing:

Twee

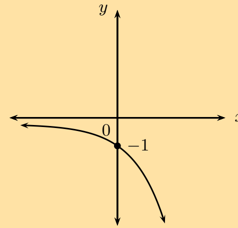
7. Hieronder is drie grafieke en ses vergelykings. Skryf die vergelyking neer wat die beste pas by elk van die grafieke.



Grafiek 1



Grafiek 2

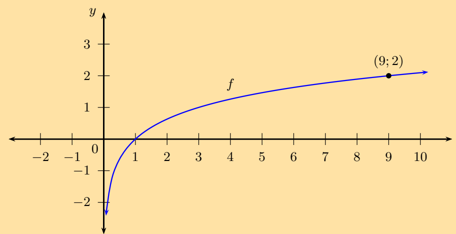


Grafiek 3

a) $y = \log_3 x$
b) $y = -\log_3 x$
c) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$
d) $y = 3^x$
e) $y = 3^{-x}$
f) $y = -3^x$

Oplossing:
Grafiek 1: $y = 3^{-x}$
Grafiek 2: $y = -\log_3 x$ of $y = \log_{\frac{1}{3}} x$
Grafiek 3: $y = -3^x$

8. Die grafiek van die funksie $f: \ y = \log_b x$ word gegee en dit gaan deur die punt $(9; 2)$.



a) Toon aan dat $b = 3$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \log_b x \\ 2 &= \log_b 9 \\ \therefore 9 &= b^2 \\ \therefore 3^2 &= b^2 \\ \therefore b &= 3 \end{aligned}$$

b) Bepaal die waarde van a as $(a; -1)$ op f lê.
Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \log_3 x \\ -1 &= \log_3 a \\ \therefore 3^{-1} &= a \\ \therefore a &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

c) Skryf die nuwe vergelyking neer as f opwaarts geskuif word met 2 eenhede.
Oplossing: $y = \log_3 x + 2$

d) Skryf die nuwe vergelyking neer as f na regs geskuif word met 1 eenheid.
Oplossing: $y = \log_3 (x - 1)$

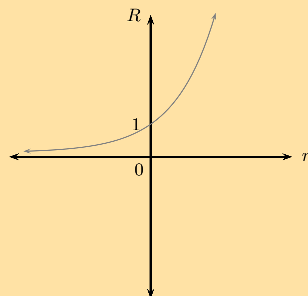
9. a) As die renoster bevolking in Suid-Afrika begin om te verminder teen 'n koers van 7% per jaar, bereken hoe lank dit sal neem vir die huidige renoster bevolking om te halveer. Gee jou antwoord tot die naaste heelgetal.

Oplossing:

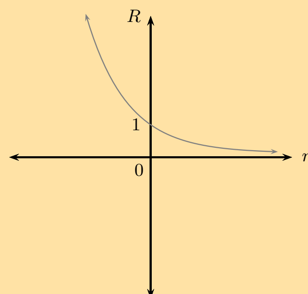
$$\begin{aligned}
A &= P(1-i)^n \\
\frac{1}{2} &= \left(1 - \frac{7}{100}\right)^n \\
0{,}5 &= (0{,}93)^n \\
\log 0{,}5 &= \log (0{,}93)^n \\
\log 0{,}5 &= n \log (0{,}93) \\
\therefore n &= \frac{\log 0{,}5}{\log (0{,}93)} \\
&= 9{,}55\ldots
\end{aligned}$$

Dit sal minder as 10 jaar neem vir die huidige renoster bevolking om te halveer.

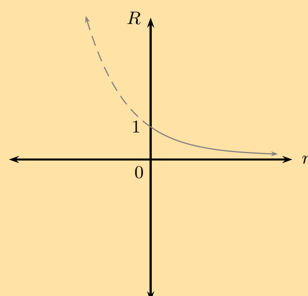
b) Watter een van die volgende grafieke sal die vermindering van die renoster bevolking die beste illustreer? Motiveer jou antwoord.



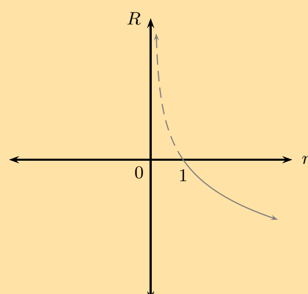
Grafiek A



Grafiek B



Grafiek C



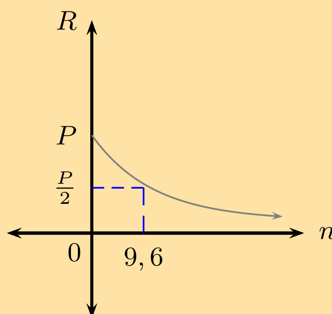
Grafiek D

Belangrike nota: die grafieke hierbo is as aaneenlopende kurwes geteken om 'n tendens te illustreer. Getalle wat die renoster bevolking aandui is diskreet en moes net as punte op grafiek gestip word.

Oplossing:

Grafiek C

Tans $(n = 0)$ is die renoster bevolking P. Na 9,6 jare, sal dit halveer, $\frac{P}{2}$.



10. Teen 8 vm. het 'n plaaslike beroemde persoon getweet oor sy nuwe musiek album aan 100 van sy aanhangers. Vyf minute later, het elkeen van die aanhangers na twee van sy vriende getweet. Vyf mintute later het hulle ook elk na twee vriende getweet. Aanvaar dat hierdie proses voorduur.

    a) Bepaal 'n formule wat hierdie hele tweeting proses sal voorstel.

    Oplossing:

    $100 \qquad 100 \times 2 \qquad 100 \times 2^2 \qquad 100 \times 2^3$

    Dit is 'n meetkundige ry: $r = 2$ en $a = 100$.

    Daarom $T_n = 100 \times 2^{n-1}$.

    b) Bereken hoeveel tweets van die beroemde persoon se boodskap word gestuur een uur na die oorspronklike een gestuur is.

    1 uur = 60 minute = 12×5, dus $n = 12$.

    Oplossing:

$$\begin{aligned} T_n &= 100 \times 2^{n-1} \\ T_{12} &= 100 \times 2^{11} \\ &= 204\ 800 \end{aligned}$$

    204 800 retweets.

    c) Hoe lank sal dit neem vir die totale aantal tweets om 200 miljoen te oorskrei?

    Oplossing:

$$\begin{aligned} 200 \times 10^6 &= 2 \times 10^8 \\ S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \\ \therefore \frac{100(2^n - 1)}{2 - 1} &> 2 \times 10^8 \\ 2^n &> \frac{2 \times 10^8}{100} + 1 \\ 2^n &> 2\ 000\ 001 \\ n &> \log_2 2\ 000\ 001 \qquad \text{(gebruik definisie)} \\ n &> \frac{\log 2\ 000\ 001}{\log 2} \qquad \text{(verandering van grondtal)} \\ n &> 20{,}9\ldots \quad \text{5 minute periodes} \end{aligned}$$

    Dus, $\frac{21}{12} = 1{,}75$ ure.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29VY 1b. 29VZ 1c. 29W2 1d. 29W3 1e. 29W4 2. 29W5
3a. 29W6 3b. 29W7 4. 29W8 5. 29W9 6. 29WB 7. 29WC
8. 29WD 9. 29WF 10. 29WG

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 3 – 13: Inverses (SLEGS VIR VERRYKING)

1. a) Gegee: $g(x) = -1 + \sqrt{x}$, bepaal die inverse van $g(x)$ in die vorm $g^{-1}(x) = \ldots$

Oplossing:

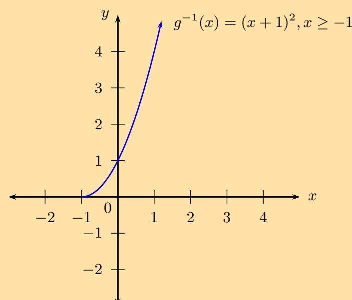
$$g(x) = -1 + \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$
$$\text{Laat } y = -1 + \sqrt{x}$$
$$\text{Inverse: } x = -1 + \sqrt{y} \quad (y \geq 0)$$

$$\sqrt{y} = x + 1 \qquad (x \geq -1)$$
$$\therefore y = (x+1)^2$$

$$\therefore g^{-1}(x) = (x+1)^2 \qquad (x \geq -1)$$

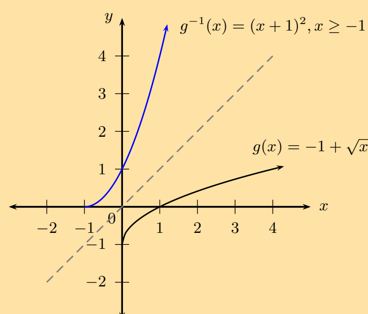
b) Trek die grafiek van g^{-1}.

Oplossing:



c) Gebruik simmetrie om die grafiek van g op dieselfde assestelsel te trek.

Oplossing:



d) Is g^{-1} 'n funksie?

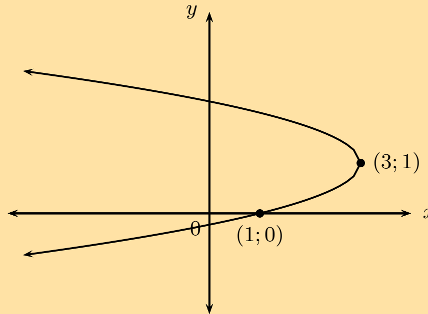
Oplossing:

Ja. Dit slaag die vertikale lyn toets.

e) Gee die gebied en terrein van g^{-1}.

Oplossing:
Gebied: $\{x : x \geq -1, x \in \mathbb{R}\}$, Terrein: $\{y : y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

2. Die grafiek van die inverse van f word hieronder getoon:



a) Bepaal die vergelyking van f, gegee dat f 'n parabool is in die vorm $y = (x+p)^2+q$.

Oplossing:

Gebruik eers die inligting wat gegee word op die grafiek van die inverse:

$$\begin{aligned} \text{Draaipunt: } & (3;1) \\ x - \text{afsnit: } & (1;0) \end{aligned}$$

Om die draaipunt en afsnitte van die funksie te bepaal, ruil ons die gegewe koördinate om. Nou kan ons hierdie koördinate gebruik om die vergelyking van die inverse funksie te bepaal.

Bepaal nou die vergelyking van die funksie:

$$\begin{aligned} \text{Draaipunt: } & (1;3) \\ x - \text{afsnit: } & (0;1) \\ & y = a(x-p)^2 + q \\ & y = a(x-1)^2 + 3 \\ \text{Vervang } (0;1) \quad & 1 = a(0-1)^2 + 3 \\ & a = -2 \\ \therefore\ & y = -2(x-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

b) Sal f 'n maksimum of minimum waarde hê?

Oplossing:

Maksimum waarde by $(1;3)$

c) Gee die gebied, terrein, en simmetrie-as van f.

Oplossing:

Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ en terrein: $\{y : y \leq 3, y \in \mathbb{R}\}$, simmetrie-as: $x = 1$.

3. Gegee: $k(x) = 2x^2 + 1$

a) As $(q;3)$ op k lê, bepaal die waarde(s) van q.

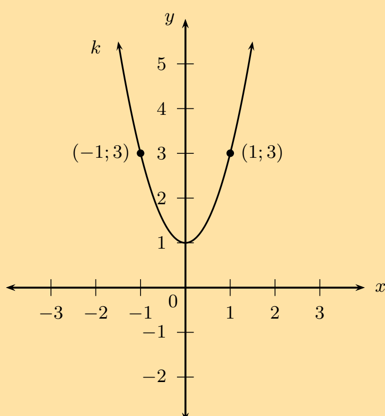
Oplossing:

$$\begin{aligned} & k(x) = 2x^2 + 1 \\ \text{Vervang } (q;3) \quad & 3 = 2(q)^2 + 1 \\ & 2 = 2(q)^2 \\ & 1 = q^2 \\ \therefore\ & q = \pm 1 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $(-1;3)$ en $(1;3)$.

b) Skets die grafiek van k, dui die volgende punt(e) $(q;3)$ op die grafiek aan.

Oplossing:



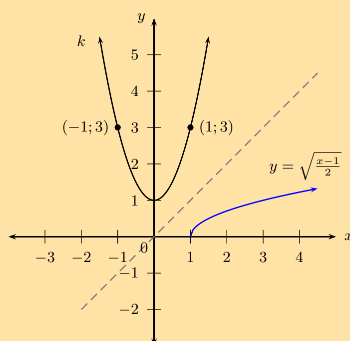
c) Bepaal die vergelyking van die inverse van k in die vorm $y = \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned} k: \quad & y = 2x^2 + 1 \\ \text{Inverse:} \quad & x = 2y^2 + 1 \\ & 2y^2 = x - 1 \\ & y^2 = \frac{x-1}{2} \\ & y = \pm\sqrt{\frac{x-1}{2}} \qquad (x \geq 1) \end{aligned}$$

d) Skets k en $y = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$ op dieselfde assestelsel.

Oplossing:

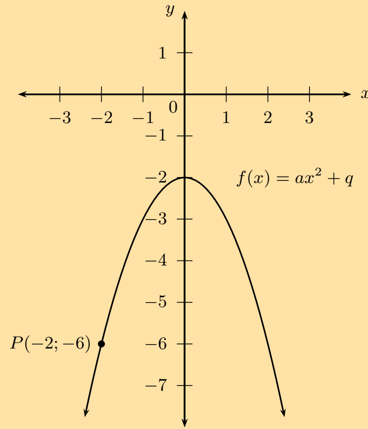


e) Bepaal die koördinate van die punt op die grafiek van die inverse wat simmetries is met $(q; 3)$ om die lyn $y = x$.

Oplossing:

$(3; 1)$

4. Die skets toon die grafiek van 'n parabool $f(x) = ax^2 + q$ wat deur die punt $P(-2; -6)$ gaan.



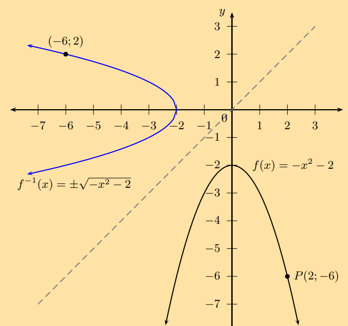
a) Bepaal die vergelyking van f.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
q &= -2\\
y &= ax^2 - 2\\
\text{Vervang } (-2;-6) \quad -6 &= a(-2)^2 - 2\\
-6 + 2 &= 4a\\
-4 &= 4a\\
-1 &= a\\
\therefore f(x) &= -x^2 - 2
\end{aligned}
$$

b) Bepaal en ondersoek die inverse.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{Laat } y &= -x^2 - 2 \qquad (y \leq -2)\\
\text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x &= -y^2 - 2 \qquad (x \leq -2)\\
x + 2 &= -y^2\\
-x - 2 &= y^2\\
y &= \pm\sqrt{-x-2} \qquad (x \leq -2)
\end{aligned}
$$

c) Skets die inverse en bespreek die eienskappe van die grafiek.
Oplossing:



Die inverse is nie 'n funksie nie. Die draaipunt van die inverse is $(-2;0)$ en x-afsnit is $(-2;0)$.

Inverse : definisieversameling $\{x : x \leq -2, x \in \mathbb{R}\}$ waardeversameling $\{y : y \in \mathbb{R}\}$

5. Die funksie $H : y = x^2 - 9$ word gegee.

a) Bepaal die algebraïese formule vir die inverse van H.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Laat } y &= x^2 - 9 \qquad (y \geq -9) \\ \text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x &= y^2 - 9 \qquad (x \geq -9) \\ x + 9 &= y^2 \\ y &= \pm\sqrt{x+9} \qquad (x \geq -9) \end{aligned}$$

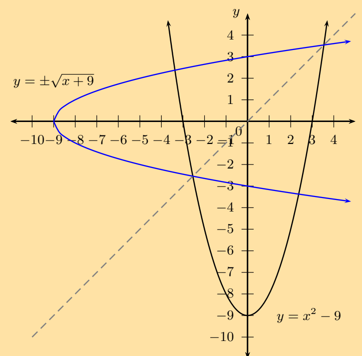
b) Trek die grafieke van H en sy inverse op dieselfde assestelsel. Dui die afsnitte en draaipunt duidelik aan.

Oplossing:

Bepaal die afsnitte

$$\begin{aligned} \text{Laat } x = 0: \quad y &= (0)^2 - 9 \\ &= -9 \\ \text{Laat } y = 0: \quad 0 &= x^2 - 9 \\ x^2 &= 9 \\ \therefore x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Die afsnitte is $(0; -9)$ en $(-3; 0)$, $(3; 0)$.



c) Is die inverse 'n funksie? Gee 'n rede.

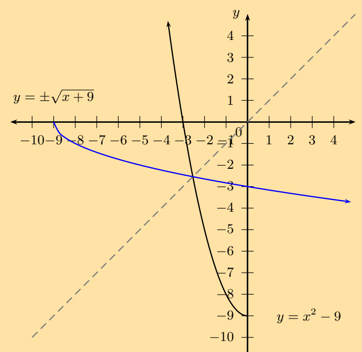
Oplossing:

Nee. Die inverse slaag nie die vertikale lyn toets nie. Dit is 'n een-tot-meer relasie.

d) Toon algebraïes en grafies aan wat die effek is van 'n beperking op die definisieversameling van H na $\{x : x \leq 0\}$.

Oplossing:

As die definisieversameling van H beperk word na $\{x : x \leq 0\}$, dan is die inverse $H^{-1}(x) = -\sqrt{x^2 + 9} \quad (x \geq -9, y \leq 0)$.



Die grafiek van H^{-1} sny die vertikale lyn slegs een keer op enige tydstip en dus word die vertikale lyn toets geslaag.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29WH 2. 29WJ 3. 29WK 4a. 29WM 4b. 29WN 4c. 29WP
5. 29WQ

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

3.8 Nog logaritmes vir verryking

Logaritmiese wette

Oefening 3 – 14: Ons pas die logaritmiese wet: $\log_a xy = \log_a (x) + \log_a (y)$ **toe**

1. Indien moontlik, vereenvoudig die volgende:

a) $\log_8 (10 \times 10)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \log_8 (10 \times 10) &= \log_8 10 + \log_8 10 \\ &= 2 \log_8 10 \end{aligned}$$

b) $\log_2 14$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \log_2 14 &= \log_2 (2 \times 7) \\ &= \log_2 2 + \log_2 7 \\ &= 1 + \log_2 7 \end{aligned}$$

c) $\log_2 (8 \times 5)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \log_2 (8 \times 5) &= \log_2 (2 \times 2 \times 2 \times 5) \\ &= \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 5 \\ &= 3 \log_2 2 + \log_2 5 \\ &= 3(1) + \log_2 5 \end{aligned}$$

d) $\log_{16} (x + y)$

Oplossing:

$\log_{16} (x + y)$ kan nie as aparte logaritmes geskryf word nie.

e) $\log_2 2xy$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \log_2 2xy &= \log_2 (2 \times x \times y) \\ &= \log_2 2 + \log_2 x + \log_2 y \\ &= 1 + \log_2 x + \log_2 y \end{aligned}$$

f) $\log (5 + 2)$

Oplossing:

$\log (5 + 2) = \log 7$

Let op: $\log (5 + 2) \neq \log 5 + \log 2$. Moenie dit verwar met die toepassing van die distributiewe wet nie: $a(b + c) = ab + ac$.

2. Indien moontlik, skryf die volgende as 'n een term:

a) $\log 15 + \log 2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \log 15 + \log 2 &= \log (15 \times 2) \\ &= \log 30 \end{aligned}$$

b) $\log 1 + \log 5 + \log \frac{1}{5}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \log 1 + \log 5 + \log \frac{1}{5} &= \log \left(1 \times 5 \times \frac{1}{5}\right) \\ &= \log 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

c) $1 + \log_3 4$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 1 + \log_3 4 &= \log_3 3 + \log_3 4 \\ &= \log_3 (3 \times 4) \\ &= \log_3 12 \end{aligned}$$

d) $(\log x)(\log y) + \log x$

Oplossing:

$$\begin{aligned} (\log x)(\log y) + \log x &= (\log x)[\log y + 1] \\ &= (\log x)(\log y + \log 10) \\ &= (\log x)(\log 10y) \end{aligned}$$

e) $\log 7 \times \log 2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \log 7 \times \log 2 &= \log 7 \times \log 2 \\ &\text{kan nie verder vereenvoudig word nie} \\ \text{Nota:} \quad \log 7 \times \log 2 &\neq \log (7 + 2) \end{aligned}$$

f) $\log_2 7 + \log_3 2$

Oplossing:

Dit kan nie as een term geskryf word nie omdat die grondtalle verskil.

g) $\log_a p + \log_a q$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \log_a p + \log_a q &= \log_a (p \times q) \\ &= \log_a pq \end{aligned}$$

h) $\log_a p \times \log_a q$

Oplossing:

Dit is alreeds een term: $(\log_a p)(\log_a q)$

3. Vereenvoudig die volgende

a) $\log x + \log y + \log z$

Oplossing:

$$\log_x + \log y + \log z = \log xyz$$

b) $\log ab + \log bc + \log cd$

Oplossing:

$$\log ab + \log bc + \log cd = \log ab^2c^2d$$

c) $\log 125 + \log 2 + \log 8$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log 125 + \log 2 + \log 8 &= \log\left(125 \times 2 \times 8\right) \\ &= \log 2000 \\ &= \log\left(2 \times 10 \times 10 \times 10\right) \\ &= \log 2 + \log 10 + \log 10 + \log 10 \\ &= \log 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= \log 2 + 3\end{aligned}$$

d) $\log_4 \frac{3}{8} + \log_4 \frac{10}{3} + \log_4 \frac{16}{5}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_4 \frac{3}{8} + \log_4 \frac{10}{3} + \log_4 \frac{16}{5} &= \log_4 \left(\frac{3}{8} \times \frac{10}{3} \times \frac{16}{5}\right) \\ &= \log_4 4 \\ &= 1\end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29WR	1b. 29WS	1c. 29WT	1d. 29WV	1e. 29WW	1f. 29WX
2a. 29WY	2b. 29WZ	2c. 29X2	2d. 29X3	2e. 29X4	2f. 29X5
2g. 29X6	2h. 29X7	3a. 29X8	3b. 29X9	3c. 29XB	3d. 29XC

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 3 – 15: Ons pas die logaritmiese wet: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ toe

1. Brei die volgende uit en vereenvoudig indien moontlik:

a) $\log \frac{100}{3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log \frac{100}{3} &= \log 100 - \log 3 \\ &= \log\left(10 \times 10\right) - \log 3 \\ &= \log 10 + \log 10 - \log 3 \\ &= 1 + 1 - \log 3 \\ &= 2 - \log 3\end{aligned}$$

b) $\log_2 7\frac{1}{2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_2 7\frac{1}{2} &= \log_2 \frac{15}{2} \\ &= \log_2 15 - \log_2 2 \\ &= \log_2 15 - 1\end{aligned}$$

c) $\log_{16} \frac{x}{y}$

Oplossing:

$$\log_{16} \frac{x}{y} = \log_{16} x - \log_{16} y$$

d) $\log_{16} (x - y)$

Oplossing:

Dit kan nie vereenvoudig word nie.

e) $\log_5 \frac{5}{8}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_5 \frac{5}{8} &= \log_5 5 - \log_5 8 \\ &= 1 - \log_5 8\end{aligned}$$

f) $\log_x \frac{y}{r}$

Oplossing:

$$\log_x \frac{y}{r} = \log_x y - \log_x r$$

2. Skryf die volgende as een term:

a) $\log 10 - \log 50$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log 10 - \log 50 &= \log \frac{10}{50} \\ &= \log \frac{1}{5} \\ &= \log 5^{-1} \\ &= -\log 5\end{aligned}$$

b) $\log_3 36 - \log_3 4$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_3 36 - \log_3 4 &= \log_3 \frac{36}{4} \\ &= \log_3 9 \\ &= \log_3 (3 \times 3) \\ &= \log_3 3 + \log_3 3 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

c) $\log_a p - \log_a q$

Oplossing:

$$\log_a p - \log_a q = \log_a \frac{p}{q}$$

d) $\log_a (p - q)$

Oplossing:

Dit kan nie vereenvoudig word nie.

e) $\log 15 - \log_2 5$

Oplossing:

Dit kan nie vereenvoudig word nie want die grondtalle verskil.

f) $\log 15 - \log 5$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log 15 - \log 5 &= \log \frac{15}{5} \\ &= \log 3\end{aligned}$$

3. Vereenvoudig die volgende

a) $\log 450 - \log 9 - \log 5$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log 450 - \log 9 - \log 5 &= \log \left(\frac{450}{9 \times 5}\right) \\ &= \log 10 \\ &= 1\end{aligned}$$

Alternatiewe metode:

$$\begin{aligned}\log 450 - \log 9 - \log 5 &= \log \frac{450}{9} - \log 5 \\ &= \log 50 - \log 5 \\ &= \log \frac{50}{5} \\ &= \log 10 \\ &= 1\end{aligned}$$

b) $\log \frac{4}{5} - \log \frac{3}{25} - \log \frac{1}{15}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log \frac{4}{5} - \log \frac{3}{25} - \log \frac{1}{15} &= \log \left(\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{25} \times \frac{1}{15}}\right) \\ &= \log \left(\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{125}}\right) \\ &= \log 100 \\ &= 2\end{aligned}$$

Alternatiewe metode:

$$\begin{aligned}\log \frac{4}{5} - \log \frac{3}{25} - \log \frac{1}{15} &= \log \frac{4}{5} - \left(\log \frac{3}{25} + \log \frac{1}{15}\right) \\ &= \log \frac{4}{5} - \log \left(\frac{3}{25} \times \frac{1}{15}\right) \\ &= \log \frac{4}{5} - \log \left(\frac{3}{25 \times 15}\right) \\ &= \log \frac{4}{5} - \log \left(\frac{1}{125}\right) \\ &= \log \left(\frac{4}{5} \div \frac{1}{125}\right) \\ &= \log \left(\frac{4}{5} \times \frac{125}{1}\right) \\ &= \log 100 \\ &= \log 10 + \log 10 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

4. Vini en Dirk het hul wiskunde huiswerk voltooi en mekaar se antwoorde getoets. Vergelyk die twee metodes hieronder en besluit of hulle reg of verkeerd is:

Vraag:

Vereenvoudig die volgende

$$\log m - \log n - \log p - \log q$$

Vini se antwoord:

$$\begin{aligned}\log m - \log n - \log p - \log q &= (\log m - \log n) - \log p - \log q \\ &= \left(\log \frac{m}{n} - \log p\right) - \log q \\ &= \log \left(\frac{m}{n} \times \frac{1}{p}\right) - \log q \\ &= \log \frac{m}{np} - \log q \\ &= \log \frac{m}{np} \times \frac{1}{q} \\ &= \log \frac{m}{npq}\end{aligned}$$

Dirk se antwoord:

$$\begin{aligned}\log m - \log n - \log p - \log q &= \log m - (\log n + \log p + \log q) \\ &= \log m - \log (n \times p \times q) \\ &= \log m - \log (npq) \\ &= \log \frac{m}{npq}\end{aligned}$$

Oplossing:

Beide se metodes is reg.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29XD	1b. 29XF	1c. 29XG	1d. 29XH	1e. 29XJ	1f. 29XK
2a. 29XM	2b. 29XN	2c. 29XP	2d. 29XQ	2e. 29XR	2f. 29XS
3a. 29XT	3b. 29XV	4. 29XW			

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Vereenvoudiging van logaritmes

Oefening 3 – 16: Vereenvoudiging van logaritmes

Vereenvoudig die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

1. $8^{\frac{2}{3}} + \log_2 32$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}8^{\frac{2}{3}} + \log_2 32 &= \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} + \log_2 (2^5) \\ &= 2^2 + 5\log_2 2 \\ &= 4 + 5 \\ &= 9\end{aligned}$$

2. $2\log 3 + \log 2 - \log 5$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 2\log 3 + \log 2 - \log 5 &= \log 3^2 + \log 2 - \log 5 \\ &= \log \frac{9 \times 2}{5} \\ &= \log \frac{18}{5} \end{aligned}$$

3. $\log_2 8 - \log 1 + \log_4 \frac{1}{4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \log_2 8 - \log 1 + \log_4 \frac{1}{4} &= \log_2 2^3 - 0 + \log_4 4^{(-1)} \\ &= 3\log_2 2 - 1\log_4 4 \\ &= 3(1) - 1(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

4. $\log_8 1 - \log_5 \frac{1}{25} + \log_3 9$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \log_8 1 - \log_5 \frac{1}{25} + \log_3 9 &= 0 - \log_5 5^{(-2)} + \log_3 3^2 \\ &= -(-2)\log_5 5 + 2\log_3 3 \\ &= 2(1) + 2(1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29XX 2. 29XY 3. 29XZ 4. 29Y2

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oplossing van logaritmiese vergelykings

Oefening 3 – 17: Oplossing van logaritmiese vergelykings

1. Bepaal die waarde van a (korrek tot 2 desimale plekke):

a) $\log_3 a - \log 1{,}2 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \log_3 a - \log 1{,}2 &= 0 \\ \log_3 a &= \log 1{,}2 \end{aligned}$$

Verander na eksponensiële vorm:

$$\begin{aligned} 3^{\log 1{,}2} &= a \\ \therefore a &= 1{,}09 \end{aligned}$$

Alternatiewe (langer) metode:

$$\begin{aligned}\log_3 a - \log 1{,}2 &= 0\\ \log_3 a &= \log 1{,}2\\ \frac{\log a}{\log 3} &= \log 1{,}2\\ \log a &= \log 3 \times \log 1{,}2\\ \log a &= 0{,}037\ldots\\ \therefore a &= 1{,}09\end{aligned}$$

b) $\log_2 (a-1) = 1{,}5$

Oplossing:

$$\log_2 (a-1) = 1{,}5$$

Verander na eksponensiële vorm:

$$\begin{aligned}2^{1{,}5} &= a-1\\ 2^{1{,}5}+1 &= a\\ \therefore a &= 3{,}83\end{aligned}$$

Alternatiewe (langer) metode:

$$\begin{aligned}\log_2 (a-1) &= 1{,}5\\ \frac{\log (a-1)}{\log 2} &= 1{,}5\\ \log (a-1) &= \log 2 \times 1{,}5\\ \therefore a-1 &= 2{,}83\ldots\\ \therefore a &= 3{,}83\end{aligned}$$

c) $\log_2 a - 1 = 1{,}5$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_2 a - 1 &= 1{,}5\\ \log_2 a &= 2{,}5\end{aligned}$$

Verander na eksponensiële vorm:

$$\begin{aligned}2^{2{,}5} &= a\\ \therefore a &= 5{,}66\end{aligned}$$

Alternatiewe (langer) metode:

$$\begin{aligned}\log_2 a - 1 &= 1{,}5\\ \frac{\log a}{\log 2} &= 2{,}5\\ \log a &= \log 2 \times 2{,}5\\ \therefore a &= 5{,}66\end{aligned}$$

d) $3^a = 2{,}2$

Oplossing:

$$\begin{aligned}3^a &= 2{,}2\\ \therefore a &= \log_3 2{,}2\\ &= \frac{\log 2{,}2}{\log 3}\\ \therefore a &= 0{,}72\end{aligned}$$

e) $2^{(a+1)} = 0{,}7$
Oplossing:

$$\begin{aligned} 2^{(a+1)} &= 0{,}7 \\ \therefore a + 1 &= \log_2 0{,}7 \\ \therefore a &= \frac{\log 0{,}7}{\log 2} - 1 \\ &= -1{,}51 \end{aligned}$$

f) $(1{,}03)^{\frac{a}{2}} = 2{,}65$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (1{,}03)^{\frac{a}{2}} &= 2{,}65 \\ \therefore \frac{a}{2} &= \log_{1{,}03} 2{,}65 \\ \therefore a &= 2 \times \frac{\log 2{,}65}{\log 1{,}03} \\ &= 65{,}94 \end{aligned}$$

g) $(9)^{(1-2a)} = 101$
Oplossing:

$$\begin{aligned} (9)^{(1-2a)} &= 101 \\ \therefore 1 - 2a &= \log_9 101 \\ \therefore 1 - \frac{\log 101}{\log 9} &= 2a \\ -1{,}10\ldots &= 2a \\ \therefore -0{,}55 &= a \end{aligned}$$

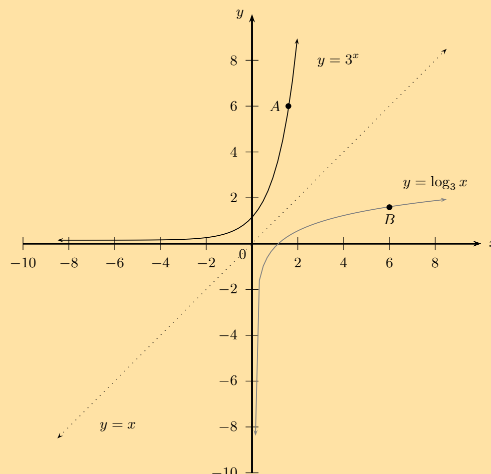
2. Gegee $y = 3^x$.

a) Skryf die vergelyking van die inverse van $y = 3^x$ in die vorm $y = \ldots$ neer
Oplossing:
$y = \log_3 x$

b) As $6 = 3^p$, bepaal die waarde van p (korrek tot een desimale plek).
Oplossing:

$$\begin{aligned} p &= \log_3 6 \\ &= \frac{\log 6}{\log 3} \\ &= 1{,}6 \end{aligned}$$

c) Trek die grafiek van $y = 3^x$ en sy inverse. Stip die punte $A(p; 6)$ en $B(6; p)$.
Oplossing:



Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29Y3 1b. 29Y4 1c. 29Y5 1d. 29Y6 1e. 29Y7 1f. 29Y8
1g. 29Y9 2. 29YB

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Opsomming

Oefening 3 – 18: Logaritmes (SLEGS VIR VERRYKING)

1. Sê of die volgende waar of onwaar is. Indien onwaar, verander die stelling sodat dit waar is.

   a) $\log t + \log d = \log (t + d)$
   Oplossing:
   Onwaar: $\log t + \log d = \log (t \times d)$

   b) As $p^q = r$, dan sal $q = \log_r p$
   Oplossing:
   Onwaar: $q = \log_p r$

   c) $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$
   Oplossing:
   Waar

   d) $\log A - B = \frac{\log A}{\log B}$
   Oplossing:
   Onwaar: $\log (A) - B$ kan nie verder vereenvoudig word nie.

   e) $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$
   Oplossing:
   Waar

   f) $\log_k m = \frac{\log_p k}{\log_p m}$
   Oplossing:
   Onwaar: $\log_k m = \frac{\log_p m}{\log_p k}$

   g) $\log_n \sqrt{b} = \frac{1}{2} \log_n b$
   Oplossing:
   Waar

   h) $\log_p q = \frac{1}{\log_q p}$
   Oplossing:
   Waar

   i) $2 \log_2 a + 3 \log a = 5 \log a$
   Oplossing:
   Onwaar: grondtalle is verskillend

   j) $5 \log x + 10 \log x = 5 \log x^3$
   Oplossing:
   Waar

   k) $\frac{\log_n a}{\log_n b} = \log_n \frac{a}{b}$
   Oplossing:
   Onwaar: kan nie vereenvoudig word na 'n enkele logaritme nie

   l) $\log (A + B) = \log A + \log B$

Oplossing:

Onwaar: moenie dit verwar met $\log{(AB)} = \log A + \log B$ of met die distributiewe wet $x(a+b) = ax + ab$ nie.

m) $\log 2a^3 = 3\log 2a$

Oplossing:

Onwaar: $\log 2a^3 = \log 2 + 3\log a$

n) $\frac{\log_n a}{\log_n b} = \log_n{(a-b)}$

Oplossing:

Onwaar: moenie dit verwar met $\log_n\left(\frac{a}{b}\right) = \log_n a - \log_n b$ nie. LK kan nie vereenvoudig word nie.

2. Vereenvoudig die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) $\log 7 - \log 0{,}7$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log 7 - \log 0{,}7 &= \log \frac{7}{0{,}7}\\ &= \log 10\\ &= 1\end{aligned}$$

b) $\log 8 \times \log 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log 8 \times \log 1 &= \log 8 \times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

c) $\log \frac{1}{3} + \log 300$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log \frac{1}{3} + \log 300 &= \log\left(\frac{1}{3} \times 300\right)\\ &= \log 100\\ &= \log 10^2\\ &= 2\log 10\\ &= 2\end{aligned}$$

d) $2\log 3 + \log 2 - \log 6$

Oplossing:

$$\begin{aligned}2\log 3 + \log 2 - \log 6 &= \log 3^2 + \log 2 - \log 6\\ &= \log \frac{9\times 2}{6}\\ &= \log \frac{18}{6}\\ &= \log 3\end{aligned}$$

3. Gegee $\log 5 = 0{,}7$. Bepaal die waarde van die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) $\log 50$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log 50 &= \log 5 + \log 10\\ &= 0{,}7 + 1\\ &= 1{,}7\end{aligned}$$

b) $\log 20$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log 20 &= \log \frac{100}{5} \\ &= \log 100 - \log 5 \\ &= 2 - 0{,}7 \\ &= 1{,}3\end{aligned}$$

c) $\log 25$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log 25 &= \log 5^2 \\ &= 2 \times \log 5 \\ &= 2 \times 0{,}7 \\ &= 1{,}4\end{aligned}$$

d) $\log_2 5$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_2 5 &= \frac{\log 5}{\log 2} \\ &= \frac{\log 5}{\log \frac{10}{5}} \\ &= \frac{\log 5}{\log 10 - \log 5} \\ &= \frac{0{,}7}{1 - 0{,}7} \\ &= \frac{0{,}7}{0{,}3} \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{10}{3} \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

e) $10^{0{,}7}$

Oplossing:

As $\log 5 = 0{,}7$, sal $10^{0{,}7} = 5$.

4. Gegee $A = \log_8 1 - \log_5 \frac{1}{25} + \log_3 9$.

a) Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, toon aan dat $A = 4$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}A &= \log_8 1 - \log_5 \frac{1}{25} + \log_3 9 \\ &= 0 - \log_5 5^{-2} + \log_3 3^2 \\ &= 0 - (-2)\log_5 5 + (2)\log_3 3 \\ &= 2 + 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

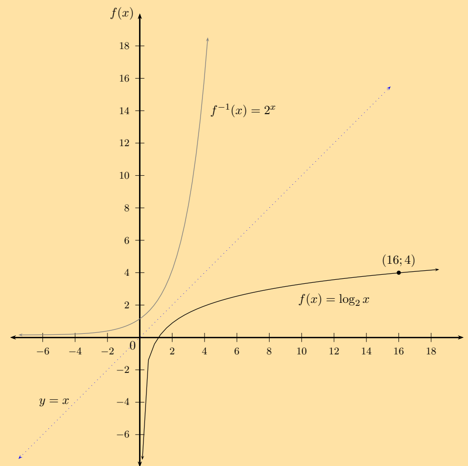
b) Los nou vir x op as $\log_2 x = A$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\log_2 x &= 4 \\ \therefore x &= 2^4 \\ x &= 16\end{aligned}$$

c) Laat $f(x) = \log_2 x$. Trek die grafiek van f en f^{-1}. Dui die punt $(x; A)$ op die grafiek aan.

Oplossing:



5. Los vir x op as $\frac{35^x}{7^x} = 15$. Gee die antwoord korrek tot twee desimale plekke.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{35^x}{7^x} &= 15 \\
\frac{7^x \ . \ 5^x}{7^x} &= 15 \\
5^x &= 15 \\
\therefore x &= \log_5 15 \\
&= \frac{\log 15}{\log 5} \\
&= 1{,}68
\end{aligned}$$

6. Gegee $f(x) = 5 \times (1{,}5)^x$ en $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

a) Vir watter heeltallige waardes van x sal $f(x) < 295$?

Oplossing:

$$\begin{aligned}
5 \times (1{,}5)^x &< 295 \\
\therefore \log (1{,}5)^x &< \log 59 \\
x \log (1{,}5) &< \log 59 \\
x &< \frac{\log 59}{\log (1{,}5)} \qquad \text{nota: } \log (1{,}5) > 0 \\
x &< 10{,}0564\ldots
\end{aligned}$$

Dus sal, $x < 10, (x \in \mathbb{Z})$.

b) Vir watter waardes van x sal $g(x) \geq 2{,}7 \times 10^{-7}$. Gee antwoord tot die naaste heelgetal.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4}\right)^x &\geq 2{,}7 \times 10^{-7} \\
\log \left(\frac{1}{4}\right)^x &\geq \log 2{,}7 \times 10^{-7} \\
x \log \left(\frac{1}{4}\right) &\geq \log 2{,}7 \times 10^{-7} \\
x &\leq \frac{\log 2{,}7 \times 10^{-7}}{\log \left(\frac{1}{4}\right)} \qquad \text{nota: } \log \left(\frac{1}{4}\right) < 0 \\
&\leq 10{,}9\ldots \\
\therefore x &< 11
\end{aligned}
$$

Belangrik: let op dat die ongelykheidsteken van rigting verander as ons beide kante met $\log\left(\frac{1}{4}\right) = -\log 4$ deel, omdat dit 'n negatiewe waarde het.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29YC	1b. 29YD	1c. 29YF	1d. 29YG	1e. 29YH	1f. 29YJ
1g. 29YK	1h. 29YM	1i. 29YN	1j. 29YP	1k. 29YQ	1l. 29YR
1m. 29YS	1n. 29YT	2a. 29YV	2b. 29YW	2c. 29YX	2d. 29YY
3a. 29YZ	3b. 29Z2	3c. 29Z3	3d. 29Z4	3e. 29Z5	4. 29Z6
5. 29Z7	6. 29Z8				

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK



Finansies

- Bespreek terminologie
- Baie belangrik om te beklemtoon dat leerders nie moet afrond voor die finale antwoord nie, aangesien dit akkuraatheid beïnvloed.
- Leerders behoort die berekening in in een stap te doen deur die geheuefunksie op hulle sakrekenaars te gebruik.
- Trek tydlyne wat die onderskeie tydperke, rentekoerse en enige deposito's of onttrekkings aandui.
- Verduidelik en bespreek die verskil tussen toekomstige en huidige waarde annuïteite.
- Leerders moet altyd let op hoe dikwels 'n gegewe rentekoers saamgestel word.
- Leerders moet versigtig wees om die regte aantal betalings vir die tydperk van die belegging te bereken.

4.1 Berekening van die beleggingstydperk

Oefening 4 – 1: Bepaling van die beleggingstydperk

1. Nzuzo belê R 80 000 teen 'n rentekoers van 7,5% per jaar, jaarliks saamgestel. Hoe lank sal dit vir sy belegging neem om tot R 100 000 te groei?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ 100\ 000 &= 80\ 000\left(1+\frac{7{,}5}{100}\right)^n \\ \frac{100\ 000}{80\ 000} &= (1{,}075)^n \\ \frac{5}{4} &= (1{,}075)^n \\ \therefore n &= \log_{1{,}075} 1{,}25 \\ &= \frac{\log 1{,}25}{\log 1{,}075} \\ &= 3{,}09\ldots \end{aligned}$$

   Dit sal net meer as 3 jaar neem.

2. Sally belê R 120 000 teen 'n rentekoers van 12% per jaar, kwartaalliks saamgestel. Hoe lank sal dit vir haar belegging neem om te verdubbel?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ 240\ 000 &= 120\ 000\left(1+\frac{12}{100\times 4}\right)^{4n} \\ \frac{240\ 000}{120\ 000} &= (1{,}03)^{4n} \\ 2 &= (1{,}03)^{4n} \\ \therefore 4n &= \log_{1{,}03} 2 \\ &= \frac{\log 2}{\log 1{,}03} \\ &= 23{,}449\ldots \\ \therefore n &= 5{,}86\ldots \end{aligned}$$

   Dit sal net meer as 5 jaar en 10 maande neem.

3. Toe Banele nog op hoërskool was het hy R 2250 belê in 'n spaarrekening met 'n rentekoers van 6,99% per jaar, jaarliks saamgestel. Hoe lank gelede het Banele 'n rekening oopgemaak as die balans nou R 2882,53 is? Skryf die antwoord in jare en maande.

Oplossing:

Hierdie is 'n saamgestelde rente probleem:

$$A = P(1+i)^n$$

Waar:

$$A = 2882{,}53$$
$$P = 2250$$
$$i = 0{,}0699$$

Vervang nou die bekende waardes en los op vir n:

$$\begin{aligned} 2882{,}53 &= 2250\,(1+0{,}0699)^n \\ 2882{,}53 &= 2250(1{,}0699)^n \\ \frac{2882{,}53}{2250} &= (1{,}0699)^n \end{aligned}$$

Verander na die logaritmiese vorm:

$$\begin{aligned} n &= \log_{1{,}0699}\left(\frac{2882{,}53}{2250}\right) \\ n &= 3{,}6666\ldots \end{aligned}$$

Banele het die geld vir ongeveer 3,67 jaar in die rekening gelos.

Ons moet egter ons antwoord gee in terme van jare en maande, nie as 'n desimale aantal jare nie. 3,6666 . . . jaar beteken 3 jaar en 'n aantal maande; om te bepaal hoeveel maande moet ons 0,6666 . . . jaar omskakel na maande toe.

Ons weet dat daar 12 maande in 'n jaar is.

Om 0,6666 . . . jaar om te skakel na maande toe, doen die volgende:

$$(0{,}6666\ldots)\text{ jaar} \times \left(\frac{12 \text{ maande}}{\text{jaar}}\right) = 8 \text{ maande}$$

Banele het die geld in die rekening 3 jaar en 8 maande gelede gedeponeer.

4. Die jaarlikse waardeverminderingskoers van 'n voertuig is 15%. 'n Nuwe voertuig kos R 122 000. Na hoeveel jaar sal die voertuig minder as R 40 000 werd wees?

Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1-i)^n \\ 40\ 000 &= 122\ 000\left(1-\frac{15}{100}\right)^n \\ \frac{40\ 000}{122\ 000} &= (0{,}85)^n \\ \frac{20}{61} &= (0{,}85)^n \\ \therefore n &= \log_{0{,}85}\frac{20}{61} \\ &= \frac{\log\frac{20}{61}}{\log 0{,}85} \\ &= 6{,}86\ldots \end{aligned}$$

Die voertuig sal minder as R 40 000 werd wees na omtrent 7 jaar.

5. 'n Ruk gelede het 'n man 'n spaarrekening by KMT Suid Bank oopgemaak en 'n bedrag van R 2100 daar belê. Die balans van sy rekening is nou R 3160,59. As die rekening 8,52% saamgestelde rente p.j. kry, bepaal hoeveel jaar gelede die man die deposito gemaak het.

Oplossing:

Ons skryf die saamgestelde renteformule neer, asook die gegewe inligting:

$$A = P(1+i)^n$$

Waar:

$$A = 3160{,}59$$
$$P = 2100$$
$$i = 0{,}0852$$

Ons weet alles, behalwe die waarde van n. Vervang en los op vir n.

$$3160{,}59 = 2100\,(1+0{,}0852)^n$$
$$3160{,}59 = 2100(1{,}0852)^n$$
$$\frac{3160{,}59}{2100} = (1{,}0852)^n$$

Gebruik die definisie van 'n logaritme om n op te los:

$$n = \log_{1{,}0852}\left(\frac{3160{,}59}{2100}\right)$$

Gebruik 'n sakrekenaar om die $\log$ te bereken:

$$n = 4{,}999\ldots$$

Die man het die deposito 5 jaar gelede gemaak.

6. Mr. en Mev. Dlamini wil geld spaar vir hul seun se universiteitsgelde. Hulle deponeer R 7000 in 'n spaarrekening met 'n vasgestelde rentekoers van 6,5% per jaar, jaarliks saamgestel. Hoe lank sal dit vat vir die deposito se waarde om te verdubbel?

   Oplossing:

$$A = P(1+i)^n$$

Waar:

$$A = 14\,000$$
$$P = 7000$$
$$i = 0{,}065$$

$$
\begin{aligned}
14\,000 &= 7000\left(1+\frac{6{,}5}{100}\right)^n \\
2 &= (1{,}065)^n \\
\therefore n &= \log_{1{,}065} 2 \\
&= \frac{\log 2}{\log 1{,}065} \\
&= 11{,}00\ldots \\
&= 11
\end{aligned}
$$

   Dit sal 11 jaar neem vir hulle deposito se waarde om te verdubbel.

7. 'n Universiteitsdosent tree af op die ouderdom van 60. Sy het R 300 000 oor die jare gespaar.

   a) Sy besluit om nie haar spaargeld te laat verminder teen vinniger as 15% per jaar nie. Hoe oud sal sy wees wanneer die waarde van haar spaargeld minder as R 50 000 is?

   Oplossing:

$$A = P(1+i)^n$$

Waar:

$$A = 50\,000$$
$$P = 300\,000$$
$$i = 0{,}15$$

$$
\begin{aligned}
50\ 000 &= 300\ 000\left(1-\frac{15}{100}\right)^n \\
\frac{1}{6} &= (0{,}85)^n \\
\therefore n &= \frac{\log \frac{1}{6}}{\log 0{,}85} \\
&= 11{,}024\ldots
\end{aligned}
$$

As sy haar geld versigtig bestuur, sal sy 71 jaar of ouer wees.

b) As sy nie haar spaargeld gebruik nie en al haar geld belê in 'n beleggingsrekening met 'n vasgestelde rentekoers van 5,95% per jaar, hoe lank sal dit vir haar belegging neem om tot R 390 000 te groei?

Oplossing:

$$A = P(1+i)^n$$

Waar:

$$
\begin{aligned}
A &= 390\ 000 \\
P &= 300\ 000 \\
i &= 0{,}0595
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
390\ 000 &= 300\ 000\left(1+\frac{5{,}95}{100}\right)^n \\
1{,}3 &= (1{,}0595)^n \\
\therefore n &= \frac{\log 1{,}3}{\log 1{,}0595} \\
&= 4{,}539\ldots
\end{aligned}
$$

Dit sal minder as 5 jaar neem.

8. Simosethu deponeer R 450 in 'n bankrekening in die Bank van Upington. Simosethu se rekening gee rente teen 'n koers van 7,11% p.j., maandeliks saamgestel. Na hoeveel jaar sal die bankrekening 'n balans van R 619,09 hê?

Oplossing:

Gebruik die saamgestelde renteformule om die waarde van n te bepaal.

$$A = P(1+i)^n$$

Waar:

$$
\begin{aligned}
A &= 619{,}09 \\
P &= 450 \\
i &= 0{,}0711
\end{aligned}
$$

In hierdie vraag is die rente elke maand betaalbaar. Daarom $i \to \frac{0{,}0711}{12}$ en $n \to (n \times 12)$. In hierdie geval verteenwoordig n die aantal jare; die produk $(n \times 12)$ stel die aantal kere voor wat die bank rente in die rekening inbetaal.

$$619{,}09 = 450\left(1+\frac{0{,}0711}{12}\right)^{(n\times 12)}$$

$$
\begin{aligned}
619{,}09 &= 450(1{,}00592\ldots)^{12n} \\
\frac{619{,}09}{450} &= (1{,}00592\ldots)^{12n} \\
1{,}37575\ldots &= (1{,}00592\ldots)^{12n}
\end{aligned}
$$

Nou moet ons die vergelyking verander na die logaritmiese vorm toe:

$$12n = \log_{1,005925}(1,37575\ldots)$$
$$12n = 54$$

Om die aantal jare te kry, los ons op vir n:

$$12n = 54$$
$$n = \frac{54}{12}$$
$$n = 4,5$$

Die geld was vir $4,5$ jaar in Simosethu se rekening.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29Z9 2. 29ZB 3. 29ZC 4. 29ZD 5. 29ZF 6. 29ZG
7. 29ZH 8. 29ZJ

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

4.3 Toekomstige waarde annuïteite

Oefening 4 – 2: Toekomstige waarde annuïteite

1. Shelly besluit om geld vir haar seun se toekoms te begin spaar. Aan die einde van elke maand betaal sy R 500 in 'n rekening by Durban Trust Bank, wat 'n jaarlikse rentekoers van $5,96\%$ verdien wat kwartaalliks saamgestel word.

   a) Bereken die balans in Shelly se rekening na 35 jaar.
   Oplossing:
   Skryf die gegewe inligting en die toekomswaarde formule neer:

$$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

$$x = 500$$
$$i = \frac{0,0596}{4}$$
$$n = 35 \times 4 = 140$$

   Vervang die bekende waardes en gebruik 'n sakrekenaar om F te bereken:

$$F = \frac{500\left[(1+\frac{0,0596}{4})^{140} - 1\right]}{\frac{0,0596}{4}}$$
$$= \text{R } 232\ 539,41$$

   b) Hoeveel geld het Shelly in haar rekening inbetaal gedurende die 35-jaar tydperk?
   Oplossing:
   Bereken die totale bedrag wat in die rekening inbetaal is:
   Shelly het elke maand R 500 inbetaal vir 35 jaar:

$$\text{Totaal deposito's: } = \text{R } 500 \times 12 \times 35$$
$$= \text{R } 210\ 000$$

c) Bereken hoeveel rente sy verdien het tydens die 35-jaar tydperk.

Oplossing:

Bereken die totale rente wat verdien is:

$$\begin{aligned}
\text{Totale rente} &= \text{finale rekening balans} - \text{totale deposito's} \\
&= \text{R } 232\ 539{,}41 - \text{R } 210\ 000 \\
&= \text{R } 22\ 539{,}41
\end{aligned}$$

2. Gerald wil oor 'n jaar 'n nuwe kitaar van R 7400 koop. Hoeveel geld moet hy aan die einde van die maand in sy spaarrekening inbetaal, wat 'n jaarlikse rentekoers van 9,5% verdien wat maandeliks saamgestel word?

Oplossing:

Skryf die gegewe inligting en die toekomswaarde formule neer:

$$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

Om die maandelikse betaling te bereken, maak ons x die onderwerp van die formule:

$$x = \frac{F \times i}{\left[(1+i)^n - 1\right]}$$

$$\begin{aligned}
F &= 7400 \\
i &= \frac{0{,}095}{12} \\
n &= 1 \times 12 = 12
\end{aligned}$$

Vervang die bekende waardes en bereken x:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{7400 \times \frac{0{,}095}{12}}{\left[(1 + \frac{0{,}095}{12})^{12} - 1\right]} \\
&= \text{R } 590{,}27
\end{aligned}$$

Skryf die finale antwoord neer:

Gerald moet elke maand R 590,27 inbetaal sodat hy sy kitaar kan bekostig.

3. Grace, 'n jong dame wat pas met 'n nuwe werk begin het, wil geld spaar vir haar toekoms. Sy besluit om elke maand R 1100 in 'n spaarrekening in te betaal. Haar geld gaan na 'n rekening by Eerste Gemeenskaplike Bank wat 8,9% rente per jaar verdien wat maandeliks saamgestel word.

a) Hoeveel geld sal Grace in haar rekening hê na 29 jaar?

Oplossing:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \\
\text{Waar:}\quad x &= \text{R } 1100 \\
i &= 0{,}089 \\
n &= 29
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{(1100)\left[\left(1 + \frac{0{,}089}{12}\right)^{(29 \times 12)} - 1\right]}{\left(\frac{0{,}089}{12}\right)} \\
&= \text{R } 1\ 792\ 400{,}11
\end{aligned}$$

Grace sal R 1 792 400,11 in haar rekening hê na 29 jaar.

b) Hoeveel geld het Grace in rekening inbetaal teen die einde van die 29 jaar-tydperk?

Oplossing:

Die totale bedrag wat Grace elke **jaar** spaar is $1100 \times 12 =$ R 13 200. So kan ons die totale bedrag wat sy spaar uitwerk deur te vermenigvuldig met die aantal jare: $13\ 200 \times 29 =$ R 382 800.

Na 29 jaar het Grace 'n totaal van R 382 800 in haar rekening gespaar.

4. Ruth besluit om vir haar aftrede te spaar, so sy maak 'n spaarrekening oop en maak dadelik 'n deposito van R 450. Haar rentekoers is 12% per jaar wat maandeliks saamgestel word. Daarna betaal sy elke maand R 450 in die rekening in vir 35 jaar. Hoeveel is haar spaarrekening werd teen die einde van die 35-jaar tydperk?

Oplossing:

Skryf die gegewe inligting en die toekomswaarde formule neer:

$$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

$$\begin{aligned} x &= 450 \\ i &= \frac{0{,}12}{12} \\ n &= 1 + (35 \times 12) = 421 \end{aligned}$$

Vervang die bekende waardes en bereken F:

$$\begin{aligned} F &= \frac{450\left[(1+\frac{0{,}12}{12})^{421} - 1\right]}{\frac{0{,}12}{12}} \\ &= \text{R } 2\ 923\ 321{,}08 \end{aligned}$$

Skryf die finale antwoord neer:

Ruth sal R 2 923 321,08 hê vir haar aftrede.

5. Musina Kredietverskaffers bied 'n spaarrekening aan met 'n rentekoers van 6,13% per jaar wat maandeliks saamgestel word. Monique wil geld spaar sodat sy 'n huis kan koop wanneer sy aftree. Sy besluit om 'n rekening oop te maak en maak gereelde maandelikse deposito's. Haar doelwit is om R 750 000 te hê na 35 jaar.

   a) Hoeveel geld moet Monique elke maand inbetaal om haar doelwit te bereik?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} F &= \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \\ F &= \text{R } 750\ 000 \\ i &= 0{,}0613 \\ n &= 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 750\ 000 &= \frac{x\left[\left(1+\frac{0{,}0613}{12}\right)^{(35\times 12)}\right]}{\left(\frac{0{,}0613}{12}\right)} \\ \therefore x &= \frac{750\ 000 \times \left(\frac{0{,}0613}{12}\right)}{\left[\left(1+\frac{0{,}0613}{12}\right)^{(35\times 12)}\right]} \\ &= 510{,}84927\ldots \end{aligned}$$

   Om R 750 000 te spaar in 35 jaar, sal Monique elke maand R 510,85 moet spaar.

   b) Hoeveel geld, tot die naaste rand, het Monique in haar rekening inbetaal teen die einde van die 35-jaar tydperk?

Oplossing:

Die finale bedrag wat in die vraag hier bo bereken is, sluit die geld wat Monique in die rekening inbetaal het, sowel as die rente wat deur die bank betaal is, in. Die totale hoeveelheid geld wat Monique inbetaal het gedurende die 35 jaar is die produk van 12 paaiemente per jaar, vir 35 jaar, en die bedrag self:

$$\text{R } 510{,}85 \times 12 \times 35 = \text{R } 214\ 557{,}00$$

Na 35 jaar het Monique 'n bedrag van R 214 557 in haar rekening inbetaal.

6. Lerato wil oor vyf en 'n half jaar 'n motor koop. Sy het R 30 000 gespaar in 'n aparte beleggingsrekening wat 13% saamgestelde rente per jaar verdien. As sy nie meer as R 160 000 wil spandeer op 'n motor nie en haar spaarrekening verdien 11% rente per jaar wat maandeliks saamgestel word, hoeveel geld moet sy elke maand in haar spaarrekening inbetaal?

   Oplossing:

   Bereken eers die opgeloopte bedrag vir die R 30 000 in Lerato se beleggingsrekening:

$$A = P(1+i)^n$$

$$\begin{aligned} P &= 30\ 000 \\ i &= 0{,}13 \\ n &= 5{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 30\ 000(1+0{,}13)^{5{,}5} \\ &= \text{R } 58\ 756{,}06 \end{aligned}$$

   Oor vyf en 'n half jaar moet Lerato 'n bedrag van R $160\ 000 - \text{R } 58\ 756{,}06 = \text{R } 101\ 243{,}94$ hê.

$$x = \frac{F \times i}{[(1+i)^n - 1]}$$

$$\begin{aligned} F &= 101\ 243{,}94 \\ i &= \frac{0{,}11}{12} \\ n &= 5{,}5 \times 12 = 66 \end{aligned}$$

   Vervang die bekende waardes en bereken x:

$$\begin{aligned} x &= \frac{101\ 243{,}94 \times \frac{0{,}11}{12}}{\left[(1+\frac{0{,}11}{12})^{66} - 1\right]} \\ &= \text{R } 1123{,}28 \end{aligned}$$

   Skryf die finale antwoord neer:

   Lerato moet elke maand R 1123,28 in haar spaarrekening inbetaal.

7. a) Harold deponeer elke Maandag R 30 in sy spaarrekening by Koning Bank, wat 'n rentekoers van 6,92% per jaar verdien en wat weekliks saamgestel word. Hoe lank sal dit Harold se rekening neem om 'n balans van R 4397,53 te bereik? Gee die antwoord as 'n aantal jare en dae tot die naaste heelgetal.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} F &= \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \\ F &= \text{R } 4397{,}53 \\ x &= \text{R } 30 \\ i &= 0{,}0692 \end{aligned}$$

$$4397{,}53 = \frac{(30)\left[\left(1+\frac{0{,}0692}{52}\right)^{(n\times 52)}-1\right]}{\left(\frac{0{,}0692}{52}\right)}$$

$$4397{,}53 = \frac{(30)\left[(1{,}00133)^{52n}-1\right]}{0{,}00133\ldots}$$

$$(0{,}00133\ldots)(4397{,}53) = (30)\left[(1{,}00133\ldots)^{52n}-1\right]$$

$$\frac{5{,}85209\ldots}{30} = \left[(1{,}00133\ldots)^{52n}-1\right]$$

$$0{,}19506\ldots + 1 = (1{,}00133\ldots)^{52n}$$

$$1{,}19506\ldots = (1{,}00133\ldots)^{52n}$$

Verander na logaritmiese vorm: $52n = \log_{1{,}00133\ldots}(1{,}19506\ldots)$

$$52n = 134$$

$$n = \frac{134}{52}$$

$$n = 2{,}57692\ldots$$

Om die finale antwoord vir hierdie vraag te kry, skakel $2{,}57692\ldots$ jare om na jare en dae.

$(0{,}57692\ldots)\times\frac{365}{\text{jaar}} = 210{,}577$ dae

Harold se belegging neem 2 jaar en 211 dae om 'n finale waarde van R $4397{,}53$ te bereik.

b) Hoeveel rente sal Harold van die bank af ontvang gedurende die tydperk van sy belegging?

Oplossing:

Die totale hoeveelheid wat Harold belê, is:

$30\times 52\times 2{,}57692\ldots =$ R $4020{,}00$

Dus sal die rente wat deur die bank betaal word R $4397{,}53$ − R $4020{,}00$ = R $377{,}53$ wees.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 29ZK 1b. 29ZM 1c. 29ZN 2. 29ZP 3. 29ZQ 4. 29ZR
5. 29ZS 6. 29ZT 7. 29ZV

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Delgingsfondse

Oefening 4 – 3: Delgingsfondse

1. Mfethu besit sy eie afleweringsbesigheid en sal sy bakkie oor 6 jaar moet vervang. Mfethu deponeer elke maand R 3100 in 'n delgingsfonds in, wat 5,3% rente verdien, maandeliks saamgestel.

    a) Watter bedrag sal in die fonds wees oor 6 jaar, wanneer Mfendu 'n nuwe bakkie wil koop?

    Oplossing:

$$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

Waar:

$$x = 3100$$
$$i = 0{,}053$$
$$n = 6$$

Rente word maandeliks saamgestel: $i = 0{,}053 \rightarrow \frac{0{,}053}{12}$ en $n = 6 \rightarrow 6 \times (12)$.

$$F = \frac{(3100)\left[\left(1+\frac{0{,}053}{12}\right)^{(6\times 12)} - 1\right]}{\left(\frac{0{,}053}{12}\right)}$$
$$= \text{R } 262\ 094{,}55$$

Na 6 jaar, sal Mfethu R 262 094,55 in sy delgingsfonds hê.

b) Sal Mfethu genoeg geld hê om 'n nuwe bakkie te koop as dit R 285 000 oor 6 jaar gaan kos?

Oplossing:

Nee, Mfethu het nie genoeg geld in sy rekening nie.

$$\text{R } 285\ 000 - \text{R } 262\ 094{,}55 = \text{R } 22\ 905{,}45$$

2. Atlantic Vervoermaatskappy koop 'n paneelwa vir R 265 000. Die paneelwa neem af in waarde op 'n verminderende saldo basis teen 17% per jaar. Die maatskappy beplan om hierdie paneelwa oor vyf jaar te vervang, en hulle verwag dat die prys van 'n nuwe paneelwa jaarliks teen 12% sal styg.

a) Bereken die boekwaarde van die paneelwa oor vyf jaar.

Oplossing:

$$P = 265\ 000$$
$$i = 0{,}17$$
$$n = 5$$

$$A = P(1-i)^n$$
$$= 265\ 000(1-0{,}17)^5$$
$$= \text{R } 104\ 384{,}58$$

b) Bepaal die hoeveelheid geld benodig in die delgingsfonds sodat die maatskappy 'n nuwe paneelwa oor vyf jaar sal kan bekostig.

Oplossing:

$$P = 265\ 000$$
$$i = 0{,}12$$
$$n = 5$$

$$A = P(1+i)^n$$
$$= 265\ 000(1+0{,}12)^5$$
$$= \text{R } 467\ 020{,}55$$

Dus die balans van die delgingsfonds (F) moet meer wees as die prys van 'n nuwe paneelwa oor vyf jaar, minus die bedrag verkry deur die verkoop van die ou paneelwa:

$$F = \text{R } 467\ 020{,}55 - \text{R } 104\ 384{,}58$$
$$= \text{R } 362\ 635{,}97$$

c) Bereken die bedrag van die maandelikse deposito's as die delgingsfonds 'n rentekoers van 11% per jaar verdien wat maandeliks saamgestel word.

Oplossing:

Bereken die maandelikse paaiement benodig in die delgingsfonds:

$$x = \frac{F \times i}{[(1+i)^n - 1]}$$

$$F = 362\,635{,}97$$
$$i = \frac{0{,}11}{12}$$
$$n = 5 \times 12 = 60$$

Vervang die waardes en bereken x

$$x = \frac{362\,635{,}97 \times \frac{0{,}11}{12}}{\left[(1 + \frac{0{,}11}{12})^{60} - 1\right]}$$
$$= \text{R } 4560{,}42$$

Dus, die maatskappy moet elke maand R 4560,42 deponeer.

3. Tonya besit Freeman Reisagentskap en sy sal haar rekenaar oor 7 jaar moet vervang. Tonya skep 'n delgingsfonds sodat sy 'n nuwe rekenaar, wat R 8450 gaan kos, sal kan bekostig. Die delgingsfonds verdien rente teen 'n koers van 7,67% kwartaalliks saamgestel.

a) Hoeveel geld moet Tonya kwartaalliks spaar sodat daar genoeg geld in die rekening sal wees om 'n nuwe rekenaar te koop?

Oplossing:

$$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

Waar:

$$F = 8450$$
$$i = 0{,}0767$$
$$n = 7$$

Rente word kwartaalliks saamgestel, dus $i = 0{,}0767 \rightarrow \frac{0{,}0767}{4}$ en $n = 7 \rightarrow 7 \times 4$

$$8450 = \frac{x\left[\left(1 + \frac{0{,}0767}{4}\right)^{(7\times 4)} - 1\right]}{\left(\frac{0{,}0767}{4}\right)}$$
$$\therefore x = \frac{\left(8450 \times \frac{0{,}0767}{4}\right)}{\left[\left(1 + \frac{0{,}0767}{4}\right)^{(7\times 4)} - 1\right]}$$
$$= 230{,}80273\ldots$$

Tonya moet kwartaalliks R 230,80 in die delgingsfonds deponeer.

b) Hoeveel rente (tot die naaste rand) betaal die bank in die fonds in teen die einde van die 7 jaar periode?

Oplossing:

Totale spaargeld:

$$\text{R } 230{,}80 \times 4 \times 7 = \text{R } 6462{,}40$$

Rente verdien:

$$\text{R } 8450 - \text{R } 6462{,}40 = \text{R } 1987{,}60$$

Tot die naaste rand, het die bank R 1988 in die rekening inbetaal.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29ZW 2. 29ZX 3. 29ZY

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 4 – 4: Huidige waarde annuïteite

1. 'n Eiendom kos R 1 800 000. Bereken die maandelikse betalings as die rentekoers 14% p.j. is, maandeliks saamgestel, en die lening oor 20 jaar afbetaal moet wees.

   Oplossing:
   Skryf die gegewe inligting en die huidige waarde formule neer:

   $$P = \frac{x\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

   Om die maandelikse terugbetaling te bepaal, maak ons x die onderwerp van die formule:

   $$x = \frac{P \times i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

   $$\begin{aligned} P &= \text{R } 1\ 800\ 000 \\ i &= \frac{0{,}14}{12} \\ n &= 20 \times 12 = 240 \end{aligned}$$

   Vervang die bekende waardes en bereken x:

   $$\begin{aligned} x &= \frac{1\ 800\ 000 \times \frac{0{,}14}{12}}{\left[1-\left(1+\frac{0{,}14}{12}\right)^{-240}\right]} \\ &= \text{R } 22\ 383{,}37 \end{aligned}$$

2. 'n Lening van R 4200 moet in twee gelyke jaarlikse betalings terugbetaal word. Bereken die bedrag van elke betaling as die rentekoers van 10% jaarliks saamgestel is.

   Oplossing:
   Skryf die gegewe inligting en die huidige waarde formule neer:

   $$P = \frac{x\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

   Om die maandelikse terugbetaling te bepaal, maak ons x die onderwerp van die formule:

   $$x = \frac{P \times i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

   $$\begin{aligned} P &= \text{R } 4200 \\ i &= 0{,}10 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

   Vervang die bekende waardes en bereken x:

   $$\begin{aligned} x &= \frac{4200 \times 0{,}10}{\left[1-(1+0{,}10)^{-2}\right]} \\ &= \text{R } 2420{,}00 \end{aligned}$$

3. Stefan en Marna wil 'n woonstel koop wat R 1,2 miljoen kos. Hulle ouers bied aan om 'n 20% betaling as deposito op die huis te betaal. Hulle moet 'n verband uitneem vir die balans. Wat is die maandelikse terugbetaling as die tydperk van die huislening 30 jaar is en die rentekoers is 7,5% p.j. maandeliks saamgestel?

Oplossing:

Skryf die gegewe inligting en die huidige waarde formule neer:

$$P = \frac{x\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{i}$$

Om die maandelikse terugbetaling te bepaal, maak ons x die onderwerp van die formule:

$$x = \frac{P \times i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

$$\begin{aligned} P &= \text{R } 1\ 200\ 000 - \left(\text{R } 1\ 200\ 000 \times \frac{20}{100}\right) \\ &= \text{R } 960\ 000 \\ i &= \frac{0{,}075}{12} \\ n &= 30 \times 12 = 360 \end{aligned}$$

Vervang die bekende waardes en bereken x:

$$\begin{aligned} x &= \frac{960\ 000 \times \frac{0{,}075}{12}}{\left[1 - \left(1 + \frac{0{,}075}{12}\right)^{-360}\right]} \\ &= \text{R } 6712{,}46 \end{aligned}$$

4. a) Ziyanda reël 'n verband vir R 17 000 van Langa Bank. As die bank rente teen 16,0% p.j. maandeliks saamgestel hef, bepaal Ziyanda se maandelikse terugbetaling as sy die verband wil terugbetaal oor 9 jaar.

Oplossing:

$$P = \frac{x\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{i}$$

Waar:

$$\begin{aligned} P &= 17\ 000 \\ i &= 0{,}16 \\ n &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17\ 000 &= \frac{x\left[1 - \left(1 + \frac{0{,}16}{12}\right)^{-(9\times 12)}\right]}{\left(\frac{0{,}16}{12}\right)} \\ \therefore x &= \frac{17\ 000 \times \left(\frac{0{,}16}{12}\right)}{\left[1 - \left(1 + \frac{0{,}16}{12}\right)^{-(9\times 12)}\right]} \\ &= 297{,}93 \end{aligned}$$

Ziyanda moet elke maand R 297,93 betaal.

b) Wat is die totale koste van die verband?

Oplossing:

Totale koste: R $297{,}93 \times 12 \times 9 =$ R 32 176,44

Ziyanda het die bank 'n totaal van R 32 176,44 betaal.

5. Dullstroom Bank bied persoonlike lenings aan teen 'n rentekoers van 15,63% p.j. halfjaarliks saamgestel. Lubabale leen R 3000 en moet R 334,93 elke ses maande terugbetaal totdat die lening ten volle terugbetaal is.

a) Hoe lank gaan dit vir Lubabale vat om die lening terug te betaal?

Oplossing:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i} \\ P &= 3000 \\ x &= 334{,}93 \\ i &= 0{,}1563 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3000 &= \frac{334{,}93\left[1-\left(1+\frac{0{,}1563}{2}\right)^{-(n\times 2)}\right]}{\left(\frac{0{,}1563}{2}\right)} \\ 3000 &= \frac{334{,}93\left[1-(1{,}07815\ldots)^{-2n}\right]}{0{,}07815\ldots} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0{,}07815\ldots)(3000) &= 334{,}93\left[1-(1{,}07815\ldots)^{-2n}\right] \\ \frac{(234{,}45)}{(334{,}93)} &= 1-(1{,}07815\ldots)^{-2n} \\ 0{,}69999\ldots &= 1-(1{,}07815\ldots)^{-2n} \\ -0{,}30001\ldots &= -(1{,}07815\ldots)^{-2n} \\ 0{,}3\ldots &= (1{,}07815\ldots)^{-2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2n &= \log_{1{,}07815\ldots}(0{,}3\ldots) \\ -2n &= -16 \\ n &= \frac{-16}{-2} \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Dit sal 8 jaar neem.

b) Hoeveel rente gaan Lubabale betaal?

Oplossing:

Totale koste van die lening: $334{,}93 \times 2 \times 8 =$ R 5358,88.

Die totale bedrag wat Lubabale aan rente betaal, is $5358{,}88 - 3000 =$ R 2358,88

6. Likengkeng het nou net by 'n nuwe werk begin en wil 'n motor koop wat R 232 000 kos. Sy besoek Soweto SpaarBank, waar sy 'n lening kan kry met 'n rentekoers van 15,7% p.j. maandeliks saamgestel. Likengkeng het genoeg geld gespaar om 'n deposito van R 50 000 te betaal. Sy kry 'n lening vir die balans van die betaling, wat oor 'n tydperk van 6 jaar terugbetaal word.

a) Wat is Likengkeng se maandelikse terugbetaling op haar lening?

Oplossing:

Die balans van die betaling: R 232 000 − R 50 000 = R 182 000

Dus neem Likengkeng 'n lening uit vir R 182 000.

$$\begin{aligned} P &= \frac{x\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i} \\ P &= 182\ 000 \\ i &= 0{,}157 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 182\ 000 &= \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0{,}157}{12}\right)^{-(6\times 12)}\right]}{\left(\frac{0{,}157}{12}\right)} \\ \therefore x &= \frac{182\ 000 \times \left(\frac{0{,}157}{12}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{0{,}157}{12}\right)^{-(6\times 12)}\right]} \\ &= \text{R } 3917{,}91 \end{aligned}$$

Likengkeng moet elke maand R $3917{,}91$ betaal.

b) Hoeveel gaan die motor vir Likengkeng kos?

Oplossing:

Die totale bedrag betaal: R $3917{,}91 \times 12 \times 6 =$ R $282\ 089{,}87$

Dus het Likengkeng 'n totaal van R $282\ 089{,}87 +$ R $50\ 000 =$ R $332\ 089{,}87$ betaal.

7. Anathi is 'n koringboer en benodig 'n stoortenk wat R $219\ 450$ kos. Sy het haar vorige tenk 14 jaar gelede vir R $196\ 000$ gekoop. Die waarde van die ou stoortenk verswak teen $12{,}1\%$ per jaar teen 'n verminderde saldo, en sy beplan om dit teen die huidige waarde te verhandel. Anathi sal dan 'n lening moet uitneem om die balans van die aankoopprys aan te vul.

Orsmond Bank bied lenings met 'n saamgestelde rentekoers van $9{,}71\%$ per jaar vir lenings tot en met R $170\ 000$ en $9{,}31\%$ per jaar vir enige groter lenings. Die leningsooreenkoms laat Anathi 'n grasieperiode van ses maande toe (geen betalings word dus gemaak nie) en verwag dat die lening oor 'n tydperk van 30 jaar terugbetaal word.

a) Bepaal die maandelikse paaiement.

Oplossing:

Anathi besluit om die ou stoortenk in te ruil om die die koste van die nuwe een te verreken.

$$\begin{aligned} A &= P(1-i)^n \\ &= 196\ 000(1-0{,}121)^{14} \\ &= 196\ 000(0{,}16437\ldots) \\ &= 32\ 218{,}12946\ldots \end{aligned}$$

Die ou stoortenk se waarde is R $32\ 218{,}13$.

Dus is die lenigsbedrag vir die nuwe tenk:

$$\text{R } 219\ 450 - \text{R } 32\ 218{,}13 = \text{R } 187\ 231{,}87$$

Bepaal watter rentekoers gebruik word: die lening is meer as R $170\ 000{,}00$, dus kry Anathi die laer rentekoers van $9{,}31\%$.

Bereken die waarde van die lening teen die einde van die grasieperiode.

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 187\ 231{,}87\left(1+\frac{0{,}0931}{12}\right)^6 \\ &= 196\ 118{,}31962\ldots \end{aligned}$$

Na die eerste ses maande van die leningstydperk, verhoog die bedrag wat sy skuld na R $196\ 118{,}32$.

Ons kan nou die huidige waarde formule gebruik om die waarde van x op te los. Onthou dat die termyn vir hierdie berekening $29{,}5$ jaar is.

$$\begin{aligned} 196\ 118{,}32 &= \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0{,}0931}{12}\right)^{-(29{,}5\times 12)}\right]}{\left(\frac{0{,}0931}{12}\right)} \\ x &= \frac{196\ 118{,}32 \times \frac{0{,}0931}{12}}{\left[1-\left(1+\frac{0{,}0931}{12}\right)^{-(29{,}5\times 12)}\right]} \\ x &= 1627{,}0471\ldots \end{aligned}$$

Dus moet Anathi R $1627{,}05$ elke maand betaal.

b) Wat is die totale hoeveelheid rente wat Anathi op die lening betaal?

Oplossing:

Die totale koste van die lening is:

$$\text{R } 1627{,}05 \times 12 \times 29{,}5 = \text{R } 575\ 975{,}70$$

Dus is die rentebedrag:

$$\text{R } 575\ 975{,}70 - \text{R } 187\ 231{,}87 = \text{R } 388\ 743{,}83$$

Die totale hoeveelheid rente wat Anathi betaal is R $388\ 743{,}83$.

c) Hoeveel geld sou Anathi gespaar het indien sy nie die ses maande grasieperiode geneem het nie.

Oplossing:

Vir hierdie berekening is die lening R 187 231,87 en die leningstydperk 30 jaar:

$$187\ 231{,}87 = \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0{,}0931}{12}\right)^{-(30\times 12)}\right]}{\left(\frac{0{,}0931}{12}\right)}$$
$$x = \frac{187\ 231{,}87 \times \frac{0{,}0931}{12}}{\left[1-\left(1+\frac{0{,}0931}{12}\right)^{-360}\right]}$$
$$x = 1548{,}458\ldots$$

Dus moet Anathi R $1548{,}46$ elke maand betaal.
Die totale koste van die lening sal dan wees:

$$\text{R } 1548{,}46 \times 12 \times 30 = \text{R } 557\ 445{,}60$$

Die hoeveelheid rente:

$$\text{R } 557\ 445{,}60 - \text{R } 187\ 231{,}87 = \text{R } 370\ 213{,}73$$

Anathi sou

$$\text{R } 388\ 743{,}83 - \text{R } 370\ 213{,}73 = \text{R } 18\ 530{,}10$$

gespaar het.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 29ZZ 2. 2B22 3. 2B23 4. 2B24 5. 2B25 6. 2B26
7. 2B27

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

4.5 Analise van beleggings- en leningsopsies

Oefening 4 – 5: Analise van beleggings- en leningsopsies

1. Cokisa is 31 jaar oud en begin vir haar toekoms beplan. Sy het oor haar aftrede begin dink en wil ’n annuïteit uitneem om seker te maak dat sy geld het wanneer sy aftree. Haar voorneme is om op 65 jarige ouderdom af te tree. Cokisa besoek die Trader’s Bank van Tembisa en vind uit dat daar twee beleggingsopsies is om van te kies:

   - Opsie A: 7,76% per jaar, elke vier maande saamgestel
   - Opsie B: 7,78% per jaar, half-jaarliks saamgestel

   a) Watter is die beste beleggingsopsie vir Cokisa indien haar deposito bedrag altyd konstant bly?

   Oplossing:

   Daar is twee verskillende rekeningsopsies vir Cokisa om te oorweeg; om te bepaal watter opsie die beste is, moet ons die effektiewe rente van elke opsie vergelyk. Hoe hoër die effektiewe rentekoers, hoe vinniger sal haar rekening groei. Die formule vir effektiewe rente is:

$$i + 1 = \left(1 + \frac{i^m}{m}\right)^m$$

Waar:

$$\begin{aligned} i &= \text{die effektiewe rentekoers} \\ i^m &= \text{die nominale rentekoers} \\ m &= \text{die aantal saamgestelde periodes van die jaar} \end{aligned}$$

Bereken die effektiewe rentekoers vir opsie A:

$$\begin{aligned} i &= \left(1 + \frac{0{,}0776}{3}\right)^3 - 1 \\ &= 0{,}07962\ldots \end{aligned}$$

Die berekening toon dat opsie A 'n effektiewe rentekoers van omtrent $7{,}9625\%$ lewer. Bereken nou die effektiewe rentekoers vir opsie B:

$$\begin{aligned} i &= \left(1 + \frac{0{,}0778}{2}\right)^2 - 1 \\ &= 0{,}07931\ldots \end{aligned}$$

Vir opsie B is die effektiewe rentekoers ongeveer $7{,}9313\%$.

Deur die bostaande berekening te vergelyk, kan ons sien dat opsie A die beste is.

NOTA: Dit sou voorkom asof ons die vraag kan beantwoord deur 'n bedrag vir die normale paaiement te kies en dan gebruik te maak van die toekomswaarde formule vir elk van die twee opsies te bepaal watter een die meeste geld tot gevolg het. Dit sal egter nie werk nie, omdat die saamstellingstydperke verskil. Indien ons dit op hierdie manier wil bereken, MOET ons die waarde van die paaiement aanpas om die saamstellingstydperke in ag te neem. Neem bv. 'n normale paaiement van R 100 elke vier maande vir opsie A, dan sal ons R 150 half-jaarliks vir opsie B moet gebruik (omdat R $100 \times 3 = 300$ dieselfde totale bedrag per jaar as R $150 \times 2 = 300$ is).

b) Cokisa maak 'n rekening oop en begin om elke vier maande R 4000 te spaar. Hoeveel geld (tot die naaste rand) sal sy gespaar hê wanneer sy aftree?

Oplossing:

$$\begin{aligned} F &= \frac{4000\left[\left(1 + \frac{0{,}0776}{3}\right)^{(34\times 3)} - 1\right]}{\left(\frac{0{,}0776}{3}\right)} \\ &= \text{R } 1\ 937\ 512{,}76 \end{aligned}$$

Cokisa sal R $1\ 937\ 512{,}76$ hê vir haar aftrede.

2. Phoebe wil 'n huislening uitneem vir R $1{,}6$ miljoen. Sy nader drie verskillende banke oor hulle leningsopsies:

- Bank A bied 'n terugbetaling oor 30 jaar en 'n rentekoers van 12% per jaar met maandelikse saamgestelde rente aan.
- Bank B bied 'n terugbetaling oor 20 jaar en 'n rentekoers van 14% per jaar met maandelikse saamgestelde rente aan.
- Bank C bied 'n terugbetaling oor 30 jaar en 'n rentekoers van 14% per jaar met maandelikse saamgestelde rente aan.

As Phoebe beplan om haar maandelikse terugbetalings onmiddellik te begin doen, bereken watter een van die drie opsies sal die beste vir haar wees.

Oplossing:

$$x = \frac{P \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

Bank A:

$$x = \frac{1\ 600\ 000 \times \frac{0.12}{12}}{\left[1-(1+\frac{0.12}{12})^{-360}\right]}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{R } 16\ 457{,}80 \\
\text{Totale bedrag } (T): &= 30 \times 12 \times \text{R } 16\ 457{,}80 \\
&= \text{R } 5\ 924\ 808 \\
\text{Totale rente } (I): &= \text{R } 5\ 924\ 808 - \text{R } 1\ 600\ 000 \\
&= \text{R } 4\ 324\ 808
\end{aligned}$$

Bank B:

$$x = \frac{1\ 600\ 000 \times \frac{0.14}{12}}{\left[1-(1+\frac{0.14}{12})^{-240}\right]}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{R } 19\ 896{,}33 \\
\text{Totale bedrag } (T): &= 20 \times 12 \times \text{R } 19\ 896{,}33 \\
&= \text{R } 4\ 775\ 119{,}20 \\
\text{Totale rente } (I): &= \text{R } 4\ 775\ 119{,}20 - \text{R } 1\ 600\ 000 \\
&= \text{R } 3\ 175\ 119{,}20
\end{aligned}$$

Bank C:

$$x = \frac{1\ 600\ 000 \times \frac{0.14}{12}}{\left[1-(1+\frac{0.14}{12})^{-360}\right]}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{R } 18\ 957{,}95 \\
\text{Totale bedrag } (T): &= 30 \times 12 \times \text{R } 18\ 957{,}95 \\
&= \text{R } 6\ 824\ 862 \\
\text{Totale rente } (I): &= \text{R } 6\ 824\ 862 - \text{R } 1\ 600\ 000 \\
&= \text{R } 5\ 224\ 862
\end{aligned}$$

	x	T	I
Bank A	R 16 457,80	R 5 924 808,00	R 4 324 808,00
Bank B	R 19 896,33	R 4 775 119,20	R 3 175 119,20
Bank C	R 18 957,95	R 6 824 862,00	R 5 224 862,00

'n Lening van Bank A sal die laagste maandelikse terugbetalings hê, maar die rente is hoog as gevolg van die langer terugbetalingsperiode. Daarom moet Phoebe dit oorweeg om 'n lening uit te neem met Bank B, want dit het die laagste totale terugbetalingsbedrag.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2B28 2. 2B29

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

4.6 Opsomming

Oefening 4 – 6: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Mpumelelo maak 'n deposito van R 500 in 'n spaarrekening, wat kwartaalliks saamgestelde rente verdien teen 6,81% p.j. Hoe lank sal dit neem vir die spaarrekening om 'n balans van R 749,77 te hê?

Oplossing:

$$A = P(1+i)^n$$

Waar:

$$A = 749{,}77$$
$$P = 500$$
$$i = 0{,}0681$$

In hierdie vraag is die rente kwartaalliks betaalbaar, so $i \to \frac{0{,}0681}{4}$ en $n \to (n \times 4)$. In hierdie geval, verteenwoordig n die aantal jare; die produk $(n \times 4)$ verteenwoordig die aantal kere wat die bank rente in die rekening inbetaal.

$$749{,}77 = 500\left(1 + \frac{0{,}0681}{4}\right)^{(n\times 4)}$$

$$\begin{aligned}749{,}77 &= 500(1{,}01702\ldots)^{4n}\\ \frac{749{,}77}{500} &= (1{,}01702\ldots)^{4n}\\ 1{,}49954\ldots &= (1{,}01702\ldots)^{4n}\end{aligned}$$

Nou moet ons die vergelyking verander na die logaritmiese vorm toe:

$$\begin{aligned}4n &= \log_{1{,}017025}(1{,}49954\ldots)\\ 4n &= \frac{\log 1{,}49954\ldots}{\log 1{,}017025} \qquad \text{(verandering van grondtal)}\\ 4n &= 24\end{aligned}$$

Om die aantal jare te kry, los ons op vir n:

$$\begin{aligned}4n &= 24\\ n &= \frac{24}{4}\\ n &= 6\end{aligned}$$

Daarom sal dit 6 jaar neem.

2. Hoeveel rente sal Gavin op 'n lening van R 360 000 vir 5 jaar teen 10,3% per jaar, maandeliks saamgestel, betaal?

Oplossing:

$$P = \frac{x\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

$$\begin{aligned}360\ 000 &= \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0{,}103}{12}\right)^{-(5\times 12)}\right]}{\left(\frac{0{,}103}{12}\right)}\\ \therefore x &= \frac{360\ 000 \times \left(\frac{0{,}103}{12}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{0{,}103}{12}\right)^{-60}\right]}\\ &= 7702{,}184\ldots\end{aligned}$$

Maandelikse paaiemente is R 7702,18.
Totale lening:

$$\text{R } 7702{,}18 \times 12 \times 5 = \text{R } 462\ 130{,}80$$

Rente:

$$\text{R } 462\ 130{,}80 - \text{R } 360\ 000 = \text{R } 102\ 130{,}80$$

3. Wingfield Skool sal in 6 jaar 'n aantal ou klaskamer lessenaars moet vervang. Die skoolhoof het bereken dat die nuwe lessenaars R 44 500 gaan kos. Die skool het 'n delgingsfonds gevestig om vir die nuwe lessenaars te betaal en maak onmiddellik 'n deposito van R 6300 wat maandeliks saamgestelde rente verdien teen 'n koers van 6,85% p.j.

   a) Hoeveel geld moet die skool elke maand spaar sodat daar genoeg geld in die delgingsfonds sal wees om die koste van die lessenaars te dek?

   Oplossing:

   R 6300 word onmiddellik in die delgingsfonds gedeponeer en sal rente verdien tot aan die einde van die 6 jaar:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 6300\left(1+\frac{0{,}0685}{12}\right)^{(6\times 12)} \\ &= 6300(1{,}0057\ldots)^{72} \\ &= 6300(1{,}50656\ldots) \\ &= 9491{,}35 \end{aligned}$$

   Na 6 jaar sal die deposito R 9491,35 werd wees.

   Balans benodig in die delgingsfonds:

$$\text{R } 44\ 500 - \text{R } 9491{,}35 = \text{R } 35\ 008{,}65$$

   Ons bereken die maandelikse paaiemente wat 'n toekomstige waarde van R 35 008,65 sal gee:

$$\begin{aligned} F &= \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \\ 35\ 008{,}65 &= \frac{x\left[\left(1+\frac{0{,}0685}{12}\right)^{(6\times 12)} - 1\right]}{\left(\frac{0{,}0685}{12}\right)} \\ \therefore x &= \frac{35\ 008{,}65 \times \frac{0{,}0685}{12}}{\left[\left(1+\frac{0{,}0685}{12}\right)^{(6\times 12)} - 1\right]} \\ &= 394{,}50326\ldots \end{aligned}$$

   Daarom moet Wingfield skool elke maand R 394,50 in die delgingsfonds deponeer sodat daar genoeg geld in die rekening sal wees om die nuwe lessenaars aan te koop.

   b) Hoeveel rente verdien die fonds oor 'n periode van 6 jaar?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Totale bedrag gespaar: } &= 6300 + (394{,}5 \times 12 \times 6) \\ &= 6300 + 28\ 404 \\ &= 34\ 704 \end{aligned}$$

   Die total bedrag geld wat die skool in die rekening deponeer is R 34 704,00.

   Daarom is die rente wat deur die bank betaal word:

$$\text{R } 44\ 500 - \text{R } 34\ 704{,}00 = \text{R } 9796{,}00$$

4. Bereken hoeveel jaar (tot die naaste heelgetal) dit sal neem vir die waarde van 'n voertuig om te verminder na 25% van die oorspronklike waarde as die waardeverminderingskoers, gebaseer op die verminderde balans metode, 21% is per jaar.

   Oplossing:

   Laat die waarde van die voertuig x wees.

$$\begin{aligned} A &= P(1-i)^n \\ x \times \frac{25}{100} &= x\left(1-\frac{21}{100}\right)^n \\ 0{,}25 &= \left(1-\frac{21}{100}\right)^n \\ 0{,}25 &= (0{,}79)^n \\ \therefore n &= \log_{0{,}79} 0{,}25 \qquad \text{(gebruik definisie)} \\ &= \frac{\log 0{,}25}{\log 0{,}79} \qquad \text{(verandering van grondtal)} \\ &= 5{,}881\ldots \end{aligned}$$

Daarom sal dit omtrent 6 jaar neem.

5. Angela het nou net by 'n nuwe werk begin en wil geld spaar vir haar aftrede. Sy besluit om elke maand R 1300 in 'n spaarrekening te deponeer. Haar geld word in 'n rekening by Pinelands Mutual Bank gespaar en die rekening ontvang 6,01% maandeliks saamgestelde rente per jaar.

   a) Hoeveel geld sal Angela in haar rekening hê na 30 jaar?
   Oplossing:

$$\begin{aligned} F &= \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \\ x &= \text{R } 1300 \\ i &= 0{,}0601 \\ n &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{(1300)\left[\left(1+\frac{0{,}0601}{12}\right)^{(30\times 12)} - 1\right]}{\left(\frac{0{,}0601}{12}\right)} \\ &= \text{R } 1\,308\,370{,}14 \end{aligned}$$

   Na 30 jaar sal Angela R 1 308 370,14 in haar rekening hê.

   b) Hoeveel geld het Angela in haar rekening gedeponeer na 30 jaar?
   Oplossing:
   Die totale hoeveelheid geld wat Angela elke jaar spaar is $1300 \times 12 =$ R 15 600. Ons kan bereken hoeveel geld sy in totaal spaar deur dit met die getal jare te vermenigvuldig: $15\,600 \times 30 =$ R 468 000.
   Na 30 jaar het Angela in totaal R 468 000 in haar rekening gedeponeer.

6. a) Nicky werk al vir 5 jaar by Meyer en Vennote en kry 'n salarisverhoging. Sy maak 'n spaarrekening by Langebaan Bank oop en begin om elke maand R 350 te deponeer. Die rekening verdien 5,53% maandeliks saamgestelde rente per jaar. Sy beplan om maandeliks aan te hou spaar totdat sy aftree. Na 8 jaar stop sy egter met die maandelikse deposito's en los die rekening om te groei.
   Hoeveel geld sal Nicky in haar rekening hê 29 jaar nadat sy dit oopgemaak het?
   Oplossing:

$$\begin{aligned} F &= \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \\ x &= \text{R } 350 \\ i &= 0{,}0553 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{(350)\left[\left(1+\frac{0{,}0553}{12}\right)^{(8\times 12)} - 1\right]}{\left(\frac{0{,}0553}{12}\right)} \\ &= \text{R } 42\,141{,}06 \end{aligned}$$

Hierdie berekening wys dat die rekening 'n balans van R $42\ 141{,}06$ na 8 jaar sal hê, wanneer Nicky ophou om die maandelikse deposito te maak.

Van hierdie punt af groei die rekening van R $42\ 141{,}06$ met saamgestelde rente alleenlik (geen maandelikse deposito's). Dit hou so aan vir $29 - 8 = 21$ jaar.

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 42\ 141{,}06 \left(1 + \frac{0{,}0553}{12}\right)^{21 \times 12} \\ &= 134\ 243{,}45 \end{aligned}$$

Die totale hoeveelheid geld in die rekening 29 jaar nadat Nicky die rekening oopgemaak het, is R $134\ 243{,}45$.

b) Bereken die verskil tussen die totale bedrag van deposito's wat gemaak is in die rekening en die rente betaal deur die bank.

Oplossing:

Die totale deposito's is:

$$\text{R } 350 \times 12 \times 8 = \text{R } 33\ 600$$

Aan die einde van die periode is die rente verdien:

$$\text{R } 134\ 243{,}45 - 33\ 600 = \text{R } 100\ 643{,}45$$

Verskil:

$$\text{R } 100\ 643{,}45 - \text{R } 33\ 600 = \text{R } 67\ 043{,}45$$

7. a) Elke drie maande plaas Louis R 500 in 'n annuïteit. Sy rekening verdien 'n kwartaalliks saamgestelde rentekoers van $7{,}51\%$ p.j. Hoe lank sal dit sy rekening neem om 'n balans van R $13\ 465{,}87$ te bereik?

Oplossing:

$$\begin{aligned} F &= \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \\ F &= \text{R } 13\ 465{,}87 \\ x &= \text{R } 500 \\ i &= 0{,}0751 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13\ 465{,}87 &= \frac{500\left[\left(1 + \frac{0{,}0751}{4}\right)^{(n \times 4)} - 1\right]}{\left(\frac{0{,}0751}{4}\right)} \\ 13\ 465{,}87 &= \frac{500\left[(1{,}01877\ldots)^{4n} - 1\right]}{0{,}01877\ldots} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0{,}01877\ldots)(13\ 465{,}87) &= (500)\left[(1{,}01877\ldots)^{4n} - 1\right] \\ \frac{252{,}82172\ldots}{500} &= \left[(1{,}01877\ldots)^{4n} - 1\right] \end{aligned}$$

Nou dat die vierkantige hakie alleen staan, werk daar binne-in en tel een weerskante by, en verander dan die vergelyking na log-vorm om die eksponent te kry.

$$\begin{aligned} 0{,}50564\ldots + 1 &= (1{,}01877\ldots)^{4n} \\ 1{,}50564\ldots &= (1{,}01877\ldots)^{4n} \\ \text{Verander na logaritmiese vorm:} \quad 4n &= \log_{1{,}01877\ldots}(1{,}50564\ldots) \\ 4n &= 22 \\ n &= \frac{22}{4} \\ n &= 5{,}5 \end{aligned}$$

Dit sal omtrent $5{,}5$ jaar neem.

b) Hoeveel rente sal Louis uit sy belegging verdien?

Oplossing:

Die totale bedrag deposito's:

$$500 \times 4 \times 5{,}5 = \text{R } 11\ 000{,}00$$

Die totale bedrag rente:

$$\text{R } 13\ 465{,}87 - \text{R } 11\ 000{,}00 = \text{R } 2465{,}87$$

8. 'n Suiwelboer genaamd Kayla moet nuwe toerusting wat R 200 450 kos vir haar suiwelplaas koop. Sy het die ou toerusting 12 jaar gelede gekoop vir R 167 000. Die waarde van die ou toerusting verminder teen 'n koers van 12,2% per jaar op 'n verminderde saldo metode. Kayla sal 'n nuwe verband vir die oorblywende hoeveelheid van die nuwe toerusting moet uitneem.

   'n Agentskap wat boere ondersteun bied verbande teen 'n spesiale maandelikse saamgestelde rentekoers van 10,01% p.j. aan vir enige lening tot R 175 000 en 9,61% vir 'n lening meer as daardie bedrag. Kayla reël die verband dat sy nie enige paaiemente op die lening hoef te maak in die eerste ses maande nie (dit word 'n 'grasieperiode' genoem) en sy moet die lening oor 20 jaar terug betaal.

   a) Bereken die maandelikse paaiement.

   Oplossing:

   Ou toerusting:

$$\begin{aligned} A &= P(1-i)^n \\ &= 167\ 000(1-0{,}122)^{12} \\ &= 35\ 046{,}98494\ldots \end{aligned}$$

   Die waarde van die ou toerusting is R 35 046,98.
   Verband bedrag:

$$\text{R } 200\ 450 - \text{R } 35\ 046{,}98 = \text{R } 165\ 403{,}02$$

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 165\ 403{,}02\left(1+\frac{0{,}1001}{12}\right)^6 \\ &= 173\ 856{,}01291\ldots \end{aligned}$$

   Na die eerste ses maande van die leningsperiode, waartydens sy geen paaiemente maak nie, verhoog die bedrag wat sy skuld tot R 173 856,01.
   Nou kan ons die huidige waarde formule gebruik vir die waarde van x om dit op te los. Onthou dat die terugbetalingstydperk 19,5 jaar is.

$$\begin{aligned} 173\ 856{,}01 &= \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0{,}1001}{12}\right)^{-(19{,}5\times 12)}\right]}{\left(\frac{0{,}1001}{12}\right)} \\ \therefore x &= \frac{173\ 856{,}01 \times \left(\frac{0{,}1001}{12}\right)}{x\left[1-\left(1+\frac{0{,}1001}{12}\right)^{-(19{,}5\times 12)}\right]} \\ &= 1692{,}53772\ldots \end{aligned}$$

   Katya moet R 1692,54 elke maand betaal.

   b) Wat is die totale bedrag rente wat Kayla moet betaal vir die verband?

   Oplossing:

   Totale koste van die lening:
   R 1692,54 × 12 × 19,5 = R 396 054,36
   Rente:
   R 396 054,36 − R 165 403,02 = R 230 651,34
   Die totale bedrag rente wat Katya betaal het, is R 230 651,34.

c) Met watter faktor is die rente wat sy betaal groter as die waarde van die lening? Gee die antwoord korrek tot een desimale plek.

Oplossing:

$$k = \frac{\text{rente betaal}}{\text{bedrag van lening}} = \frac{230\ 651{,}34}{165\ 403{,}02} = 1{,}39448$$

Die rente is groter as die leningsbedrag met 'n faktor van $1{,}4$.

9. Thabo belê R 8500 in 'n spesiale bankproduk wat 1% per jaar sal betaal vir 1 maand, dan 2% per jaar vir die volgende 2 maande, dan 3% per jaar vir die volgende 3 maande, 4% per jaar vir die volgende 4 maande, en 0% vir die res van die jaar. As die bank hom R 75 bankkoste hef om die rekening oop te maak, hoeveel kan hy verwag om teen die einde van die jaar te verdien?

Oplossing:

Trek die rekeningfooi van die beleggingsbedrag af: R 8500 - R 75 = R 8425

$$A = P(1+i)^n$$

$$\text{Teen } T_0: \quad A = 8425$$

$$\text{Teen } T_1: \quad A = 8425\left(1+\frac{0{,}01}{12}\right)^1$$

$$\text{Teen } T_3: \quad A = 8425\left(1+\frac{0{,}01}{12}\right)^1\left(1+\frac{0{,}02}{12}\right)^2$$

$$\text{Teen } T_6: \quad A = 8425\left(1+\frac{0{,}01}{12}\right)^1\left(1+\frac{0{,}02}{12}\right)^2\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^3$$

$$\text{Teen } T_{10}: \quad A = 8425\left(1+\frac{0{,}01}{12}\right)^1\left(1+\frac{0{,}02}{12}\right)^2\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^3\left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^4$$

$$\therefore \text{Finale bedrag } = \text{R } 8637{,}98$$

10. Thabani en Lungelo gebruik altwee Harper Bank om te spaar. Lungelo deponeer x teen 'n rentekoers van i vir ses jaar. Drie jaar nadat Lungelo sy eerste deposito gemaak het, deponeer Thabani $3x$ teen 'n rentekoers van 8% per jaar. As hulle beleggings na 6 jaar ewe groot is, bereken die waarde van i (korrek tot drie desimale plekke). As die som van hulle belegging R $20\ 000$ is, bepaal hoeveel Thabani in 6 jaar verdien het.

Oplossing:

$$A = P(1+i)^n$$

$$x(1+i)^6 = 3x\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$$

$$\begin{aligned}
x(1+i)^6 - 3x(1{,}08)^3 &= 0\\
x\left((1+i)^6 - 3(1{,}08)^3\right) &= 0\\
\therefore x = 0 \text{ of } (1+i)^6 - 3(1{,}08)^3 &= 0\\
\text{As } x = 0,\ i \text{ kan enige waarde hê,}&\\
\therefore \text{nie 'n wettige oplossing}&\\
\text{As } (1+i)^6 - 3(1{,}08)^3 &= 0\\
(1+i)^6 &= 3(1{,}08)^3\\
1+i &= \sqrt[6]{3(1{,}08)^3}\\
\therefore i &= \sqrt[6]{3(1{,}08)^3} - 1\\
&= 0{,}248\ldots\\
\therefore i &= 24{,}8\%
\end{aligned}$$

$$x + 3x = \text{R } 20\ 000$$
$$4x = \text{R } 20\ 000$$
$$\therefore x = \text{R } 5000$$

$$\begin{aligned} A &= 15\ 000\left(1 + \frac{8}{100}\right)^3 \\ &= 15\ 000(1{,}08)^3 \\ &= 18\ 895{,}68 \\ \text{Rente verdien: } &= \text{R } 18\ 895{,}68 - \text{R } 15\ 000 \\ &= \text{R } 3895{,}68 \end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2B2B 2. 2B2C 3. 2B2D 4. 2B2F 5. 2B2G 6. 2B2H
7. 2B2J 8. 2B2K 9. 2B2M 10. 2B2N

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK



Trigonometrie

- Beklemtoon die waarde en belangrikheid daarvan om sketse maak, waar van toepassing.
- Dit is baie belangrik vir leerders om te verstaan dat dit verkeerd is om die distributiewe eienskap van getalle toe te pas op trigonometriese verhoudings en dat $\cos(\alpha - \beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta$.
- Beklemtoon dat die oppervlakte-, sinus- en cosinusreëls nie reghoekige driehoeke vereis nie.
- Herinner leerders daaraan dat hoeke in die Cartesiese vlak altyd gemeet word vanaf die positiewe x-as.
- Dit is belangrik om daarop te let dat $(270° \pm x)$ nie ingesluit is in CAPS nie.
- Let daarop dat die ko-funksie vir tangens ook nie ingesluit is in CAPS nie.
- Herinner leerders daaraan om seker te maak dat hulle antwoorde binne die gevraagde interval lê.
- Vir die algemene oplossing, bepaal die oplossing in die regte kwadrante en binne die gevraagde interval.
- Om te bewys dat 'n identiteit waar is, herinner leerders dat hulle slegs toegelaat word om **een kant op 'n slag** te manipuleer.
- Om identiteite te bewys, manipuleer ons gewoonlik die meer komplekse uitdrukking totdat dit dieselfde lyk as die meer eenvoudige uitdrukking.

5.1 Hersiening

Oefening 5 – 1: Hersiening - reduksieformules, ko-funksies en identiteite

1. Gegee: $\sin 31° = A$
   Skryf elk van die volgende uitdrukkings in terme van A:

   a) $\sin 149°$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin 149° &= \sin(180° - 31°) \\ &= \sin 31° \\ &= A \end{aligned}$$

   b) $\cos(-59°)$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos(-59°) &= \cos 59° \\ &= \cos(90° - 31°) \\ &= \sin 31° \\ &= A \end{aligned}$$

   c) $\cos 329°$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} \cos 329° &= \cos(360° - 31°) \\ &= \cos 31° \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 31°} \\ &= \sqrt{1 - A^2} \end{aligned}$$

d) $\tan 211^\circ \cos 211^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan 211^\circ \cos 211^\circ &= \left(\frac{\sin 211^\circ}{\cos 211^\circ}\right)\cos 211^\circ \\ &= \sin 211^\circ \\ &= \sin(180^\circ + 31^\circ) \\ &= -\sin 31^\circ \\ &= -A\end{aligned}$$

e) $\tan 31^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan 31^\circ &= \frac{\sin 31^\circ}{\cos 31^\circ} \\ &= \frac{A}{\sqrt{1-A^2}}\end{aligned}$$

2. a) Vereenvoudig P tot 'n enkele trigonometriese verhouding:

$$P = \sin(360^\circ + \theta)\cos(180^\circ + \theta)\tan(360^\circ + \theta)$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}P &= \sin(360^\circ + \theta)\cos(180^\circ + \theta)\tan(360^\circ + \theta) \\ &= \sin\theta(-\cos\theta)(\tan\theta) \\ &= \sin\theta\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \\ &= \sin^2\theta\end{aligned}$$

b) Vereenvoudig Q tot 'n enkele trigonometriese verhouding:

$$Q = \frac{\cos(\theta - 360^\circ)\sin(90^\circ + \theta)\sin(-\theta)}{\sin(\theta + 180^\circ)}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Let op: } &\cos(\theta - 360^\circ) \\ &= \cos[-(360^\circ - \theta)] \\ &= \cos(360^\circ - \theta) \\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q &= \frac{\cos(\theta - 360^\circ)\sin(90^\circ + \theta)\sin(-\theta)}{\sin(\theta + 180^\circ)} \\ &= \frac{\cos\theta\cos\theta(-\sin\theta)}{-\sin\theta} \\ &= \cos^2\theta\end{aligned}$$

c) Bepaal vervolgens:

i. $P + Q$

ii. $\frac{Q}{P}$

Oplossing:

i.

$$\begin{aligned}P + Q &= \sin^2\theta + \cos^2\theta \\ &= 1\end{aligned}$$

ii.

$$\frac{Q}{P} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\tan^2\theta}$$

3. As $p = \sin\beta$, druk die volgende uit in terme van p:

$$\frac{\cos(\beta + 360^\circ)\tan(\beta - 360^\circ)\cos(\beta + 90^\circ)}{\sin^2(\beta + 180^\circ)\cos(\beta - 90^\circ)}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Let op: } & \tan(\beta - 360^\circ) \\
& = \tan[-(360^\circ - \beta)] \\
& = -\tan(360^\circ - \beta) \\
& = -(-\tan\beta) \\
& = \tan\beta \\
\text{En } & \cos(\beta - 90^\circ) \\
& = \cos[-(90^\circ - \beta)] \\
& = \cos(90^\circ - \beta) \\
& = \sin\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos(\beta + 360^\circ)\tan(\beta - 360^\circ)\cos(\beta + 90^\circ)}{\sin^2(\beta + 180^\circ)\cos(\beta - 90^\circ)} \\
& = \frac{\cos\beta\tan\beta(-\sin\beta)}{(-\sin\beta)^2\sin\beta} \\
& = -\frac{\cos\beta\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\sin\beta}{(\sin^2\beta)\sin\beta} \\
& = -\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\beta\sin\beta} \\
& = -\frac{1}{\sin\beta} \\
& = -\frac{1}{p}
\end{aligned}$$

4. Evalueer die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) $\frac{\cos(-120^\circ)}{\tan 150^\circ} + \cos 390^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos(120^\circ)}{\tan 150^\circ} + \cos 390^\circ \\
& = \frac{\cos(180^\circ - 60^\circ)}{\tan(180^\circ - 30^\circ)} + \cos(360^\circ + 30^\circ) \\
& = \frac{-\cos 60^\circ}{-\tan 30^\circ} + \cos 30^\circ \\
& = \frac{\sin 30^\circ}{\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}} + \cos 30^\circ \\
& = \cos 30^\circ + \cos 30^\circ \\
& = 2\cos 30^\circ \\
& = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
& = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

b) $(1 - \sin 45^\circ)(1 - \sin 225^\circ)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&(1 - \sin 45^\circ)(1 - \sin 225^\circ)\\
&= 1 - \sin 45^\circ - \sin 225^\circ + (\sin 45^\circ)(\sin 225^\circ)\\
&= 1 - \sin 45^\circ - \sin(180^\circ + 45^\circ) + (\sin 45^\circ)(\sin(180^\circ + 45^\circ))\\
&= 1 - \sin 45^\circ + \sin 45^\circ - \sin^2 45^\circ\\
&= 1 - \sin^2 45^\circ\\
&= 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\\
&= 1 - \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

5. Reduseer die volgende tot een trigonometriese verhouding:

a) $\tan^2\beta - \frac{1}{\cos^2\beta}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\tan^2\beta - \frac{1}{\cos^2\beta} &= \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} - \frac{1}{\cos^2\beta}\\
&= \frac{\sin^2\beta - 1}{\cos^2\beta}\\
&= \frac{-(1 - \sin^2\beta)}{\cos^2\beta}\\
&= \frac{-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}\\
&= -1
\end{aligned}$$

b) $\sin^2(90^\circ + \theta)\tan^2\theta + \tan^2\theta\cos^2(90^\circ - \theta)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\sin^2(90^\circ + \theta)\tan^2\theta + \tan^2\theta\cos^2(90^\circ - \theta)\\
&= \cos^2\theta\tan^2\theta + \tan^2\theta\sin^2\theta\\
&= \tan^2\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\\
&= \tan^2\theta\,(1)\\
&= \tan^2\theta
\end{aligned}$$

c) $\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha - 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha - 1 &= \sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) - 1\\
&= \sin^2\alpha - 1\\
&= -\left(1 - \sin^2\alpha\right)\\
&= -\cos^2\alpha
\end{aligned}$$

d) $\tan^2\theta + \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan^2\theta + \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta} &= \tan^2\theta - \frac{(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\\ &= \tan^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\\ &= \tan^2\theta - \tan^2\theta\\ &= 0\end{aligned}$$

6. a) Gebruik reduksieformules en spesiale hoeke om te wys dat

$$\frac{\sin(180° + \theta)\tan(720° + \theta)\cos(-\theta)}{\cos(90° + \theta)}$$

vereenvoudig kan word tot $\sin\theta$.

Oplossing:
Gebruik reduksieformules en ko-funksies om die uitdrukking te vereenvoudig

$$\begin{aligned}&\frac{\sin(180° + \theta)\tan(720° + \theta)\cos(-\theta)}{\cos(90° + \theta)}\\ &= \frac{-\sin\theta\tan\left(2(360°) + \theta\right)\cos\theta}{-\sin\theta}\\ &= \tan\theta\cos\theta\\ &= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta\\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

b) Sonder om die sakrekenaar te gebruik, bepaal die waarde van $\sin 570°$.

Oplossing:
Gebruik spesiale hoeke om die waarde van die uitdrukking te bepaal

$$\begin{aligned}\sin 570° &= \sin(360° + 210°)\\ &= \sin(210°)\\ &= \sin(180° + 30°)\\ &= -\sin 30°\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

7. Troy se wiskunde onderwyser vra die klas om die volgende vraag te beantwoord.

Vraag:

Bewys dat $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$.

Troy se antwoord:

$$\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} &= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\\ (\cos\theta)(\cos\theta) &= (1+\sin\theta)(1-\sin\theta)\\ \cos^2\theta &= 1-\sin^2\theta\\ \cos^2\theta &= \cos^2\theta\\ \therefore \text{LK} &= \text{RK}\end{aligned}$$

Lewer kommentaar op Troy se antwoord en toon die korrekte metode vir die bewys van hierdie identiteit.

Oplossing:

Die vraag verwag van Troy om die identiteit te bewys. Maar, deur oorkruis te vermenigvuldig en die linkerkant en regterkant te 'vermeng', het hy reeds aanvaar die twee kante is gelyk. Hy het dit hanteer soos 'n vergelyking. Die korrekte metode is om die linkerkant en die regterkant apart te hou totdat dit duidelik is dat hulle dieselfde is. Troy moes ook die beperkings genoem het.

Korrekte metode:

$$\begin{aligned}
\text{RK} &= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta} \\
&= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)} \\
&= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)} \\
&= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \\
&= \text{LK}
\end{aligned}$$

Beperkings: ongedefinieerd waar $\cos\theta = 0,$ en $\sin\theta = -1.$

Dus, dan $\theta \neq 90 + k\ .\ 180°$ en $\theta \neq -90 + k\ .\ 360°.$

Gevolglik $\theta \neq 90° + k\ .\ 180°, \quad k \in \mathbb{Z}.$

8. Bewys die volgende identiteite:

   (Noem enige nie-toegelate waardes in die interval $[0°; 360°]$, waar van toepassing.)

   a) $\sin^2\alpha + (\cos\alpha - \tan\alpha)(\cos\alpha + \tan\alpha) = 1 - \tan^2\alpha$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \sin^2\alpha + (\cos\alpha - \tan\alpha)(\cos\alpha + \tan\alpha) \\
&= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \tan^2\alpha \\
&= 1 - \tan^2\alpha \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

   Beperkings: ongedefinieerd waar $\tan\alpha$ ongedefinieerd is

   Gevolglik $\alpha \neq 90°; 270°.$

   b) $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta\tan^2\theta}{1} = \cos\theta$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta\tan^2\theta}{1} \\
&= \frac{1-\cos^2\theta \times \tan^2\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{1-\cos^2\theta \times \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\cos\theta} \\
&= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} \\
&= \cos\theta \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

   Beperkings: ongedefinieerd waar $\cos\theta = 0$ en waar $\tan\theta$ ongedefinieerd is.

   Gevolglik $\theta \neq 90°; 270°.$

c) $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sin\theta+\cos\theta - \dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{RK} &= \sin\theta+\cos\theta-\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\\
&= \frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta-1}{\sin\theta+\cos\theta}\\
&= \frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta+\cos\theta}\\
&= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\\
&= \text{LK}
\end{aligned}$$

Beperkings: ongedefinieerd waar $\sin\theta = 0, \;\; \cos\theta = 0$.
Gevolglik $\theta \neq 0°; 90°; 180°; 270°; 360°$.

d) $\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}+\tan\beta\right)\cos\beta = \dfrac{1}{\sin\beta}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\cos\beta\\
&= \left(\frac{\cos^2\beta+\sin^2\beta}{\sin\beta\cos\beta}\right)\cos\beta\\
&= \frac{1}{\sin\beta}\\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

Beperkings: ongedefinieerd waar $\sin\beta = 0, \;\; \cos\beta = 0$ en waar $\tan\beta$ ongedefinieerd is.
Gevolglik $\beta \neq 0°; 90°; 180°; 270°; 360°$.

e) $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta} = \dfrac{2\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\
&= \frac{2}{1-\sin^2\theta}\\
&= \frac{2}{\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{RK} &= \frac{2\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\
&= \frac{2\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta\cos\theta}\\
&= \frac{2}{\cos^2\theta}\\
\therefore \text{LK} &= \text{RK}
\end{aligned}$$

Beperkings: ongedefinieerd waar $\sin\theta = \pm 1, \;\; \sin\theta = 0, \;\; \cos\theta = 0$.
Beperkings sluit ook die waardes van θ in waarvoor $\tan\theta$ ongedefinieerd is.
Gevolglik $\theta \neq 0°; 90°; 180°; 270°; 360°$.

f) $(1+\tan^2\alpha)\cos\alpha = \dfrac{1-\tan\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= (1 + \tan^2\alpha)\cos\alpha \\
&= \left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cos\alpha \\
&= \left(\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cos\alpha \\
&= \frac{1}{\cos^2\alpha} \times \cos\alpha \\
&= \frac{1}{\cos\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{RK} &= \frac{1 - \tan\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \\
&= \frac{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha - \sin\alpha} \\
&= \frac{\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha - \sin\alpha} \\
&= \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)} \\
&= \frac{1}{\cos\alpha} \\
&= \text{LK}
\end{aligned}$$

Beperkings: waar $\sin\alpha = \cos\alpha$ en waar $\tan\alpha$ ongedefinieer is.

Gevolglik $\alpha \neq 45°; 90°; 270°; 225°$.

9. Bepaal of die volgende bewerings waar of vals is.

   As die bewering vals is, kies 'n geskikte waarde tussen $0°$ en $90°$ om jou antwoord te bevestig.

   a) $\cos(180° - \theta) = -1 - \cos\theta$

   Oplossing:

   Vals

$$\begin{aligned}
&\text{Laat } \theta = 35° \\
&\quad \text{LK} = \cos(180° - 35°) \\
&\qquad = \cos 145° \\
&\qquad = -0{,}819 \\
&\quad \text{RK} = -1 - \cos 35° \\
&\qquad = -1{,}819 \\
&\quad \text{LK} \neq \text{RK}
\end{aligned}$$

   b) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$

   Oplossing:

   Vals

$$\begin{aligned}
\text{Laat } \alpha &= 62^\circ \\
\text{Laat } \beta &= 20^\circ \\
\text{LK} &= \sin(62^\circ + 20^\circ) \\
&= \sin 82^\circ \\
&= 0{,}990 \\
\\
\text{RK} &= \sin 62^\circ + \sin 20^\circ \\
&= 1{,}224 \\
\\
\text{LK} &\neq \text{RK}
\end{aligned}$$

c) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$

Oplossing:

Waar

d) $\frac{1}{3}\sin 3\alpha = \sin\alpha$

Oplossing:

Vals

$$\begin{aligned}
\text{Laat } \alpha &= 62^\circ \\
\text{LK} &= \frac{1}{3}\sin 3(62^\circ) \\
&= -0{,}034 \\
\\
\text{RK} &= \sin 62^\circ \\
&= 0{,}882 \\
\\
\text{LK} &\neq \text{RK}
\end{aligned}$$

e) $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$

Oplossing:

Waar

f) $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

Oplossing:

Waar

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2B2P	1b. 2B2Q	1c. 2B2R	1d. 2B2S	1e. 2B2T	2. 2B2V
3. 2B2W	4a. 2B2X	4b. 2B2Y	5a. 2B2Z	5b. 2B32	5c. 2B33
5d. 2B34	6. 2B35	7. 2B36	8a. 2B37	8b. 2B38	8c. 2B39
8d. 2B3B	8e. 2B3C	8f. 2B3D	9a. 2B3F	9b. 2B3G	9c. 2B3H
9d. 2B3J	9e. 2B3K	9f. 2B3M			

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Afleiding van $\cos(\alpha - \beta)$

Oefening 5 – 2: Saamgestelde hoek formules

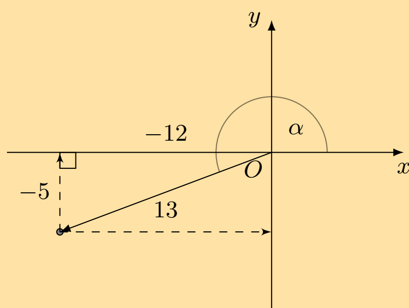
1. Gegee:

$$13 \sin \alpha + 5 = 0 \qquad (0° < \alpha < 270°)$$
$$13 \cos \beta - 12 = 0 \qquad (90° < \beta < 360°)$$

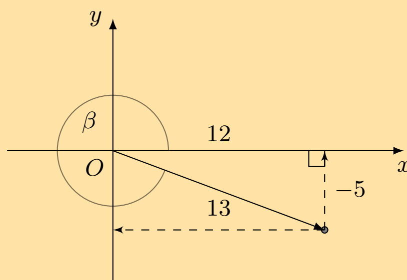
Maak 'n skets en bepaal die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) $\tan \alpha - \tan \beta$

Oplossing:



$$\begin{aligned} 13 \sin \alpha + 5 &= 0 && (0° < \alpha < 270°) \\ \therefore \sin \alpha &= -\frac{5}{13} && \text{(derde kwadrant)} \\ \therefore x^2 &= (13)^2 - (-5)^2 && \text{(Pythagoras)} \\ &= 144 \\ x &= \pm 12 \\ \therefore x &= -12 && \text{(derde kwadrant)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 13 \cos \beta - 12 &= 0 && (90° < \beta < 360°) \\ \therefore \cos \beta &= \frac{12}{13} && \text{(vierde kwadrant)} \\ \therefore y^2 &= (13)^2 - (12)^2 && \text{(Pythagoras)} \\ &= 25 \\ y &= \pm 5 \\ \therefore y &= -5 && \text{(vierde kwadrant)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha - \tan \beta &= \frac{-5}{-12} - \left(\frac{-5}{12}\right) \\ &= \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \\ &= \frac{10}{12} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

b) $\sin(\beta - \alpha)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin(\beta - \alpha) &= \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha \\
&= \frac{-5}{13} \cdot \frac{-12}{13} - \frac{12}{13} \cdot \frac{-5}{13} \\
&= \frac{60}{169} + \frac{60}{169} \\
&= \frac{120}{169}
\end{aligned}$$

c) $\cos(\alpha + \beta)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
&= \frac{-12}{13} \cdot \frac{12}{13} - \frac{-5}{13} \cdot \frac{-5}{13} \\
&= -\frac{144}{169} - \frac{25}{169} \\
&= -\frac{169}{169} \\
&= -1
\end{aligned}$$

2. Bereken die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar (los die antwoord in wortelvorm):

a) $\sin 105^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) \\
&= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}
\end{aligned}$$

b) $\cos 15^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos 15^\circ &= \cos(60^\circ - 45^\circ) \\
&= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}
\end{aligned}$$

c) $\sin 15^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(60^\circ - 45^\circ)\\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\end{aligned}$$

d) $\tan 15^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}\\ &= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4} \div \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}\\ &= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4} \times \frac{4}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}\\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{2}\\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

e) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ\\ &= \cos(20^\circ + 40^\circ)\\ &= \cos 60^\circ\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

f) $\sin 10^\circ \cos 80^\circ + \cos 10^\circ \sin 80^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\sin 10^\circ \cos 80^\circ + \cos 10^\circ \sin 80^\circ\\ &= \sin(10^\circ + 80^\circ)\\ &= \sin 90^\circ\\ &= 1\end{aligned}$$

g) $\cos(45^\circ - x)\cos x - \sin(45^\circ - x)\sin x$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\cos(45^\circ - x)\cos x - \sin(45^\circ - x)\sin x\\&= \cos((45^\circ - x) + x)\\&= \cos 45^\circ\\&= \frac{1}{\sqrt{2}}\\&= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

h) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}&\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ\\&= \cos 15^\circ \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \sin 15^\circ\\&= \cos(15^\circ + 15^\circ)\\&= \cos 30^\circ\\&= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

3. a) Bewys: $\sin(60^\circ - x) + \sin(60^\circ + x) = \sqrt{3}\cos x$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{LK} &= \sin(60^\circ - x) + \sin(60^\circ + x)\\&= \sin 60^\circ \cos x - \cos 60^\circ \sin x + \sin 60^\circ \cos x + \cos 60^\circ \sin x\\&= 2\sin 60^\circ \cos x\\&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos x\\&= \sqrt{3}\cos x\\&= \text{RK}\end{aligned}$$

b) Vervolgens, bereken die waarde van $\sin 15^\circ + \sin 105^\circ$ sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

Oplossing:

Ons het getoon dat:

$$\begin{aligned}\sin(60^\circ - x) + \sin(60^\circ + x) &= \sqrt{3}\cos x\\\text{Stel } x &= 45^\circ\\\sin(60^\circ - 45^\circ) + \sin(60^\circ + 45^\circ) &= \sqrt{3}\cos 45^\circ\\\sin 15^\circ + \sin 105^\circ &= \sqrt{3}\ .\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\&= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\&= \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

c) Gebruik 'n sakrekenaar om jou antwoord te kontroleer.

Oplossing:

Vir $x = 45^\circ$:

$$\begin{aligned}\text{LK} &= \sin 15^\circ + \sin 105^\circ\\&= 1{,}2247\ldots\\\text{RK} &= 1{,}2247\ldots\\\therefore \text{LK} &= \text{RK}\end{aligned}$$

4. Vereenvoudig die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

$$\frac{\sin p \cos(45^\circ - p) + \cos p \sin(45^\circ - p)}{\cos p \cos(60^\circ - p) - \sin p \sin(60^\circ - p)}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin p \cos(45^\circ - p) + \cos p \sin(45^\circ - p)}{\cos p \cos(60^\circ - p) - \sin p \sin(60^\circ - p)} \\
&= \frac{\sin[p + (45^\circ - p)]}{\cos[p + (60^\circ - p)]} \\
&= \frac{\sin 45^\circ}{\cos 60^\circ} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

5. a) Bewys: $\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \sin(A + B) - \sin(A - B) \\
&= \sin A \cos B + \cos A \sin B - [\sin A \cos B - \cos A \sin B] \\
&= \sin A \cos B + \cos A \sin B - \sin A \cos B + \cos A \sin B \\
&= 2 \cos A \sin B \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

b) Vervolgens, bereken die waarde van $\cos 75^\circ \sin 15^\circ$ sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

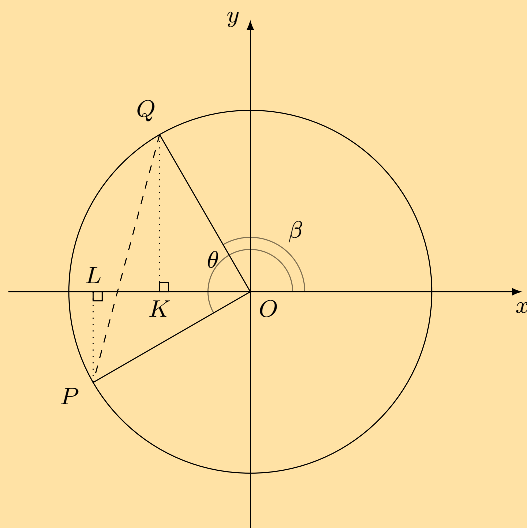
Oplossing:

Ons het getoon dat:

$$\begin{aligned}
2 \cos A \sin B &= \sin(A + B) - \sin(A - B) \\
\therefore \cos A \sin B &= \frac{1}{2} (\sin(A + B) - \sin(A - B)) \\
\text{Laat } A &= 75^\circ \\
\text{En laat } B &= 15^\circ \\
\cos 75^\circ \sin 75^\circ &= \frac{1}{2} (\sin(75^\circ + 15^\circ) - \sin(75^\circ - 15^\circ)) \\
&= \frac{1}{2} (\sin 90^\circ - \sin 60^\circ) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{2 - \sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

6. In die diagram hieronder, lê die punte P en Q op die sirkel met radius 2 eenhede en middelpunt by die oorsprong.

Bewys $\cos(\theta - \beta) = \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta$.



Oplossing:

Ons kan die koördinate van P en Q uitdruk in terme van die hoeke θ en β:

$$\begin{aligned}\text{Vir } Q: \quad \sin\beta &= \frac{y}{2}\\ \therefore y &= 2\sin\beta\\ \text{en } x &= 2\cos\beta\\ &\therefore Q(2\cos\beta; 2\sin\beta)\end{aligned}$$

$$\text{Net so, } P(2\cos\theta; 2\sin\theta)$$

Ons gebruik die afstandformule om PQ^2 te bepaal:

$$\begin{aligned}&\text{In } \triangle POQ,\\ P\hat{O}Q &= \theta - \beta\\ d^2 &= (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2\\ PQ^2 &= (2\cos\theta - 2\cos\beta)^2 + (2\sin\theta - 2\sin\beta)^2\\ &= 4\cos^2\theta - 8\cos\theta\cos\beta + 4\cos^2\beta + 4\sin^2\theta - 8\sin\theta\sin\beta + 4\sin^2\beta\\ &= 4\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + 4\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) - 8\cos\theta\cos\beta - 8\sin\theta\sin\beta\\ &= 8 - 8\left(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta\right)\end{aligned}$$

Nou bepaal ons PQ^2 deur die cosinusreël te gebruik vir $\triangle POQ$:

$$\begin{aligned}PQ^2 &= 2^2 + 2^2 - 2(2)(2)\cos(\theta - \beta)\\ &= 8 - 8\cos(\theta - \beta)\end{aligned}$$

Deur die twee uitdrukkings vir PQ^2 gelyk te stel, het ons

$$\begin{aligned}8 - 8\cos(\theta - \beta) &= 8 - 8\left(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta\right)\\ \therefore \cos(\theta - \beta) &= \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta\end{aligned}$$

Let op: vroeër in hierdie hoofstuk het ons die saamgestelde hoek identiteite afgelei deur die eenheidsirkel (radius = 1 eenheid) te gebruik omdat dit die berekeninge vereenvoudig. Van die oefening hierbo, kan ons sien dat die saamgestelde hoek identiteite in der waarheid afgelei kan word deur 'n sirkel met enige radius te gebruik.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2B3N 2a. 2B3P 2b. 2B3Q 2c. 2B3R 2d. 2B3S 2e. 2B3T
2f. 2B3V 2g. 2B3W 2h. 2B3X 3. 2B3Y 4. 2B3Z 5. 2B42
6. 2B43

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

5.3 Dubbelhoek identiteite

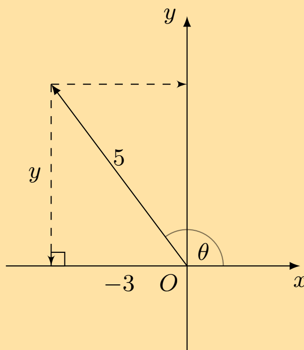
Oefening 5 – 3: Dubbelhoek identiteite

1. Gegee $5\cos\theta = -3$ en $\theta < 180°$. Bepaal die waarde van die volgende sonder 'n sakrekenaar:

a) $\cos 2\theta$

Oplossing:

Maak 'n skets:



$$\begin{aligned}
\cos\theta &= -\frac{3}{5} \\
\therefore x &= -3 \qquad (\theta > 180°) \\
r &= 5 \\
y^2 &= r^2 - x^2 \qquad \text{(Pythagoras)} \\
&= 5^2 - (-3)^2 \\
&= 16 \\
\therefore y &= \pm 4 \qquad \text{(maar } y \text{ is positief)} \\
\therefore y &= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 \\
&= 2\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 \\
&= \frac{18}{25} - 1 \\
&= -\frac{7}{25}
\end{aligned}$$

b) $\sin(180° - 2\theta)$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\sin(180^\circ - 2\theta) &= \sin 2\theta \\
&= 2\sin\theta\cos\theta \\
&= 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) \\
&= -\frac{24}{25}
\end{aligned}
$$

c) $\tan 2\theta$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\tan 2\theta &= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \\
&= -\frac{24}{25} \times \left(-\frac{25}{7}\right) \\
&= \frac{24}{7}
\end{aligned}
$$

2. Gegee $\cos 40^\circ = t$, bepaal (sonder 'n sakrekenaar):

a) $\cos 140^\circ$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\cos 140^\circ &= \cos(180^\circ - 40^\circ) \\
&= -\cos 40^\circ \\
&= -t
\end{aligned}
$$

b) $\sin 40^\circ$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\sin 40^\circ &= \sqrt{1 - \cos^2 40^\circ} \\
&= \sqrt{1 - t^2}
\end{aligned}
$$

c) $\sin 50^\circ$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\sin 50^\circ &= \sin(90^\circ - 50^\circ) \\
&= \cos 40^\circ \\
&= t
\end{aligned}
$$

d) $\cos 80^\circ$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\cos 80^\circ &= \cos 2(40^\circ) \\
&= 2\cos^2 40^\circ - 1 \\
&= 2t^2 - 1
\end{aligned}
$$

e) $\cos 860^\circ$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\cos 860^\circ &= \cos[2(360^\circ) + 140^\circ] \\
&= \cos 140^\circ \\
&= \cos(180^\circ - 40^\circ) \\
&= -\cos 40^\circ \\
&= -t
\end{aligned}
$$

f) $\cos(-1160°)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\cos(-1160°) &= \cos 1160° \\ &= \cos\left(3(360°) + 80°\right) \\ &= \cos(80°) \\ &= \cos 2(40°) \\ &= 2\cos^2 40° - 1 \\ &= 2t^2 - 1\end{aligned}$$

3. a) Bewys die identiteit: $\frac{1}{\sin 2A} - \frac{1}{\tan 2A} = \tan A$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{LK} &= \frac{1}{\sin 2A} - \frac{1}{\tan 2A} \\ &= \frac{1}{\sin 2A} - \frac{\cos 2A}{\sin 2A} \\ &= \frac{1 - \left(1 - 2\sin^2 A\right)}{\sin 2A} \\ &= \frac{2\sin^2 A}{2\sin A\cos A} \\ &= \frac{\sin A}{\cos A} \\ &= \tan A \\ &= \text{RK}\end{aligned}$$

Beperkings:

$$\begin{aligned}\sin 2A &\neq 0 \\ \therefore 2A &\neq 0° + k\ .\ 180° \\ \therefore A &\neq 0° + k\ .\ 90°, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{En } \tan 2A &\neq 0 \\ \therefore 2A &\neq 90° + k\ .\ 180° \\ \therefore A &\neq 45° + k\ .\ 90°, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{En vir } \tan A &: \\ A &\neq 90° + k\ .\ 180°, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

b) Gevolglik, los die vergelyking $\frac{1}{\sin 2A} - \frac{1}{\tan 2A} = 0{,}75$ op vir $0° < A < 360°$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin 2A} - \frac{1}{\tan 2A} &= 0{,}75 \\ \therefore \tan A &= 0{,}75 \\ \therefore A &= 36{,}87° \\ \text{of } A &= 180° + 36{,}87° \\ &= 216{,}87°\end{aligned}$$

4. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, vind die waarde van die volgende:

a) $\sin 22{,}5°$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2 \times 22{,}5^\circ &= 45^\circ \\
\cos 2\theta &= 1 - 2\sin^2\theta \\
\cos 45^\circ &= 1 - 2\sin^2(22{,}5^\circ) \\
\frac{1}{\sqrt{2}} &= 1 - 2\sin^2(22{,}5^\circ) \\
\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 &= -2\sin^2(22{,}5^\circ) \\
\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} &= -2\sin^2(22{,}5^\circ) \\
\frac{1-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} &= \sin^2(22{,}5^\circ) \\
\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} &= \sin^2(22{,}5^\circ) \\
\therefore \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} &= \sin 22{,}5^\circ \\
\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} &= \sin 22{,}5^\circ \\
\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} &= \sin 22{,}5^\circ
\end{aligned}
$$

Konroleer die antwoord met 'n sakrekenaar.

b) $\cos 67{,}5^\circ$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\cos 67{,}5^\circ &= \cos(90^\circ - 22{,}5^\circ) \\
&= \sin(22{,}5^\circ) \\
&= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}
\end{aligned}
$$

Konroleer die antwoord met 'n sakrekenaar.

5. a) Bewys die identiteit: $\tan 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{LK} &= \tan 2x + \frac{1}{\cos 2x} \\
&= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x} \\
&= \frac{\sin 2x + 1}{\cos 2x} \\
&= \frac{2\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\
&= \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} \\
&= \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \\
&= \text{RK}
\end{aligned}
$$

Beperkings:

$$
\begin{aligned}
\cos 2x &\neq 0 \\
\therefore 2x &\neq 90^\circ + k\ .\ 180^\circ \\
\therefore x &\neq 45^\circ + k\ .\ 90^\circ, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\text{En } \cos x &\neq \sin x \\
\therefore x &\neq 45^\circ + k\ .\ 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\text{En vir } \tan 2x & \\
\therefore 2x &\neq 90^\circ + k\ .\ 180^\circ \\
\therefore x &\neq 45^\circ + k\ .\ 90^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

b) Verduidelik hoekom die identiteit ongedefinieer is vir $x = 45^\circ$

Oplossing:

Beskou die noemer aan die LK:

$$
\begin{aligned}
\cos 2x &= \cos 2\left(45^\circ\right) \\
&= \cos 90^\circ \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Beskou die noemer aan die RK:

$$
\begin{aligned}
\cos 45^\circ &= \sin 45^\circ \\
\therefore \cos 45^\circ - \sin 45^\circ &= 0
\end{aligned}
$$

Dus, die identiteit sal ongedefinieer wees omdat deling deur nul nie toegelaat is nie.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2B44 2. 2B45 3. 2B46 4a. 2B47 4b. 2B48 5. 2B49

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

5.4 Oplos van vergelykings

Oefening 5 – 4: Los trigonometriese vergelykings op

1. Vind die algemene oplossing vir elk van die volgende vergelykings (korrek tot twee desimale plekke):

   a) $\sin 2x = \tan 28^\circ$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= \tan 28^\circ \\
&= 0{,}53\ldots \\
\text{verw } \angle &= 32{,}12^\circ \\
\text{Eerste kwadrant:} \quad 2x &= 32{,}12^\circ + k\,.\,360^\circ \\
\therefore x &= 16{,}06^\circ + k\,.\,180^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
\\
\text{Tweede kwadrant:} \quad 2x &= (180^\circ - 32{,}12^\circ) + k\,.\,360^\circ \\
&= 147{,}88^\circ + k\,.\,360^\circ \\
\therefore x &= 73{,}9^\circ + k\,.\,180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

b) $\cos y = \sin 2y$

Oplossing:

Ons kan die linkerkant, wat y bevat, verander deur ko-funksies te gebruik, of die regterkant deur gebruik te maak van dubbelhoeke:

$$\begin{aligned}
\cos y &= \sin 2y \\
\sin(90^\circ - y) &= \sin 2y \\
\text{Eerste kwadrant:} \quad (90^\circ - y) + k\,.\,360^\circ &= 2y \\
90^\circ + k\,.\,360^\circ &= 3y \\
30^\circ + k\,.\,120^\circ &= y \\
\\
\text{Tweede kwadrant:} \quad 180^\circ - (90^\circ - y) + k\,.\,360^\circ &= 2y \\
90^\circ + y + k\,.\,360^\circ &= 2y \\
90^\circ + k\,.\,360^\circ &= y
\end{aligned}$$

vir $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sin 2\alpha = \cos 2\alpha$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= \cos 2\alpha \\
\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} &= 1 \\
\tan 2\alpha &= 1 \\
\therefore 2\alpha &= 45^\circ + k\,.\,180^\circ \\
\therefore \alpha &= 22{,}5^\circ + k\,.\,90^\circ, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

d) $\sin 3p = \sin 2p$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sin 3p &= \sin 2p \\
\text{Eerste kwadrant:} \quad 3p &= 2p + k\,.\,360^\circ \\
\therefore p &= k\,.\,360^\circ \\
\text{Tweede kwadrant:} \quad 3p &= (180^\circ - 2p) + k\,.\,360^\circ \\
5p &= 180^\circ + k\,.\,360^\circ \\
\therefore p &= 36^\circ + k\,.\,72^\circ, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

e) $\tan A = \frac{1}{\tan A}$

Oplossing:

$$\tan A = \frac{1}{\tan A}$$
$$\tan^2 A = 1$$
$$\therefore \tan A = \pm 1$$
Eerste kwadrant: $A = 45^\circ + k \,.\, 180^\circ$

Tweede kwadrant: $A = (180^\circ - 45^\circ) + k \,.\, 180^\circ$
$$= 135^\circ + k \,.\, 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Beperkings:

Vir $\tan A$:
$$A \neq 90^\circ + k \,.\, 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$
En vir $\frac{1}{\tan A}$ kan ons skryf $\frac{\cos A}{\sin A}$:
$$\therefore \sin A \neq 0$$
$$A \neq 0^\circ + k \,.\, 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

f) $\sin x \tan x = 1$

Oplossing:

$$\sin x \tan x = 1$$
$$\sin x \,.\, \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \qquad (\cos x \neq 0)$$
$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} = 1$$
$$1 - \cos^2 x = \cos x$$
$$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$
Laat $\cos x = p$
$$p^2 + p - 1 = 0$$
$$\therefore p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \qquad \text{(kwadratiese formule)}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore p = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ of } p = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore \cos x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ of } \cos x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$\cos x = -1{,}618\ldots \text{ of } \cos x = 0{,}618\ldots$$
Eerste antwoord: geen oplossing omdat $-1 \leq \cos x \leq 1$

Tweede antwoord: verw $\angle = 51{,}8^\circ$

Eerste kwadrant: $x = 51{,}8^\circ + k \,.\, 360^\circ$

Tweede kwadrant: $x = (360^\circ - 51{,}8^\circ) + k \,.\, 360^\circ$
$$= 308{,}2^\circ + k \,.\, 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Beperkings:

Vir $\tan x$:
$$x \neq 90^\circ + k \,.\, 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

g) $\sin t \,.\, \sin 2t + \cos 2t = 1$

Oplossing:

$$\sin t\ .\ \sin 2t + \cos 2t = 1$$
$$\sin t\ .\ 2\sin t\cos t + \left(1 - 2\sin^2 t\right) = 1$$
$$2\sin^2 t\cos t + 1 - 2\sin^2 t = 1$$
$$2\sin^2 t\cos t - 2\sin^2 t = 0$$
$$2\sin^2 t\,(\cos t - 1) = 0$$
$$\text{As}\quad 2\sin^2 t = 0$$
$$\sin t = 0$$
$$\therefore t = 0^\circ + k\ .\ 360^\circ$$
$$\text{of}\quad t = 180^\circ + k\ .\ 360^\circ$$
$$\text{As}\quad \cos t - 1 = 0$$
$$\cos t = 1$$
$$\therefore t = 0^\circ + k\ .\ 360^\circ$$
$$\text{of}\quad t = 360^\circ + k\ .\ 360^\circ$$

Finale antwoord: $t = 0^\circ + k\ .\ 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$

h) $\sin 60^\circ \cos x + \cos 60^\circ \sin x = 1$

Oplossing:

$$\sin 60^\circ \cos x + \cos 60^\circ \sin x = 1$$
$$\sin(60^\circ + x) = 1$$
$$\therefore 60^\circ + x = 90^\circ + k\ .\ 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\therefore x = 30^\circ + k\ .\ 360^\circ$$

2. Gegee: $\sin x \cos x = \sqrt{3}\sin^2 x$

a) Los die vergelyking op vir $x \in [0^\circ; 360^\circ]$, sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

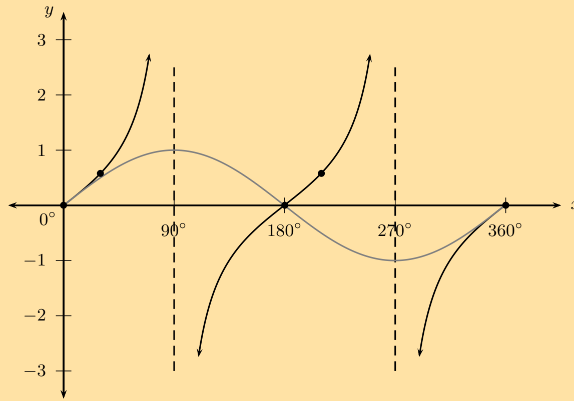
Oplossing:

$$\sin x\cos x = \sqrt{3}\sin^2 x$$
$$\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 0$$
$$\sin x\left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right) = 0$$
$$\therefore \sin x = 0 \text{ of } \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$
$$\text{As } \sin x = 0 \qquad \text{vir } x \in [0^\circ; 360^\circ]$$
$$\therefore x = 0^\circ, 180^\circ \text{ of } 360^\circ$$
$$\text{As } \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \qquad \text{vir } x \in [0^\circ; 360^\circ]$$
$$\cos x = \sqrt{3}\sin x$$
$$\frac{\cos x}{\cos x} = \sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$1 = \sqrt{3}\tan x$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan x$$
$$\text{verw } \angle = 30^\circ$$
$$\therefore x = 30^\circ + k\ .\ 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$
$$\therefore x = 30^\circ \text{ of } 210^\circ$$

b) Trek 'n grafiek en dui die oplossing daarop aan.

Oplossing:

Die diagram hieronder toon die grafiek van $y = \sin x$ (grys) en $y = \tan x$ (swart).



3. Gegee: $1+\tan^2 2A = 5\tan 2A - 5$

a) Bepaal die algemene oplossing.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
1+\tan^2 2A &= 5\tan 2A - 5\\
\tan^2 2A - 5\tan 2A + 6 &= 0\\
(\tan 2A - 3)(\tan 2A - 2) &= 0\\
\therefore \tan 2A - 3 = 0 &\text{ of } \tan 2A - 2 = 0\\
\text{As } \tan 2A - 3 &= 0\\
\tan 2A &= 3\\
\therefore 2A &= 71{,}57^\circ + k\ .\ 180^\circ\\
\therefore A &= 35{,}79^\circ + k\ .\ 90^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}\\
\text{As } \tan 2A - 2 &= 0\\
\tan 2A &= 2\\
\therefore 2A &= 63{,}43^\circ + k\ .\ 180^\circ\\
\therefore A &= 31{,}72^\circ + k\ .\ 90^\circ, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

b) Hoeveel oplossings het die gegewe vergelyking in die interval $[-90^\circ; 360^\circ]$?
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{As } k = -1: \quad & A = 35{,}79^\circ - 90^\circ\\
& \quad = -54{,}21^\circ\\
& A = 31{,}72^\circ - 90^\circ\\
& \quad = -58{,}28^\circ\\
\text{As } k = 0: \quad & A = 35{,}79^\circ\\
& A = 31{,}72^\circ\\
\text{As } k = 1: \quad & A = 35{,}79^\circ + 90^\circ\\
& \quad = 125{,}79^\circ\\
& A = 31{,}72^\circ + 90^\circ\\
& \quad = 121{,}72^\circ\\
\text{As } k = 2: \quad & A = 35{,}79^\circ + 180^\circ\\
& \quad = 215{,}79^\circ\\
& A = 31{,}72^\circ + 180^\circ\\
& \quad = 211{,}72^\circ\\
\text{As } k = 3: \quad & A = 35{,}79^\circ + 270^\circ\\
& \quad = 305{,}79^\circ\\
& A = 31{,}72^\circ + 270^\circ\\
& \quad = 301{,}72^\circ
\end{aligned}
$$

Dus, daar is tien oplossings binne die interval $[-90°; 360°]$.

4. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, los $\cos(A - 25°) + \cos(A + 25°) = \cos 25°$ op in $[-360°; 360°]$.

   Oplossing:

   Ons vereenvoudig eers die linkerkant van die vergelyking:

$$\begin{aligned} \cos(A - 25°) + \cos(A + 25°) &= \cos 25° \\ \cos A \cos 25° + \sin A \sin 25° + \cos A \cos 25° - \sin A \sin 25° &= \cos 25° \\ 2 \cos A \cos 25° &= \cos 25° \\ \therefore 2 \cos A &= 1 \quad (\cos 25° \neq 0) \\ \cos A &= \frac{1}{2} \\ \therefore A &= 60° + k \,.\, 360° \\ \text{of } A &= 300° + k \,.\, 360°, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \therefore A &= -300°, -60°, 60° \text{ of } 300° \end{aligned}$$

5. a) Vind die algemene oplossing vir $\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x = \tan 140°$.

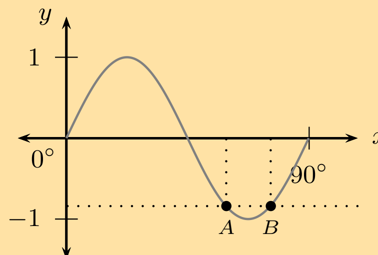
   Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x &= \tan 140° \\ \sin(x + 3x) &= -0{,}839\ldots \\ \sin 4x &= -0{,}839\ldots \\ \text{verw } \angle &= 57{,}03° \\ \text{Derde kwadrant:} \quad 4x &= (180° + 57{,}03°) + k \,.\, 360°, k \in \mathbb{Z} \\ &= 237{,}03° + k \,.\, 360° \\ \therefore x &= 59{,}26° + k \,.\, 90° \\ \text{Vierde kwadrant:} \quad 4x &= (360° - 57{,}03°) + k \,.\, 360°, k \in \mathbb{Z} \\ &= 302{,}97° + k \,.\, 360° \\ \therefore x &= 75{,}74° + k \,.\, 90° \end{aligned}$$

   b) Gebruik 'n grafiek om die oplossing in die interval $[0°; 90°]$ te illustreer.

   Oplossing:

   Die diagram hieronder toon die grafiek van $y = \sin 4x$.

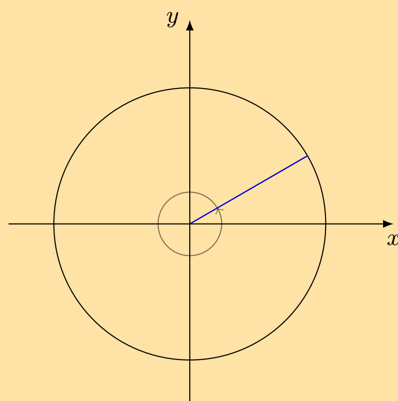


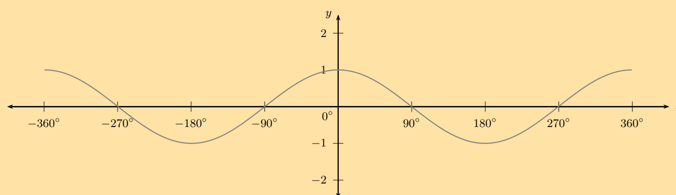
   $A(59{,}26°; -0{,}84), B(75{,}74°; -0{,}84)$

6. Verduidelik hoekom $\theta = \cos^{-1} a + k \,.\, 360°$ die algemene oplossing is vir die vergelyking $\cos\theta = a$, en $\tan\theta = a$ die algemene oplossing is vir die vergelyking $\theta = \tan^{-1} a + k \,.\, 180°$. Hoekom verskil hulle?

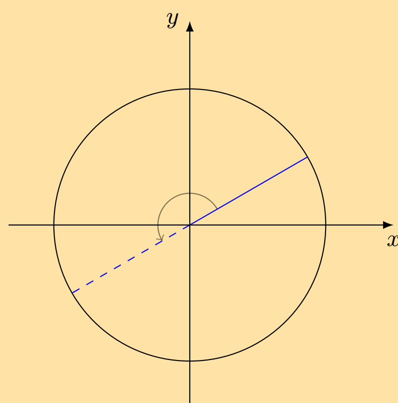
   Oplossing:

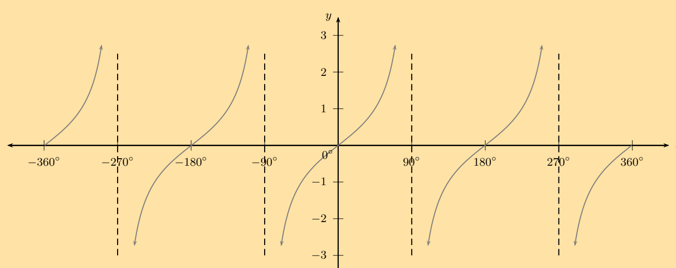
   Die periode van die cosinusfunksie is $360°$. Dit beteken dat die funksiewaardes herhaal na $360°$.





Die periode van die tangensfunksie is $180°$. Dit beteken dat die funksiewaardes herhaal na $180°$.





7. Los op vir x: $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin x + \cos x &= 2 \\
\sqrt{3}\sin x - 2 &= \cos x \\
\text{Stel in } \cos x &= \sqrt{1 - \sin^2 x} \\
\therefore \sqrt{3}\sin x - 2 &= \sqrt{1 - \sin^2 x} \\
\text{Kwadreer beide kante van die verg: } \left(\sqrt{3}\sin x - 2\right)^2 &= \left(\sqrt{1 - \sin^2 x}\right)^2 \\
3\sin^2 x - 4\sqrt{3}\sin x + 4 &= 1 - \sin^2 x \\
4\sin^2 x - 4\sqrt{3}\sin x + 3 &= 0 \\
\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)^2 &= 0 \\
\therefore 2\sin x - \sqrt{3} &= 0 \\
\therefore \sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\text{verw } \angle &= 60^\circ \\
\text{Eerste kwadrant: } x &= 60^\circ + k\,.\,360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\text{Tweede kwadrant: } x &= 180^\circ - 60^\circ + k\,.\,360^\circ \\
&= 120^\circ + k\,.\,360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Kontroleer dat beide antwoorde die oorspronklike vergelyking bevredig:

$$\begin{aligned}
\text{Stel in } x &= 60^\circ \\
\therefore \text{LK} &= \sqrt{3}\sin 60^\circ + \cos 60^\circ \\
&= \sqrt{3}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 2 \\
&= \text{RK} \\
\text{Stel in } x &= 120^\circ \\
\therefore \text{LK} &= \sqrt{3}\sin 120^\circ + \cos 120^\circ \\
&= \sqrt{3}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\
&= 1 \\
&\neq \text{RK}
\end{aligned}$$

Dus, $x = 60^\circ + k\,.\,360^\circ$.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2B4B 1b. 2B4C 1c. 2B4D 1d. 2B4F 1e. 2B4G 1f. 2B4H
1g. 2B4J 1h. 2B4K 2. 2B4M 3. 2B4N 4. 2B4P 5. 2B4Q
6. 2B4R 7. 2B4S

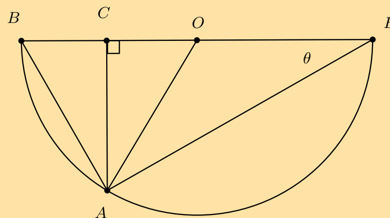
 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

5.5 Toepassings van trigonometriese funksies

Probleme in twee dimensies

Oefening 5 – 5:

1. In the diagram hieronder, is O die middelpunt van die semi-sirkel BAE.



a) Vind $A\hat{O}C$ in terme van θ.

Oplossing:

BE is 'n middellyn van semi-sirkel BAE. O is die middelpunt en halveer dus BE.

$$\begin{aligned} OA &= OE = OB && \text{(gelyke radiusse)} \\ \therefore O\hat{A}E &= \theta && \text{(gelykbenige driehoek)} \\ \therefore A\hat{O}C &= \theta + \theta && \text{(buite } \angle \text{ van } \triangle OAE = \text{ som van teenoorst. binne } \angle\text{e)} \\ &= 2\theta \end{aligned}$$

Of

$$A\hat{O}C = 2\theta \qquad (\angle \text{ by middelpt } = 2\angle \text{ op omtrek })$$

b) In $\triangle ABE$, bepaal 'n uitdrukking vir $\cos\theta$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} B\hat{A}E &= 90^\circ \quad (\angle \text{ in semi-sirkel}) \\ \therefore \cos\theta &= \frac{AE}{BE} \end{aligned}$$

c) In $\triangle ACE$, bepaal 'n uitdrukking vir $\sin\theta$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} A\hat{C}E &= 90^\circ \quad \text{(gegee)} \\ \therefore \sin\theta &= \frac{CA}{AE} \end{aligned}$$

d) In $\triangle ACO$, bepaal 'n uitdrukking vir $\sin 2\theta$.

Oplossing:

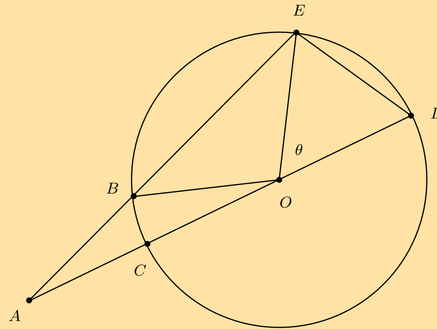
$$\begin{aligned} A\hat{C}O &= 90^\circ \quad \text{(gegee)} \\ A\hat{O}C &= 2\theta \quad \text{(bewys)} \\ \therefore \sin 2\theta &= \frac{CA}{AO} \end{aligned}$$

e) Gebruik die resultate van die vorige vrae om te wys dat $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \tfrac{AE}{BE} \\
\therefore AE &= BE\cos\theta \\
\sin\theta &= \tfrac{CA}{AE} \\
\therefore CA &= AE\sin\theta \\
&= (BE\cos\theta)\sin\theta \\
BE &= 2(OE) && \text{(radiusse)} \\
\therefore CA &= 2(OE)\sin\theta\cos\theta \\
\therefore \tfrac{CA}{OE} &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\text{maar } \tfrac{CA}{OE} &= \tfrac{CA}{OA} = \sin 2\theta && \text{(in } \triangle ACO\text{)} \\
\therefore \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}$$

2. DC is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O en radius r. $CA = r$, $AE = 2DE$ en $D\hat{O}E = \theta$.
   Wys dat $\cos\theta = \frac{1}{4}$.



Oplossing:

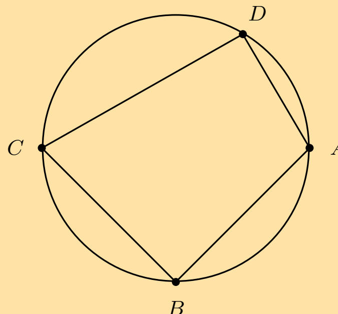
In $\triangle DOE$, laat $DE = k$

$$\begin{aligned}
k^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2\cos\theta \\
&= 2r^2 - 2r^2\cos\theta \ldots\ldots (1)
\end{aligned}$$

In $\triangle AOE$, $AE = 2k$

$$\begin{aligned}
(2k)^2 &= (2r)^2 + r^2 - 2(2r)(r)\cos(180^\circ - \theta) \\
\therefore 4k^2 &= 4r^2 + r^2 + 4r^2\cos\theta \\
\therefore 4k^2 &= 5r^2 + 4r^2\cos\theta \ldots\ldots (2) \\
(1)\times 4\text{: } 4k^2 &= 8r^2 - 8r^2\cos\theta \ldots\ldots (3) \\
(3)-(2): \quad 0 &= 3r^2 - 12r^2\cos\theta \\
\therefore 12r^2\cos\theta &= 3r^2 \\
\cos\theta &= \frac{3r^2}{12r^2} \\
\therefore \cos\theta &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

3. Die figuur hieronder toon 'n koordevierhoek met $\frac{BC}{CD} = \frac{AD}{AB}$.



a) Wys dat die area van die koordevierhoek $DC \ . \ DA \ . \ \sin \hat{D}$ is.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
&\text{Verbind } CA \text{ om } \triangle ADC \text{ en } \triangle ABC \text{ te konsrueer}\\
&\frac{BC}{CD} = \frac{AD}{AB} \qquad \text{(gegee)}\\
&\therefore BC \ . \ AB = AD \ . \ CD\\
&\text{Area } \triangle ADC = \tfrac{1}{2} DC \ . \ DA \sin \hat{D}\\
&\text{Area } \triangle ABC = \tfrac{1}{2} AB \ . \ BC \sin \hat{B}\\
&\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \qquad \text{(teenoorst. } \angle\text{e koordevierhoek is supp.)}\\
&\therefore \hat{B} = 180^\circ - \hat{D}\\
&\therefore \sin \hat{B} = \sin(180^\circ - \hat{D}) = \sin \hat{D}\\
&\text{Area } ABCD = \text{ area } \triangle ADC + \text{ area } \triangle ABC\\
&= \tfrac{1}{2} DC \ . \ DA \sin \hat{D} + \tfrac{1}{2} AB \ . \ BC \sin \hat{B}\\
&= \tfrac{1}{2} DC \ . \ DA \sin \hat{D} + \tfrac{1}{2} DC \ . \ DA \sin \hat{D}\\
&= DC \ . \ DA \sin \hat{D}
\end{aligned}
$$

b) Skryf twee uitdrukkings neer vir CA^2: een in terme van $\cos \hat{D}$ en een in terme van $\cos \hat{B}$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
CA^2 &= DC^2 + DA^2 - 2(DC)(DA) \cos \hat{D}\\
CA^2 &= AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC) \cos \hat{B}
\end{aligned}
$$

c) Wys dat $2CA^2 = CD^2 + DA^2 + AB^2 + BC^2$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
CA^2 &= DC^2 + DA^2 - 2(DC)(DA) \cos \hat{D}\\
CA^2 &= AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC) \cos \hat{B}\\
&= AB^2 + BC^2 - 2(DC)(DA) \cos \hat{B} \quad (DC \ . \ DA = AB \ . \ BC)\\
2CA^2 &= CD^2 + DA^2 + AB^2 + BC^2 - 2(DC)(DA) \cos \hat{D}\\
&- 2(DC)(DA) \cos(180^\circ - \hat{D})\\
&= CD^2 + DA^2 + AB^2 + BC^2 - 2(DC)(DA) \cos \hat{D}\\
&+ 2(DC)(DA) \cos \hat{D}\\
&= CD^2 + DA^2 + AB^2 + BC^2
\end{aligned}
$$

d) Veronderstel dat $BC = 10$ eenhede, $CD = 15$ eenhede, $AD = 4$ eenhede en $AB = 6$ eenhede. Bereken CA^2 (korrek tot een desimale plek).

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2CA^2 &= (15)^2 + (4)^2 + (6)^2 + (10)^2\\
&= 377\\
\therefore CA^2 &= 188{,}5 \text{ eenhede}^2
\end{aligned}
$$

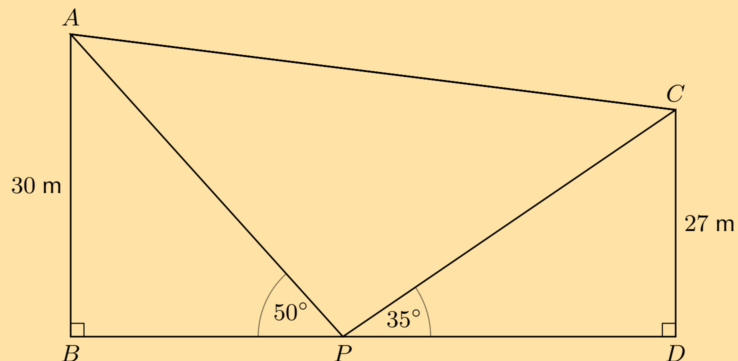
e) Vind die hoek $\hat{B}$. Bereken vervolgens die area van $ABCD$ (korrek tot een desimale plek).

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
CA^2 &= AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos \hat{B} \\
188{,}5 &= 6^2 + 10^2 - 2(6)(10)\cos \hat{B} \\
188{,}5 &= 136 - 120\cos \hat{B} \\
\cos \hat{B} &= -0{,}4375 \\
\text{verw } \angle &= 64{,}05^\circ \\
\therefore \hat{B} &= 180^\circ - 64{,}05^\circ \\
&= 115{,}94^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Area } ABCD &= DC \times DA \sin(115{,}94^\circ) \\
&= 15 \times 4 \sin(115{,}94^\circ) \\
&= \sin(115{,}94^\circ) \\
&= 54{,}0 \text{ eenhede}^2
\end{aligned}
$$

4. Twee vertikale torings AB en CD is 30 m en 27 m hoog onderskeidelik. Punt P lê tussen die twee torings. Die hoogtehoeke van P na A is 50° en van P na C is 35°. 'n Kabel word benodig om A en C te verbind.



a) Bepaal die minimum lengte kabel wat benodig word om A en C te verbind (tot die naaste meter).

Oplossing:

$$\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \quad \text{(vertikale torings)}$$

$$\begin{aligned}
\text{In } \triangle ABP: \quad \frac{30}{AP} &= \sin 50^\circ \\
AP &= \frac{30}{\sin 50^\circ} \\
&= 39{,}16 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In } \triangle CDP: \quad \frac{27}{CP} &= \sin 35^\circ \\
CP &= \frac{27}{\sin 35^\circ} \\
&= 47{,}07 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In } \triangle APC: A\hat{P}C &= 180^\circ - (50^\circ + 35^\circ) \\
&= 95^\circ \\
AC^2 &= AP^2 + PC^2 - 2(AP)(PC)\cos A\hat{P}C \\
&= (39{,}16)^2 + (47{,}07)^2 - 2(39{,}16)(47{,}07)\cos 95^\circ \\
&= 4070{,}39 \\
\therefore AC &= 63{,}80 \text{ m} \\
&\approx 64 \text{ m}
\end{aligned}$$

b) Hoe ver van mekaar af is die basisse van die twee torings (tot die naaste meter)?

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{In } \triangle ABP: \quad \frac{BP}{39{,}16} &= \cos 50^\circ \\
\therefore BP &= 39{,}16 \cos 50^\circ \\
&= 25{,}17 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{In } \triangle CDP: \quad \frac{PD}{47{,}07} &= \cos 35^\circ \\
\therefore PD &= 47{,}07 \cos 35^\circ \\
&= 38{,}56 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BD &= BP + PD \\
&= 25{,}17 \text{ m} + 38{,}56 \text{ m} \\
&= 63{,}7 \text{ m} \\
&\approx 64 \text{ m}
\end{aligned}$$

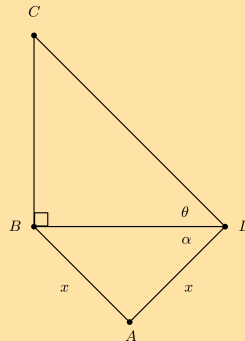
Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2B4T 1b. 2B4V 1c. 2B4W 1d. 2B4X 1e. 2B4Y 2. 2B4Z
3a. 2B52 3b. 2B53 3c. 2B54 3d. 2B55 3e. 2B56 4. 2B57

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 5 – 6:

1. Lyn BC verteenwoordig 'n hoë toring met sy basis by B. Die hoogtehoek vanaf D na C is θ. 'n Man staan by A sodat $BA = AD = x$ en $A\hat{D}B = \alpha$.



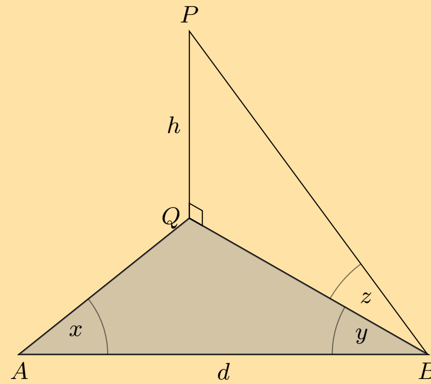
a) Vind die hoogte van die toring BC in terme van x, $\tan\theta$ en $\cos\alpha$.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{In } \triangle BCD, \quad \tan\theta &= \frac{BC}{BD} \\
\therefore BC &= BD\tan\theta \\
\text{In } \triangle ABD, \quad \frac{\sin\hat{A}}{BD} &= \frac{\sin\alpha}{x} \\
\therefore BD &= \frac{x\sin\hat{A}}{\sin\alpha} \\
\therefore BC &= \frac{x\sin\hat{A}\tan\theta}{\sin\alpha} \\
\hat{A} + \alpha + \alpha &= 180^\circ \qquad (\angle\text{e van } \triangle ABD) \\
\therefore \hat{A} &= 180^\circ - 2\alpha \\
\therefore \sin\hat{A} &= \sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha \\
\therefore BC &= \frac{x\sin 2\alpha\tan\theta}{\sin\alpha} \\
\text{en } \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\therefore \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} &= 2\cos\alpha \\
\therefore BC &= 2x\cos\alpha\tan\theta
\end{aligned}
$$

b) Vind BC as dit gegee word dat $x = 140$ m, $\alpha = 21^\circ$ en $\theta = 9^\circ$.
Oplossing:

$$BC = 2(140)\cos 21^\circ \tan 9^\circ = 41{,}40 \text{ m}$$

2. P is die toppunt van 'n mas en sy basis, Q, is in dieselfde horisontale vlak as die punte A en B. Die hoogtehoek, gemeet vanaf B na P is z. $AB = d$, $Q\hat{A}B = x$ en $Q\hat{B}A = y$.



a) Gebruik die gegewe inligting om die algemene formule af te lei vir h, die hoogte van die mas.

Oplossing:

In $\triangle QAB$: $\hat{Q} = 180° - (x + y)$ ($\angle$e som van $\triangle QAB$)

$$\frac{QB}{\sin \hat{A}} = \frac{AB}{\sin \hat{Q}}$$
$$\frac{QB}{\sin x} = \frac{d}{\sin\big(180° - (x+y)\big)}$$
$$\frac{QB}{\sin x} = \frac{d}{\sin(x+y)}$$
$$QB = \frac{d \sin x}{\sin(x+y)}$$

In $\triangle PQB$:

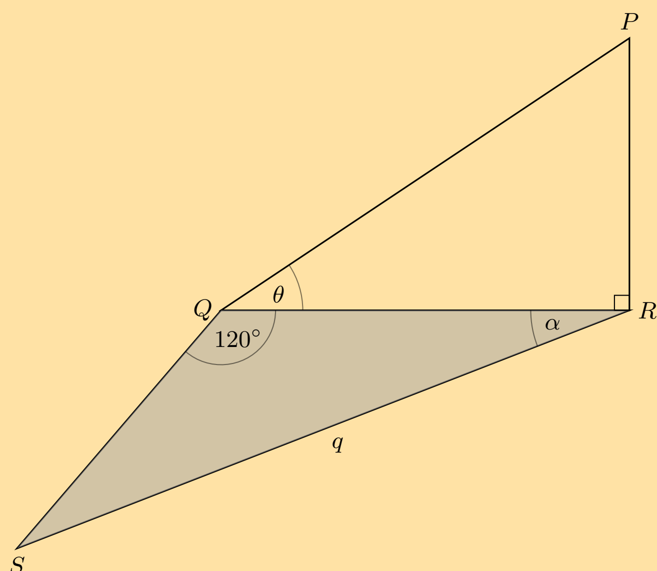
$$\hat{Q} = 90° \qquad \text{(vertikale mas)}$$
$$\hat{B} = z \qquad \text{(gegee)}$$
$$\tan \hat{B} = \frac{QP}{QB}$$
$$\tan \hat{B} \times QB = QP$$
$$\therefore QP = \tan z \times QB$$
$$\therefore h = \tan z \times \frac{d \sin x}{\sin(x+y)}$$
$$= \frac{d \sin x \tan z}{\sin(x+y)}$$

b) As $d = 50$ m, $x = 46°$, $y = 15°$ en $z = 20°$, bereken h (tot die naaste meter).

Oplossing:

$$h = \frac{d \sin x \tan z}{\sin(x+y)}$$
$$= \frac{50 \sin 46° \tan 20°}{\sin(46° + 15°)}$$
$$= 14{,}967\ldots$$
$$\approx 15 \text{ m} \qquad \text{(tot die naaste meter)}$$

3. PR is die hoogte van 'n blok woonstelle met R by die basis en P by die top van die gebou. S is 'n punt in dieselfde horisontale vlak as punte Q en R. $SR = q$ eenhede, $S\hat{Q}R = 120°$, $S\hat{R}Q = \alpha$ en $R\hat{Q}P = \theta$.



a) Toon dat die hoogte van die blok woonstelle, PR, uitgedruk kan word as:

$$PR = q \tan\theta \left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{3}\right)$$

Oplossing:
QR is die skakel tussen $\triangle PQR$ en $\triangle SQR$.

In $\triangle SQR$: $\hat{S} = 180° - (120° + \alpha)$ ($\angle$e som van $\triangle SQR$)

$$\frac{QR}{\sin\hat{S}} = \frac{q}{\sin\hat{Q}}$$

$$\begin{aligned} QR &= \frac{q\sin(180° - (120° + \alpha))}{\sin(120°)} \\ &= \frac{q\sin(60° - \alpha)}{\sin(180° - 60°)} \\ &= \frac{q(\sin 60°\cos\alpha - \cos 60°\sin\alpha)}{\sin 60°} \\ &= \frac{q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= q\left(\frac{\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}{2}\right) \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= q\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}\right) \\ &= q\left(\cos\alpha - \left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= q\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{3}\right) \end{aligned}$$

In $\triangle PQR$: $\hat{R} = 90°$

$$\begin{aligned} \frac{PR}{QR} &= \tan\theta \\ \therefore PR &= \tan\theta \times QR \\ &= \tan\theta \times q\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{3}\right) \\ &= q\tan\theta\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{3}\right) \end{aligned}$$

b) As $SR = 35$ m, $S\hat{R}Q = 16^\circ$ en $R\hat{Q}P = 30^\circ$, bereken PR (korrek tot een desimale plek).

Oplossing:

$$\begin{aligned} PR &= q\tan\theta\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{3}\right) \\ &= 35\tan 30^\circ\left(\cos 16^\circ - \frac{\sqrt{3}\sin 16^\circ}{3}\right) \\ &= 16{,}2 \text{ m} \end{aligned}$$

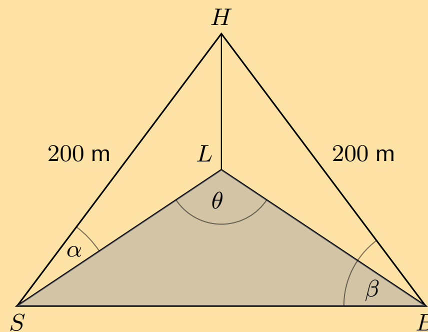
c) Aanvaar elke vlak of verdieping is 2,5 m hoog en skat die aantal verdiepings in die woonstelblok.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Benaderde aantal verdiepings } &= \frac{16}{2{,}5} \\ &= 6{,}4 \end{aligned}$$

Dus, daar is ongeveer 6 vlakke.

4. Twee skepe op see kan 'n vuurtoring op die kus sien. Die afstand vanaf die top van die vuurtoring (H) na skip S en na skip B is 200 m. Die hoogtehoek vanaf S na H is α, $H\hat{B}S = \beta$ en $S\hat{L}B = \theta$



a) Toon dat die afstand tussen die twee skepe gegee word deur $SB = 400\cos\beta$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} &\text{In } \triangle HSB: \\ HS &= HB = 200 \text{ m} && \text{(gegee)} \\ SB^2 &= HS^2 + HB^2 - 2(HS)(HB)\cos S\hat{H}B && \text{(cosinusreël)} \\ SB^2 &= (200)^2 + (200)^2 - 2(200)(200)\cos S\hat{H}B \\ &= 40\ 000 + 40\ 000 - 80\ 000\cos(180^\circ - 2\beta) \\ &= 80\ 000 + 80\ 000\cos(2\beta) \\ &= 80\ 000\,(1 + \cos 2\beta) \\ &= 80\ 000\left(1 + 2\cos^2\beta - 1\right) \\ &= 160\ 000\cos^2\beta \\ \therefore SB &= 400\cos\beta && \text{(afstand is positief)} \end{aligned}$$

b) Toon dat die area van die see ingesluit in $\triangle LSB$ gegee word deur $\triangle LSB = 2000\cos^2\alpha\sin\theta$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\text{In } \triangle HSL \text{ en } \triangle HBL: && \\
&HS = HB = 200 \text{ m} && \text{(gegee)} \\
&HL = HL && \text{(gemene sy)} \\
&H\hat{L}S = H\hat{L}B = 90^{\circ} && \text{(vertikale ligtoring)} \\
&\therefore \triangle HSL \,|||\, \triangle HBL && \text{(RK)} \\
&\therefore H\hat{B}L = H\hat{S}L = \alpha && (\triangle HSL|||\triangle HBL)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Area}\triangle LSB &= \tfrac{1}{2}(LS)(LB)\sin\theta \\
\text{In } \triangle HSL: \quad \tfrac{LS}{HS} &= \cos\alpha \\
\therefore LS &= HS\cos\alpha \\
&= 200\cos\alpha \\
\text{In } \triangle HBL: \quad \tfrac{LB}{HB} &= \cos\alpha \\
\therefore LB &= 200\cos\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Area}LSB &= \tfrac{1}{2}(LS)(LB)\sin\theta \\
&= \tfrac{1}{2}(200\cos\alpha)(200\cos\alpha)\sin\theta \\
&= 20\ 000\cos^2\alpha\sin\theta
\end{aligned}$$

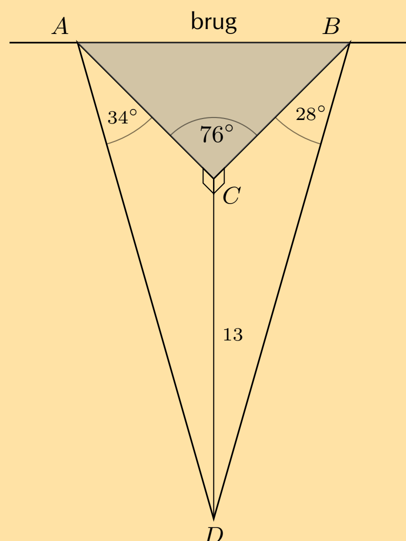
c) Bereken die driehoekige area van die see as die hoogtehoek vanaf die skip na die top van die vuurtoring 10° is en die hoek tussen die direkte lyne vanaf die basis van die vuurtoring na elke skip 85° is.

Oplossing:

$\theta = 85^{\circ}$ en $\alpha = 10^{\circ}$.

$$\begin{aligned}
\text{Area } \triangle LSB &= 2000\cos^2\alpha\sin\theta \\
&= 2000(\cos 10^{\circ})^2\sin 85^{\circ} \\
&= 1932{,}3 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

5. 'n Driehoekige uitkykplatform ($\triangle ABC$) is vas aan 'n brug wat strek oor 'n diep vallei. Die vertikale diepte van die vallei, dus die afstand vanaf die rand van die uitkykplatform C na die bodem van die vallei D, is 13 m. Die dieptehoek vanaf A na D is 34° en vanaf B na D is 28°. Die hoek by die rand van die platform, $\hat{C}$ is 76°.



a) Bereken die area van die uitkykplatform (tot die naaste m^2).

Oplossing:

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2} AC \,.\, BC \sin \hat{C}$$

$$\text{In } \triangle ACD: \quad \frac{13}{AC} = \tan 34^\circ$$

$$\therefore AC = \frac{13}{\tan 34^\circ}$$

$$= 19{,}27\ldots$$

$$\text{In } \triangle BCD: \quad \frac{13}{BC} = \tan 28^\circ$$

$$\therefore BC = \frac{13}{\tan 28^\circ}$$

$$= 24{,}44\ldots$$

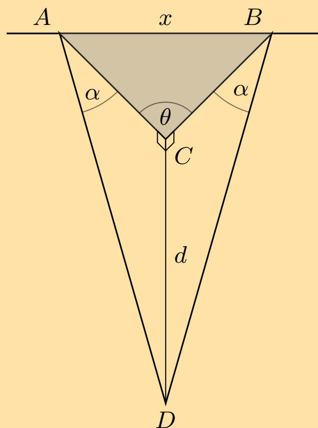
$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2} AC \,.\, BC \sin \hat{C}$$

$$= \frac{1}{2}(19{,}27\ldots)(24{,}44\ldots) \sin 76^\circ$$

$$= 228{,}57\ldots$$

$$\approx 229 \text{ m}^2$$

b) As die platform so gekonstrueer is dat die twee dieptehoeke, $C\hat{A}D$ en $C\hat{B}D$, beide gelyk is aan 45° en die vertikale diepte van die vallei $CD = d$, $AB = x$ en $A\hat{C}B = \theta$, toon dat $\cos\theta = 1 - \frac{x^2}{2d^2}$.



Oplossing:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \,.\, AC \,.\, BC \cos A\hat{C}B$$

$$\text{In } \triangle ACD: \quad \frac{d}{AC} = \tan 45^\circ$$

$$\therefore AC = d$$

$$\text{En } BC = d$$

$$\text{In } \triangle ABC: \quad x^2 = d^2 + d^2 - 2 \,.\, d \,.\, d \cos\theta$$

$$= 2d^2 - 2d^2 \cos\theta$$

$$2d^2 \cos\theta = 2d^2 - x^2$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{2d^2 - x^2}{2d^2}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2d^2}$$

c) As $AB = 25$ m en $CD = 13$ m, bereken $A\hat{C}B$ (tot die naaste heelgetal).

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= 1 - \frac{x^2}{2d^2} \\
&= 1 - \frac{(25)^2}{2(13)^2} \\
\therefore \cos\theta &= -0{,}849\ldots \\
\text{verw } \angle &= 31{,}88^\circ \\
\therefore \theta &= 180^\circ - 31{,}88^\circ \\
&= 148{,}12^\circ \\
&\approx 148^\circ \qquad \text{(naaste heelgetal)}
\end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2B58 2. 2B59 3. 2B5B 4. 2B5C 5. 2B5D

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

5.6 Opsomming

Oefening 5 – 7: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Bepaal die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar

a) $\cos 15^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos 15^\circ &= \cos(60^\circ - 45^\circ) \\
&= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

b) $\cos 75^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) \\
&= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

c) $\tan 75^\circ$

Oplossing:

$$\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}$$

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

En vanaf (b) $\cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} &= \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\\ &= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}\\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{2}\\ &= 2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

d) $\cos 3^\circ \cos 42^\circ - \sin 3^\circ \sin 42^\circ$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\cos 3^\circ \cos 42^\circ - \sin 3^\circ \sin 42^\circ &= \cos(3^\circ + 42^\circ)\\ &= \cos 45^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

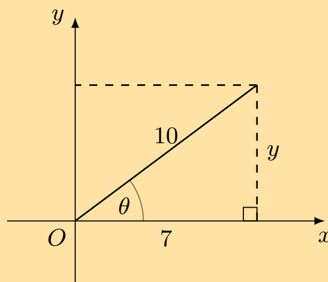
e) $1 - 2\sin^2(22{,}5^\circ)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}1 - 2\sin^2(22{,}5^\circ) &= \cos 2(22{,}5^\circ)\\ &= \cos 45^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

2. Gegee $\cos\theta = 0{,}7$. Gebruik 'n diagram en vind $\cos 2\theta$ en $\cos 4\theta$.

Oplossing:



$$\cos\theta = 0{,}7 = \frac{7}{10}$$
$$\therefore y^2 = 10^2 - 7^2 = 51$$
$$\therefore y = \sqrt{51}$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 2(0{,}7)^2 - 1$$
$$= -0{,}02$$
$$\cos 4\theta = \cos 2(2\theta)$$
$$= 2\cos^2(2\theta) - 1$$
$$= 2(-0{,}02)^2 - 1$$
$$= -0{,}9992$$

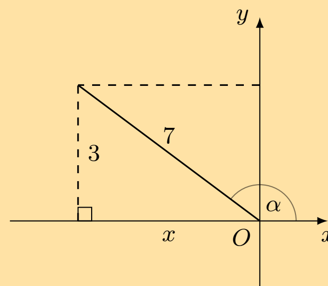
3. Gegee $7\sin\alpha = 3$ vir $\alpha > 90°$.

   Bepaal die volgende (laat die antwoorde in wortelvorm):

   a) $\cos 2\alpha$

      Oplossing:

      Teken 'n skets



$$\sin\alpha = \frac{3}{7}$$
$$x^2 = 7^2 - 3^2 = 40$$
$$\therefore x = -\sqrt{40} \qquad (\alpha > 90°)$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$= 2\left(-\frac{\sqrt{40}}{7}\right)^2 - 1$$
$$= 2\left(\frac{40}{49}\right) - 1$$
$$= \frac{80}{49} - 1$$
$$= \frac{31}{49}$$

   b) $\tan 2\alpha$

      Oplossing:

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= 2\left(\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{\sqrt{40}}{7}\right) \\ &= -\frac{6\sqrt{40}}{49}\end{aligned}$$

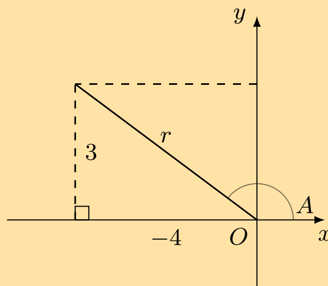
$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \\ &= \frac{-\frac{6\sqrt{40}}{49}}{\frac{31}{49}} \\ &= -\frac{6\sqrt{40}}{49} \times \frac{49}{31} \\ &= -\frac{6\sqrt{40}}{31}\end{aligned}$$

4. As $4\tan A + 3 = 0$ vir $A < 270°$, bepaal, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

$$\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\right)$$

Oplossing:

Teken 'n skets



$$\begin{aligned}4\tan A + 3 &= 0 \\ \tan A &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Dit word gegee dat $A < 270°$, dus A moet in die tweede kwadrant lê vir die tangensfunksie om negatief te wees.

$$r^2 = 3^2 + (-4)^2 = 25$$
$$\therefore r = 5$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\right)\\
&= \sin^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{A}{2}\\
&= -\left(\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right)\\
&= -\cos 2\left(\frac{A}{2}\right)\\
&= -\cos A\\
&= -\left(-\frac{4}{5}\right)\\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

5. Vereenvoudig: $\cos 67^\circ \cos 7^\circ + \cos 23^\circ \cos 83^\circ$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\cos 67^\circ \cos 7^\circ + \cos 23^\circ \cos 83^\circ\\
&= \cos(90^\circ - 23^\circ)\cos(90^\circ - 83^\circ) + \cos 23^\circ \cos 83^\circ\\
&= \sin 23^\circ \sin 83^\circ + \cos 23^\circ \cos 83^\circ\\
&= \cos(83^\circ - 23^\circ)\\
&= \cos 60^\circ\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

6. Los die vergelyking op:
   $\cos 3\theta \cos\theta - \sin 3\theta \sin\theta = -\frac{1}{2}$ vir $\theta \in [-90^\circ; 90^\circ]$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta \cos\theta - \sin 3\theta \sin\theta &= -\frac{1}{2}\\
\cos(3\theta + \theta) &= -\frac{1}{2}\\
\cos 4\theta &= -\frac{1}{2}\\
\text{verw } \angle &= 60^\circ\\
\text{Tweede kwadrant:}\quad 4\theta &= 180^\circ - 60^\circ + k\,.\,360^\circ\\
&= 120^\circ + k\,.\,360^\circ\\
\therefore \theta &= 30^\circ + k\,.\,90^\circ\\
\therefore \theta &= -60^\circ \text{ of } 30^\circ\\
\text{Derde kwadrant:}\quad 4\theta &= 180^\circ + 60^\circ + k\,.\,360^\circ\\
&= 240^\circ + k\,.\,360^\circ\\
\therefore \theta &= 60^\circ + k\,.\,90^\circ\\
\therefore \theta &= -30^\circ \text{ of } 60^\circ\\
\text{Finale antwoord:}\quad & \theta \in \{-60^\circ; -30^\circ; 30^\circ; 60^\circ\}
\end{aligned}$$

7. Vind die algemene oplossing vir die volgende vergelykings sonder 'n sakrekenaar:

   a) $3\sin\theta = 2\cos^2\theta$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
3\sin\theta &= 2\cos^2\theta \\
3\sin\theta &= 2(1-\sin^2\theta) \\
3\sin\theta &= 2-2\sin^2\theta \\
2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 &= 0 \\
\text{laat } k &= \sin\theta \\
2k^2+3k-2 &= 0 \\
(k+2)(2k-1) &= 0 \\
\text{So } k = -2 \text{ of } k &= \frac{1}{2} \\
\text{as } k = -2,\ \sin\theta &= -2 \text{ wat geen oplossing het nie.} \\
\text{as } k = \frac{1}{2},\ \sin\theta &= \frac{1}{2} \\
\text{verw } \angle &= 30^\circ \\
\text{Eerste kwadrant:}\quad \theta &= 30^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
\text{Tweede kwadrant:}\quad \theta &= (180^\circ - 30^\circ) + k\ .\ 360^\circ \\
&= 150^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
\text{Finale antwoord: } \theta = 30^\circ + k\ .\ 360^\circ &\text{ of } \theta = 150^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

b) $2\sin 2x - 2\cos x = \sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin x$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
2\sin 2x - 2\cos x &= \sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin x \\
0 &= 2(2\sin x\cos x) - 2\cos x + 2\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2} \\
0 &= 4\sin x\cos x - 2\cos x + 2\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2} \\
0 &= 2\cos x(2\sin x - 1) + \sqrt{2}(2\sin x - 1) \\
0 &= (2\sin x - 1)(2\cos x + \sqrt{2}) \\
\text{As } 2\sin x - 1 &= 0 \\
\therefore \sin x &= \frac{1}{2} \\
\text{verw } \angle &= 30^\circ \\
\text{Eerste kwadrant:}\quad x &= 30^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
\text{Tweede kwadrant:}\quad x &= 150^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{As } 2\cos x + \sqrt{2} &= 0 \\
\therefore \cos x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\text{verw } \angle &= 45^\circ \\
\text{Tweede kwadrant:}\quad x &= (180^\circ - 45^\circ) + k\ .\ 360^\circ \\
&= 135^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
\text{Derde kwadrant:}\quad x &= (180^\circ + 45^\circ) + k\ .\ 360^\circ \\
&= 225^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

c) $\cos x\cos 10^\circ + \sin x\cos 100^\circ = 1 - 2\sin^2 x$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\cos x \cos 10^\circ + \sin x \cos 100^\circ &= 1 - 2\sin^2 x \\
\cos x \cos 10^\circ + \sin x \cos(90^\circ + 10^\circ) &= \cos 2x \\
\cos x \cos 10^\circ - \sin x \sin 10^\circ &= \cos 2x \\
\cos(x + 10^\circ) &= \cos 2x \\
\text{Eerste kwadrant:} \quad x + 10^\circ &= 2x + k \ . \ 360^\circ \\
x &= 10^\circ + k \ . \ 360^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Vierde kwadrant:} \quad x + 10^\circ &= (360^\circ - 2x) + k \ . \ 360^\circ \\
3x &= 350^\circ + k \ . \ 360^\circ \\
\therefore x &= 116{,}7^\circ + k \ . \ 120^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Finale antwoord:} \quad x &= 10^\circ + k \ . \ 360^\circ \\
x &= 116{,}7^\circ + k \ . \ 120^\circ, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

d) $6\sin^2 \alpha + 2\sin 2\alpha - 1 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
6\sin^2 \alpha + 2\sin 2\alpha - 1 &= 0 \\
6\sin^2 \alpha + 2(2\sin\alpha\cos\alpha) - 1 &= 0 \\
6\sin^2 \alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) &= 0 \\
6\sin^2 \alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha &= 0 \\
5\sin^2 \alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha &= 0 \\
(5\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha) &= 0 \\
\text{As } 5\sin\alpha - \cos\alpha &= 0 \\
5\sin\alpha &= \cos\alpha \\
\therefore \tan\alpha &= \frac{1}{5} \\
\therefore \alpha &= 11{,}3^\circ + k \ . \ 180^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{As } \sin\alpha + \cos\alpha &= 0 \\
\sin\alpha &= -\cos\alpha \\
\therefore \tan\alpha &= -1 \\
\text{verw } \angle &= 45^\circ \\
\text{Tweede kwadrant: } \alpha &= (180^\circ - 45^\circ) + k \ . \ 180^\circ \\
&= 135^\circ + k \ . \ 180^\circ, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Finale antwoord:} \quad \alpha &= 11{,}3^\circ + k \ . \ 180^\circ \\
\alpha &= 135^\circ + k \ . \ 180^\circ, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

8. a) Bewys: $\sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{RK} &= \frac{1}{4}\left(3\sin\theta - \sin[2\theta+\theta]\right)\\
&= \frac{1}{4}(3\sin\theta - (\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta))\\
&= \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta)\\
&= \frac{1}{4}(3\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta - \sin\theta(1-2\sin^2\theta))\\
&= \frac{1}{4}(3\sin\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta + 2\sin^3\theta)\\
&= \frac{1}{4}(2\sin\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta + 2\sin^3\theta)\\
&= \frac{1}{4}(2\sin\theta - 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + 2\sin^3\theta)\\
&= \frac{1}{4}(2\sin\theta - 2\sin\theta + 2\sin^3\theta + 2\sin^3\theta)\\
&= \frac{1}{4}(4\sin^3\theta)\\
&= \sin^3\theta\\
&= \text{LK}
\end{aligned}
$$

b) Gevolglik, los die vergelyking $3\sin\theta - \sin 3\theta = 2$ op vir $\theta \in [0°; 360°]$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
3\sin\theta - \sin 3\theta &= 2\\
\frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4} &= \frac{2}{4}\\
\frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4} &= \frac{1}{2}\\
\therefore \sin^3\theta &= \frac{1}{2}\\
\therefore \sin\theta &= 0{,}793\ldots\\
\text{verw } \angle &= 52{,}53°\\
\text{Eerste kwadrant: } \theta &= 52{,}53° + k\ .\ 360°, k \in \mathbb{Z}\\
\\
\text{Tweede kwadrant: } \theta &= (180° - 52{,}53°) + k\ .\ 180°\\
&= 127{,}47° + k\ .\ 360°, k \in \mathbb{Z}\\
\\
\text{Finale antwoord: } \theta &= 52{,}53°\\
\theta &= 127{,}47°
\end{aligned}
$$

9. Bewys die volgende identiteite:

a) $\cos^2\alpha\left(1-\tan^2\alpha\right) = \cos 2\alpha$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{LK} &= \cos^2\alpha(1-\tan^2\alpha)\\
&= \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\\
&= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\
&= \cos 2\alpha\\
&= \text{RK}
\end{aligned}
$$

Beperkings: $\alpha \neq 90° + k\ .\ 180°, \quad k \in \mathbb{Z}$.

b) $4\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta = \sin 4\theta$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{RK} &= \sin 4\theta \\ &= \sin 2(2\theta) \\ &= 2\sin 2\theta \cos 2\theta \\ &= 2(2\sin\theta\cos\theta)\cos 2\theta \\ &= 4\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta \\ &= \text{ LK} \end{aligned}$$

c) $4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{RK} &= \cos 3x \\ &= \cos(2x + x) \\ &= \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x \\ &= \cos 2x \cos x - 2\sin^2 x\cos x \\ &= \cos x(\cos 2x - 2\sin^2 x) \\ &= \cos x(2\cos^2 x - 1 - 2[1 - \cos^2 x]) \\ &= \cos x(2\cos^2 x - 1 - 2 + 2\cos^2 x) \\ &= \cos x(4\cos^2 x - 3) \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \\ &= \text{ LK} \end{aligned}$$

d) $\cos 2A + 2\sin 2A + 2 = (3\cos A + \sin A)(\cos A + \sin A)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \cos 2A + 2\sin 2A + 2 \\ &= (\cos^2 A - \sin^2 A) + (4\sin A\cos A) + 2(\cos^2 A + \sin^2 A) \\ &= \cos^2 A - \sin^2 A + 4\sin A\cos A + 2\cos^2 A + 2\sin^2 A) \\ &= 3\cos^2 A + 4\sin A\cos A + \sin^2 A \\ &= (3\cos A + \sin A)(\cos A + \sin A) \\ &= \text{ RK} \end{aligned}$$

e) $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^3} = \dfrac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \frac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^3} \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^3} \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)^2(\cos x + \sin x)} \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x + \sin x)^2} \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x + 2\cos x\sin x + \sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{1 + 2\cos x \sin x} \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x} \\ &= \text{ RK} \end{aligned}$$

10. a) Bewys: $\tan y = \frac{\sin 2y}{\cos 2y + 1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{RK} &= \frac{\sin 2y}{\cos 2y + 1} \\
&= \frac{\sin 2y}{(2\cos^2 y - 1) + 1} \\
&= \frac{2 \sin y \cos y}{2\cos^2 y} \\
&= \frac{\sin y}{\cos y} \\
&= \tan y \\
&= \text{LK}
\end{aligned}$$

b) Vir watter waardes van y is die identiteit ongedefinieerd?

Oplossing:

Die identiteit is ongedefinieerd vir die waardes van y sodat $\cos 2y + 1 = 0$ aangesien deling deur nul nie toelaatbaar is nie.

$$\begin{aligned}
\text{As } \cos 2y + 1 &= 0 \\
\cos 2y &= -1 \\
\therefore 2y &= 180° + k \cdot 360° \\
\therefore y &= 90° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Ontoelaatbare waardes is: $y = 90° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$

11. Gegee: $1 + \tan^2 3\theta - 3\tan 3\theta = 5$

a) Vind die algemene oplossing.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2 3\theta - 3\tan 3\theta &= 5 \\
\tan^2 3\theta - 3\tan 3\theta - 4 &= 0 \\
(\tan 3\theta - 4)(\tan 3\theta + 1) &= 0 \\
\text{As } \tan 3\theta &= -1 \\
\text{verw } \angle &= 45° \\
\therefore 3\theta &= (180° - 45°) + k \cdot 180° \\
3\theta &= 135° + k \cdot 180° \\
\therefore \theta &= 45° + k \cdot 60°, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{As } \tan 3\theta &= 4 \\
\text{verw } \angle &= 75{,}96° \\
\therefore 3\theta &= 75{,}96° + k \cdot 180° \\
\therefore \theta &= 25{,}32° + k \cdot 60°, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

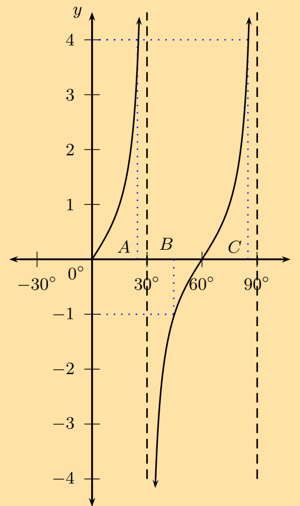
b) Vind die oplossing vir $\theta \in [0°; 90°]$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
k = 0: \quad \theta\theta &= 45° \\
&= 25{,}32° \\
k = 1: \quad \theta &= 85{,}32°
\end{aligned}$$

c) Trek 'n grafiek van $y = \tan 3\theta$ vir $\theta \in [0°; 90°]$ en dui die oplossings van die vergelyking op die grafiek aan.

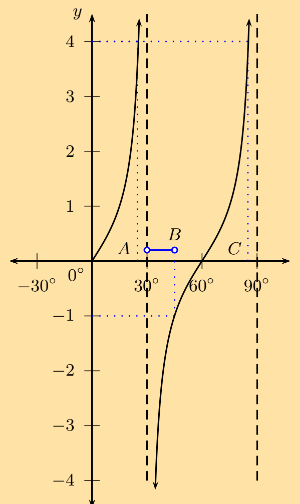
Oplossing:



$$\begin{aligned} \text{Periode: } &= 60^\circ \\ \text{Asimptoot: } \theta &= 30^\circ \\ \text{Asimptoot: } \theta &= 90^\circ \\ A&(25{,}32^\circ; 4) \\ B&(45^\circ; -1) \\ C&(85{,}32^\circ; 4) \end{aligned}$$

d) Gebruik die grafiek om te bepaal waar $\tan 3\theta < -1$.

Oplossing:



$30^\circ < \theta < 45^\circ$

12. a) Wys dat:

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2\cos A \sin B$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \sin(A + B) - \sin(A - B) \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B - [\sin A \cos B - \cos A \sin B] \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B - \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ &= 2\cos A \sin B \\ &= \text{RK} \end{aligned}$$

b) Gebruik hierdie resultaat om $\sin 3x - \sin x = 0$ op te los vir $x \in [-180°; 360°]$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\sin 3x - \sin x &= 0 \\
\sin(2x + x) - \sin(2x - x) &= 0 \\
\text{Dus } A = 2x \text{ en } B &= x \\
\therefore \text{ kan ons skryf } 2\cos 2x \sin x &= 0
\end{aligned}
$$

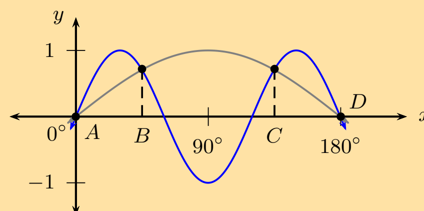
$$
\begin{aligned}
\text{As } \cos 2x &= 0 \\
2x &= 90° + k\ .\ 360° \\
\therefore x &= 45° + k\ .\ 180°, k \in \mathbb{Z} \\
\\
2x &= 270° + k\ .\ 360° \\
\therefore x &= 135° + k\ .\ 180°, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{As } \sin x &= 0 \\
x &= 0° + k\ .\ 360°, k \in \mathbb{Z} \\
\text{of } x &= 180° + k\ .\ 180°, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Finale antwoord: } k = -2: &\quad x = -180° \\
k = -1: &\quad x = -135°; -45° \\
k = 0: &\quad x = 45°; 135°; 0°; 180° \\
k = 1: &\quad x = 225°; 315°; 360° \\
\text{Finale antwoord: } &x = -180°; -135°; -45°; \\
&\ 0°; 45°; 135°; 180°; \\
&\ 225°; 315°; 360°
\end{aligned}
$$

c) Op dieselfde assestelsel, trek twee grafieke om die volgende grafies op te los: $\sin 3x - \sin x = 0$ vir $x \in [0°; 360°]$. Dui die oplossings op die grafiek aan deur die letters $A, B, \ldots$ ens. te gebruik.

Oplossing:



13. Gegee: $\cos 2x = \sin x$ vir $x \in [0°; 360°]$

a) Los algebraïes op vir x.

Oplossing:

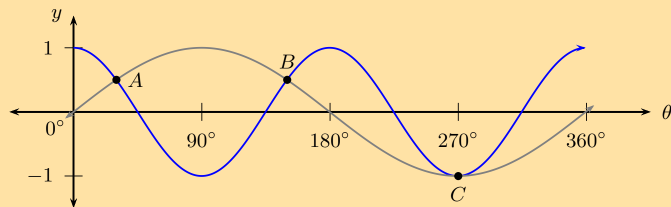
$$\begin{aligned}
\cos 2x &= \sin x \\
\cos 2x &= \cos(90^\circ - x) \\
2x &= 90^\circ - x + k\ .\ 360^\circ \\
3x &= 90^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
x &= 30^\circ + k\ .\ 120^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x &= [360^\circ - (90^\circ - x)] + k\ .\ 360^\circ \\
&= 270^\circ + x + k\ .\ 360^\circ \\
x &= 270^\circ + k\ .\ 360^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k = 0: \quad & x = 30^\circ \\
& x = 270^\circ \\
k = 1: \quad & x = 150^\circ \\
& x = 270^\circ
\end{aligned}$$

b) Verifieer die oplossing grafies deur twee grafieke op dieselfde assestelsel te trek.

Oplossing:



$y = \cos 2x$ (blou grakiek)

$y = \sin x$ (grys grafiek)

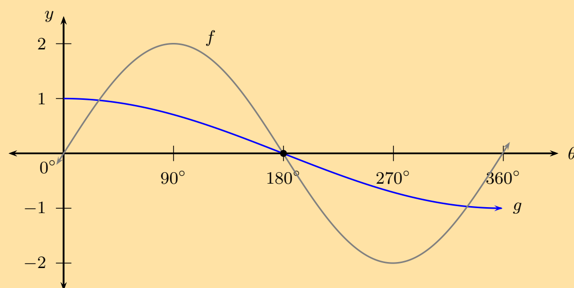
$A\left(30^\circ; \frac{1}{2}\right)$

$B\left(150^\circ; \frac{1}{2}\right)$

$C\,(270^\circ; -1)$

14. Die volgende grafieke word hieronder gegee:

$$\begin{aligned}
f &: = a \sin x \\
g &: = \cos bx \qquad (x \in [0^\circ; 360^\circ])
\end{aligned}$$



a) Toon aan hoekom $a = 2$ en $b = \frac{1}{2}$.

Oplossing:

Vanaf die grafiek kan ons sien dat die amplitude van die sinusgrafiek 2 is, en dus $a = 2$.

Vir die cosinusgrafiek is die periode 720°, dus $b = \frac{360^\circ}{720^\circ} = \frac{1}{2}$.

b) Vir hoeveel x-waardes in $[0°; 360°]$ sal $f(x) - g(x) = 0$?

Oplossing:

Vir:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 0 \\ f(x) &= g(x) \end{aligned}$$

Die diagram toon dat die twee grafieke mekaar by drie plekke sny in die interval $[0°; 360°]$.

c) Gebruik die grafiek om $f(x) - g(x) = 1$ op te los.

Oplossing:

Vanaf die grafiek het ons die volgende oplossing:

$$\begin{aligned} f(360°) - g(360°) = 0 - (-1) = 1 \\ \therefore x = 360° \end{aligned}$$

d) Los $a \sin x = \cos bx$ op vir $x \in [0°; 360°]$ deur die trigonometriese identiteite te gebruik.

Oplossing:

$$\begin{aligned} 2\sin x &= \cos \frac{1}{2}x \\ 2\sin 2\left(\frac{x}{2}\right) &= \cos \frac{1}{2}x \\ 2\left(2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right) &= \cos \frac{1}{2}x \\ 4\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{1}{2}x &= 0 \\ \cos \frac{x}{2}\left(4\sin \frac{x}{2} - 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{As } \cos \frac{x}{2} &= 0 \\ \frac{x}{2} &= 90° \\ \therefore x &= 180° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{As } 4\sin \frac{x}{2} - 1 &= 0 \\ 4\sin \frac{x}{2} &= 1 \\ \sin \frac{x}{2} &= \frac{1}{4} \\ \text{verw } \angle &= 14{,}47° \\ \therefore \frac{x}{2} &= 14{,}47° \\ x &= 29° \\ \text{of } \frac{x}{2} &= 180° - 14{,}47° \\ &= 165{,}53° \\ \therefore x &= 331° \end{aligned}$$

$$\text{Finale antwoord: } x = 180°, 29°, 331°$$

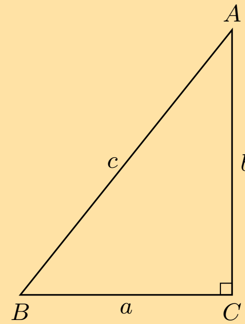
e) Vir watter waardes van x sal $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \leq \sin x$ vir $x \in [0°; 360°]$?

Oplossing:

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \leq \sin x$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \leq 2\sin x$$
waar $g(x) \leq f(x)$

Finale antwoord: $29^\circ \leq x \leq 180^\circ$ of $331^\circ \leq x \leq 360^\circ$

15. In $\triangle ABC$, $AB = c, BC = a, CA = b$ en $\hat{C} = 90^\circ$



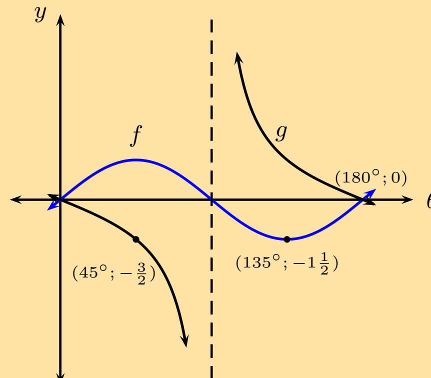
a) Bewys dat $\sin 2A = \frac{2ab}{c^2}$.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \sin 2A \\
&= 2\sin A\cos A \\
&= 2\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{c}\right) \\
&= \frac{2ab}{c^2} \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

b) Wys dat $\cos 2A = \frac{b^2 - a^2}{c^2}$.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \cos 2A \\
&= \cos^2 A - \sin^2 A \\
&= \left(\frac{b}{c}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 \\
&= \frac{b^2 - a^2}{c^2} \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

16. Gegee die grafieke van $f(\theta) = p\sin k\theta$ en $g(\theta) = q\tan\theta$, bepaal die waardes van p, k en q.

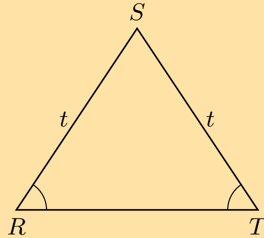


Oplossing:

$f(\theta) = \frac{3}{2}\sin 2\theta$ en $g(\theta) = -\frac{3}{2}\tan\theta$

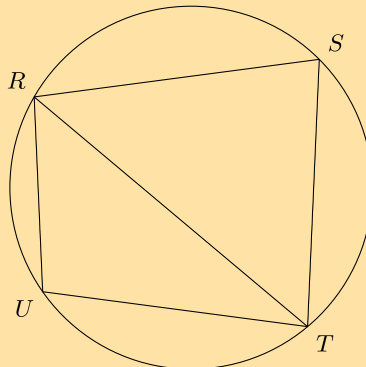
17. $\triangle RST$ is 'n skerphoekige driehoek met $RS = ST = t$. Toon dat die area $\triangle RST = t^2 \sin\hat{T}\cos\hat{T}$.

Oplossing:



$$\begin{aligned}
\text{Area } \triangle RST &= \frac{1}{2}t\ .\ t\ .\ \sin\hat{S} \\
&= \frac{1}{2}t^2\sin[180° - \left(\hat{R} + \hat{T}\right)] \\
&= \frac{1}{2}t^2\sin\left(\hat{R} + \hat{T}\right) \\
\text{en } \hat{R} &= \hat{T} \qquad \text{(gelykbenige driehoek)} \\
\therefore \text{Area } \triangle RST &= \frac{1}{2}t^2\sin\left(2\hat{T}\right) \\
&= \frac{1}{2}t^2(2\sin\hat{T}\cos\hat{T}) \\
&= t^2\sin\hat{T}\cos\hat{T}
\end{aligned}$$

18. $RSTU$ is 'n koordevierhoek met $RU = 6$ cm, $UT = 7{,}5$ cm, $RT = 11$ cm en $RS = 9{,}5$ cm.



a) Bereken $\hat{U}$.

Oplossing:

$$\text{In } \triangle RUT \quad RT^2 = RU^2 + UT^2 - 2RU\,.\,UT\cos\hat{U}$$

$$\therefore \cos\hat{U} = \frac{RU^2 + UT^2 - RT^2}{2RU\,.\,UT}$$

$$= \frac{6^2 + (7{,}5)^2 - 11^2}{2(6)(7{,}5)}$$

$$= -0{,}3194\ldots$$

$$\text{verw } \angle = 71{,}4^\circ$$

$$\hat{U} = 180^\circ - 71{,}4^\circ$$

$$= 108{,}6^\circ$$

b) Bereken $\hat{S}$.

Oplossing:

$$\hat{S} = 180^\circ - 108{,}6^\circ \quad \text{(teenoorst. } \angle\text{e van koordevierhoek suppl.)}$$

$$= 71{,}4^\circ$$

c) Vind $R\hat{T}S$.

Oplossing:

$$\frac{\sin R\hat{T}S}{RS} = \frac{\sin R\hat{S}T}{RT}$$

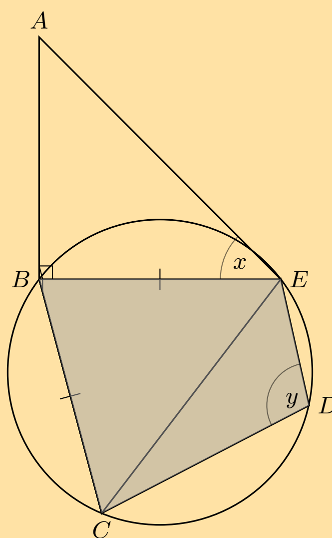
$$\frac{\sin R\hat{T}S}{9{,}5} = \frac{\sin 71{,}4}{11}$$

$$\sin R\hat{T}S = \frac{9{,}5\sin 71{,}4}{11}$$

$$= 0{,}8185\ldots$$

$$\therefore R\hat{T}S = 54{,}9^\circ$$

19. $BCDE$ is 'n koordevierhoek wat in 'n horisontale vlak lê. AB is 'n vertikale paal met basis B. Die hoogtehoek vanaf E na A is x° en $C\hat{D}E = y^\circ$. $\triangle BEC$ is 'n gelykbenige driehoek met $BE = BC$.



a) Wys dat $B\hat{C}E = \frac{1}{2}y$.

Oplossing:
In 'n koordevierhoek $BCDE$:

$$\begin{aligned} \hat{B} &= 180° - y \\ BE &= BC \qquad \text{(gegee)} \\ B\hat{C}E &= B\hat{E}C \\ &= \frac{180° - (180° - y)}{2} \\ &= \frac{y}{2} \end{aligned}$$

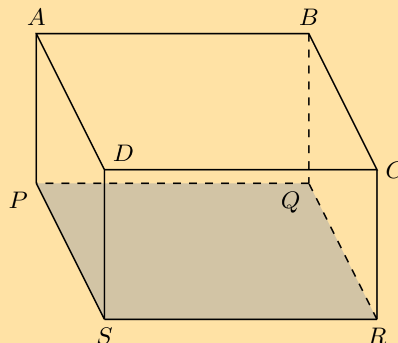
b) Toon dat $CE = 2BE\cos\left(\frac{y}{2}\right)$
Oplossing:

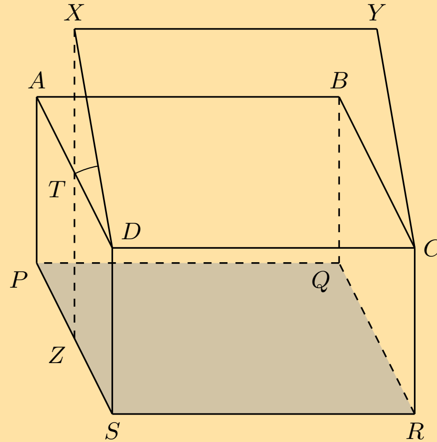
$$\begin{aligned} \text{In } \triangle BCE: \quad \frac{CE}{\sin C\hat{B}E} &= \frac{BE}{\sin B\hat{C}E} \\ \therefore CE &= \frac{BE \sin C\hat{B}E}{\sin B\hat{C}E} \\ &= \frac{BE\sin(180° - y)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \\ &= \frac{BE\sin y}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \\ &= \frac{BE(2\sin\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right))}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \\ &= 2BE\cos\left(\frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

c) As $AB = 2{,}6$ m, $x = 37°$ en $y = 109°$, bereken die lengte van CE.
Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle ABE: \quad \frac{AB}{BE} &= \tan x \qquad (A\hat{B}E = 90°) \\ \therefore BE &= \frac{AB}{\tan x} \\ &= \frac{2{,}6}{\tan 37°} \\ &= 3{,}45 \\ \therefore CE &= 2BE\cos\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= 2(3{,}45)\cos\left(\frac{109°}{2}\right) \\ &= 4 \text{ m} \end{aligned}$$

20. Die eerste diagram toon 'n reghoekige boks met $SR = 8$ cm, $PS = 6$ cm en $PA = 4$ cm. Die deksel van die boks, $ABCD$, word 30° oopgemaak na die posisie $XYCD$, soos getoon in die tweede diagram.





a) Skryf die afmetings (lengte, breedte en hoeklyn) van die deksel $XYCD$ neer.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{lengte} &= XY = DC = 8 \text{ cm}\\ \text{breedte} &= XD = YC = 6 \text{ cm}\\ \text{hoeklyn} &= AC = XC\\ &= \sqrt{8^2 + 6^2} \qquad \text{(Pythagoras)}\\ &= 10 \text{ cm}\end{aligned}$$

b) Bereken XZ, die loodregte hoogte van X bokant die basis van die boks.

Oplossing:

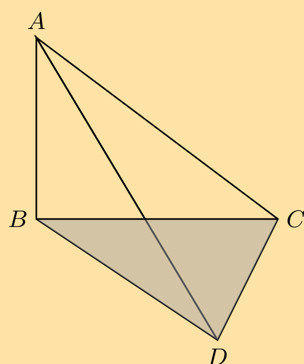
$$\begin{aligned} TZ &= AP = 4 \text{ cm}\\ \text{In } \triangle XTD: \quad \frac{XT}{XD} &= \sin 30^\circ\\ \frac{XT}{6} &= \frac{1}{2}\\ \therefore XT &= 3 \text{ cm}\\ \therefore XZ &= 4 + 3 = 7 \text{ cm}\end{aligned}$$

c) Bereken die verhouding $\frac{\sin X\hat{Z}C}{\sin X\hat{C}Z}$.

Oplossing:

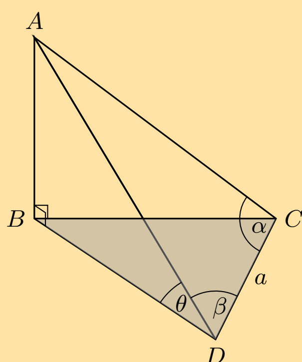
$$\begin{aligned}\text{In } \triangle XTC: \quad \frac{\sin X\hat{Z}C}{XC} &= \frac{\sin X\hat{C}Z}{XZ}\\ \therefore \frac{\sin X\hat{Z}C}{\sin X\hat{C}Z} &= \frac{XC}{XZ}\\ &= \frac{10}{7}\end{aligned}$$

21. AB is 'n vertikale paal op 'n horisontale vlak BCD. DC is a meters en die hoogtehoek van D na A is θ. $A\hat{C}D = \alpha$ en $A\hat{D}C = \beta$.



a) Noem die twee regtehoeke in die diagram.

Oplossing:



$$A\hat{B}C = 90^\circ$$
$$A\hat{B}D = 90^\circ$$

b) Wys dat $AB = \frac{a \sin \alpha \sin \theta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Oplossing:

$$\text{In } \triangle ABC: \quad \frac{AB}{AD} = \sin\theta$$
$$\therefore AB = AD\sin\theta$$
$$\text{In } \triangle ADC: \quad \frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{DC}{\sin D\hat{A}C}$$
$$AD = \frac{a\sin\alpha}{\sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]}$$
$$= \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore AB = \frac{a\sin\alpha\sin\theta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

c) As dit gegee is dat $AD = AC$, wys dat die hoogte van die paal gegee word deur $AB = \frac{a \sin \theta}{2 \cos \alpha}$.

Oplossing:

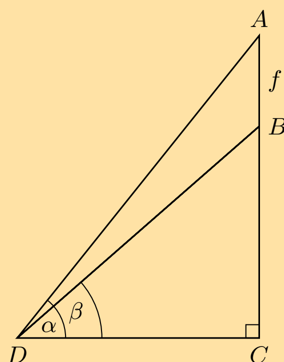
$$
\begin{aligned}
AD &= AC \qquad \text{(gegee)}\\
\therefore \beta &= \alpha \qquad \text{(gelyk. } \triangle ADC\text{)}\\
\therefore AB &= \frac{a \sin\alpha \sin\theta}{\sin(\alpha+\alpha)}\\
&= \frac{a \sin\alpha \sin\theta}{\sin 2\alpha}\\
&= \frac{a \sin\alpha \sin\theta}{2\sin\alpha\cos\alpha}\\
&= \frac{a \sin\theta}{2\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

d) Bereken die hoogte van die paal as $a = 13$ m, $\theta = 33°, \alpha = \beta = 65°$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
AB &= \frac{a\sin\theta}{2\cos\alpha}\\
&= \frac{13 \times \sin 33°}{2\cos 65°}\\
&= 8{,}4 \text{ m}
\end{aligned}
$$

22. AB is 'n vlagpaal bo-op 'n regeringsgebou BC. $AB = f$ eenhede, D is 'n punt op die grond in dieselfde vlak as die basis van die gebou, C. Die hoogtehoek vanaf D tot A en B is α en β, onderskeidelik.



a) Toon dat $f = \frac{BC\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta\cos\alpha}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{In } \triangle ABD: \quad \frac{f}{\sin(\alpha-\beta)} &= \frac{DB}{\sin(90°-\alpha)}\\
\therefore f &= \frac{DB\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}\\
\text{In } \triangle BDC: \quad \frac{BC}{DB} &= \sin\beta\\
\therefore DB &= \frac{BC}{\sin\beta}\\
\therefore f &= \frac{BC\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

b) Bereken die hoogte van die vlagpaal (tot die naaste meter) as die gebou 7 m is, $\alpha = 63^\circ$ en $\beta = 57^\circ$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{BC \sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta\cos\alpha} \\
&= \frac{7 \times \sin(63^\circ - 57^\circ)}{\sin 57^\circ \cos 63^\circ} \\
&= 1{,}92
\end{aligned}
$$

$$\therefore \text{hoogte} \approx 2 \text{ m} \qquad \text{(naaste meter)}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2B5G	1b. 2B5H	1c. 2B5J	1d. 2B5K	1e. 2B5M	2. 2B5N
3a. 2B5P	3b. 2B5Q	4. 2B5R	5. 2B5S	6. 2B5T	7a. 2B5V
7b. 2B5W	7c. 2B5X	7d. 2B5Y	8. 2B5Z	9a. 2B62	9b. 2B63
9c. 2B64	9d. 2B65	9e. 2B66	10. 2B67	11. 2B68	12. 2B69
13. 2B6B	14. 2B6C	15. 2B6D	16. 2B6F	17. 2B6G	18. 2B6H
19. 2B6J	20. 2B6K	21. 2B6M	22. 2B6N		

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK



Polinome

- Bewyse van stellings is nie eksamineerbaar nie.
- Waak daarteen om te veel tyd aan hersiening te spandeer. Leerders behoort vertroud te wees met hierdie faktoriseringsmetodes van graad 10 en 11.
- Verduidelik terminologie sorgvuldig. Dit is baie belangrik dat leerders verstaan wat 'n faktor is en wat die verhouding met die grafieke van kwadratiese en kubiese funksies is (dit is reeds in die hoofstuk oor Differensiële Wiskunde behandel).
- Langdeling en sintetiese deling word ingesluit as 'n inleiding tot die resstelling. Moenie te veel tyd aan hierdie tegnieke spandeer nie.
- Dit is belangrik dat leerders verstaan dat 'n res van nul beteken dat 'n deler 'n faktor is.
- Moedig leerders aan om faktorisering deur inspeksie te doen.

6.1 Hersiening

Identifiseer polinome

Oefening 6 – 1: Identifiseer polinome

1. Gegee $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$, bepaal of die volgende stellings waar of onwaar is. Indien onwaar moet die regte stelling verskaf word.

   a) $f(x)$ is 'n trinoom
   Oplossing: Waar

   b) Die koëffisiënt van die x is nul.
   Oplossing: Waar

   c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$
   Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \\ &= 2\left(\frac{1}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) - 1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \\ \therefore & \text{ Onwaar} \end{aligned}$$

   d) $f(x)$ is van graad 3.
   Oplossing: Waar

   e) Die konstante term is 1.
   Oplossing: Onwaar: -1.

   f) $f(x)$ sal 3 reële wortels hê.
   Oplossing: Waar

2. Gegee $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$, bepaal die volgende:

   a) die getal terme in $g(x)$.
   Oplossing: 4

b) die graad van $g(x)$.

Oplossing: 3

c) die koëffisiënt van die x^2 term.

Oplossing: -9

d) die konstante term.

Oplossing: 6

3. Bepaal watter van die volgende uitdrukkings polinome is en watter nie. Gee redes waarom van hulle nie polinome is nie.

a) $y^3 + \sqrt{5}$

Oplossing: Kubiese polinoom

b) $-x^2 - x - 1$

Oplossing: Kwadratiese polinoom

c) $4\sqrt{k} - 9$

Oplossing: Nie 'n polinoom nie; in $k^{\frac{1}{2}}$ is die eksponent nie 'n natuurlike getal nie.

d) $\frac{2}{p} + p + 3$

Oplossing: Nie 'n polinoom nie; in p^{-1} is die eksponent nie 'n natuurlike getal nie.

e) $x(x-1)(x-2) - 2$

Oplossing: Kubiese polinoom

f) $\left(\sqrt{m} - 1\right)\left(\sqrt{m} + 1\right)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{m} - 1\right)\left(\sqrt{m} + 1\right) &= \left(\sqrt{m}\right)^2 + \sqrt{m} - \sqrt{m} - 1 \\ &= m - 1\end{aligned}$$

Lineêre polinoom

g) $t^0 - 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned}t^0 - 1 &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Nulpolinoom

h) $16y^7$

Oplossing: Polinoom; graad 7

i) $-\frac{x^3}{2} + 5x^2 + \frac{x}{3} - 11$

Oplossing: Kubiese polinoom

j) $4b^0 + 3b^{-1} + 5b^2 - b^3$

Oplossing: Nie 'n polinoom nie; in b^{-1} is die eksponent nie 'n natuurlike getal nie.

4. Pieter se Wiskunde huiswerk is hieronder. Vind en korrigeer sy foute.

Huiswerk:

Gegee $p(x) = x + \dfrac{4}{x} - 5$, beantwoord die volgende vrae:

a) Vereenvoudig die uitdrukking.

b) Is $p(x)$ 'n polinoom?

c) Wat is die koëffisiënt van die x term?

Pieter se antwoorde:

a)

$p(x) = x + \frac{4}{x} - 5$	(beperking: $x \neq 0$)
$= x^2 + 4 - 5x$	(vermenigvuldig dwarsdeur met x)
$= x^2 - 5x + 4$	(skryf in dalende order)
$= (x-1)(x+4)$	(faktoriseer, kwadratiese uitdrukking het twee wortels)

b) Ja, omdat dit vereenvoudig kan word tot eksponente wat almal natuurlike getalle is. Dit is 'n kwadratiese binoom omdat die hoogste eksponent twee is en daar slegs twee terme is; $(x-1)$ en $(x+4)$.

c) Voor ek vereenvoudig het, was die koëffisiënt van die x term nul en na ek dit vereenvoudig het, word dit 5.

Oplossing:

Pieter maak die volgende foute:

a) Hierdie is nie 'n vergelyking nie, dus Pieter mag nie deurvermenigvuldig nie. Pieter het verkeerd gefaktoriseer, hy het 'n fout gemaak met die teken in die tweede hakie.

$$\begin{aligned} p(x) &= x + \frac{4}{x} - 5 && \text{(beperking: } x \neq 0\text{)} \\ &= \frac{x^2+4-5x}{x} && \text{(gemene noemer is } x\text{)} \\ &= \frac{x^2-5x+4}{x} && \text{(skryf in standaard vorm)} \\ &= \frac{(x-1)(x-4)}{x} && \text{(faktoriseer en wees versigtig met die tekens)} \end{aligned}$$

b) Die oorspronklike uitdrukking is nie 'n polinoom nie omdat die eksponent van die tweede term $\left(\frac{4}{x} = 4x^{-1}\right)$ nie 'n natuurlike getal is nie. Pieter se vereenvoudigde uitdrukking is 'n kwadratiese trinoom omdat dit drie terme en twee faktore het.

c) In die oorspronklike uitdrukking is die koëffisiënt van die x term 1. Nadat Pieter die uitdrukking verkeerdelik vereenvoudig het, was die koëffisiënt van die x term -5 en nie $+5$ nie. Onthou altyd dat die koëffisiënt die teken en die getal voor die veranderlike insluit.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2B6P 2. 2B6Q 3a. 2B6R 3b. 2B6S 3c. 2B6T 3d. 2B6V
3e. 2B6W 3f. 2B6X 3g. 2B6Y 3h. 2B6Z 3i. 2B72 3j. 2B73
4. 2B74

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Kwadratiese polinome

Oefening 6 – 2: Kwadratiese polinome

1. Los die volgende kwadratiese vergelykings op deur faktorisering. Antwoorde mag in die wortelvorm gelaat word waar toepaslik.

a) $7p^2 + 14p = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 7p^2 + 14p &= 0 \\ 7p(p+2) &= 0 \\ p(p+2) &= 0 \\ p &= 0 \text{ of } p = -2 \end{aligned}$$

b) $k^2 + 5k - 36 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} k^2 + 5k - 36 &= 0 \\ (k-4)(k+9) &= 0 \\ k &= 4 \text{ of } k = -9 \end{aligned}$$

c) $400 = 16h^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 16h^2 - 400 &= 0 \\ 16(h^2 - 25) &= 0 \\ (h-5)(h+5) &= 0 \\ h &= \pm 5 \end{aligned}$$

d) $(x-1)(x+10)+24 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} (x-1)(x+10)+24 &= 0 \\ x^2 + 9x - 10 + 24 &= 0 \\ x^2 + 9x + 14 &= 0 \\ (x+7)(x+2) &= 0 \\ x &= -7 \text{ of } x = -2 \end{aligned}$$

e) $y^2 - 5ky + 4k^2 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y^2 - 5ky + 4k^2 &= 0 \\ (y-4k)(y-k) &= 0 \\ y &= 4k \text{ of } y = k \end{aligned}$$

2. Los die volgende vergelykings op deur die vierkant te voltooi:

a) $p^2 + 10p - 2 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} p^2 + 10p - 2 &= 0 \\ p^2 + 10p &= 2 \\ p^2 + 10p + 25 &= 2 + 25 \\ (p+5)^2 - 27 &= 0 \\ (p+5)^2 &= 27 \\ \therefore (p+5) &= \pm\sqrt{27} \\ \therefore (p+5) &= -\sqrt{27} \text{ of } (p+5) = \sqrt{27} \\ \therefore p &= -5 - 3\sqrt{3} \text{ of } p = -5 + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

b) $2(6y + y^2) = -4$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y^2 + 6y &= -2 \\ y^2 + 6y + 9 &= -2 + 9 \\ (y+3)^2 &= 7 \\ y + 3 &= \pm\sqrt{7} \\ y &= -3 \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

c) $x^2 + 5x + 9 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 9 &= 0 \\ x^2 + 5x &= -9 \\ x^2 + 5x + \frac{25}{4} &= -9 + \frac{25}{4} \\ \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 &= -\frac{11}{4} \\ x + \frac{5}{2} &= \pm\sqrt{-\frac{11}{4}} \end{aligned}$$

Geen reële oplossing

d) $f^2 + 30 = 2(10 - 8f)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f^2 + 30 &= 2(10 - 8f) \\ f^2 + 16f + 10 &= 0 \\ f^2 + 16f &= -10 \\ f^2 + 16f + 64 &= -10 + 64 \\ (f + 8)^2 &= 54 \\ f + 8 &= \pm\sqrt{54} \\ f &= -8 \pm \sqrt{9 \times 6} \\ \therefore f &= -8 \pm 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

e) $3x^2 + 6x - 2 = 0$

Oplossing:

$$3x^2 + 6x - 2 = 0$$

Deel beide kante met 3 om 'n leierkoëffisiënt van 1 te kry

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= \frac{2}{3} \\ x^2 + 2x + 1 &= \frac{2}{3} + 1 \\ (x + 1)^2 &= \frac{5}{3} \\ x + 1 &= \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \\ x &= -1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

3. Los die volgende op met die kwadratiese formule.

a) $3m^2 + m - 4 = 0$

Oplossing:

$$a = 3; \quad b = 1; \quad c = -4$$

$$3m^2 + m - 4 = 0$$
$$m = \frac{-(1) \pm \sqrt{1^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{6}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{6}$$
$$= \frac{-1 \pm 7}{6}$$
$$m = \frac{-1 + 7}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ of } m = \frac{-1 - 7}{6} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Let op: dit sal makliker en vinniger wees om deur faktorisering eerder as met die kwadratiese formule op te los. As die vraag nie spesifiseer watter metode om te gebruik nie, probeer eers deur faktorisering oplos.

b) $2t^2 + 6t + 5 = 0$

Oplossing:

$$2t^2 + 6t + 5 = 0$$
$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(5)}}{2(2)}$$
$$= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{4}$$
$$= \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{4}$$

Geen reële oplossing

c) $y^2 - 4y + 2 = 0$

Oplossing:

$$y^2 - 4y + 2 = 0$$
$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$$
$$= 2 \pm \sqrt{2}$$
$$\therefore y = 2 + \sqrt{2} \text{ of } y = 2 - \sqrt{2}$$

d) $3f - 2 = -2f^2$

Oplossing:

$$2f^2 + 3f - 2 = 0$$
$$f = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$
$$= \frac{-3 \pm 5}{4}$$
$$\text{dus } f = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \text{ of } f = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

4. Faktoriseer die volgende:

a) $27p^3 - 1$

Oplossing:

$$27p^3 - 1 = (3p - 1)(9p^2 + 3p + 1)$$

b) $16 + \frac{2}{x^3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 16 + \frac{2}{x^3} &= 2\left(8 + \frac{1}{x^3}\right) \\ &= 2\left(2 + \frac{1}{x}\right)\left(4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2B75	1b. 2B76	1c. 2B77	1d. 2B78	1e. 2B79	2a. 2B7B
2b. 2B7C	2c. 2B7D	2d. 2B7F	2e. 2B7G	3a. 2B7H	3b. 2B7J
3c. 2B7K	3d. 2B7M	4a. 2B7N	4b. 2B7P		

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

6.2 Kubiese polinome

Oefening 6 – 3: Kubiese polinome

1. Faktoriseer die volgende:

a) $p^3 - 1$

Oplossing:

$$p^3 - 1 = (p - 1)(p^2 + p + 1)$$

b) $t^3 + 27$

Oplossing:

$$t^3 + 27 = (t + 3)(t^2 + 3t + 9)$$

c) $64 - m^3$

Oplossing:

$$64 - m^3 = (4 - m)(16 + 4m + m^2)$$

d) $k - 125k^4$

Oplossing:

$$\begin{aligned} k - 125k^4 &= k(1 - 125k^3) \\ &= k(1 - 5k)(1 + 5k + 25k^2) \end{aligned}$$

e) $8a^6 - b^9$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 8a^6 - b^9 &= \left(2a^2\right)^3 - \left(b^3\right)^3 \\ &= \left(2a^2 - b^3\right)\left(4a^4 + 2a^2b^3 + b^6\right) \end{aligned}$$

f) $8 - (p+q)^3$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 8 - (p+q)^3 &= [2 - (p+q)][4 + 2(p+q) + (p+q)^2] \\ &= (2 - p - q)(4 + 2p + 2q + p^2 + 2pq + q^2) \\ &= (2 - p - q)(4 + 2p + 2q + p^2 + 2pq + q^2) \end{aligned}$$

2. Vir elkeen van die volgende:

   a) Gebruik langdeling om die kwosiënt $Q(x)$ en die res $R(x)$ te bepaal.
   b) Skryf $a(x)$ in die vorm $a(x) = b(x) \,.\, Q(x) + R(x)$.
   c) Toets jou antwoord deur die hakies uit te brei om weer by die oorspronklike polinoom uit te kom.

   a) $a(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 7$ word gedeel deur $(x+1)$.

   Oplossing:

$$\begin{array}{r} x^2 + x + 2 \\ x+1|\overline{x^3 + 2x^2 + 3x + 7} \\ -\left(\underline{x^3 + x^2}\right) \\ 0 + x^2 + 3x \\ -\left(\underline{x^2 + x}\right) \\ 0 + 2x + 7 \\ -\left(\underline{2x + 2}\right) \\ 0 + 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 + x + 2 \\ R(x) &= 5 \\ \text{en } a(x) &= b(x) \,.\, Q(x) + R(x) \\ \therefore a(x) &= (x+1)(x^2 + x + 2) + 5 \end{aligned}$$

   Toets:

$$\begin{aligned} (x+1)(x^2 + x + 2) + 5 &= x^3 + x^2 + 2x + x^2 + x + 2 + 5 \\ &= x^3 + 2x^2 + 3x + 7 \end{aligned}$$

   b) $a(x) = 1 + 4x^2 - 5x - x^3$ en $b(x) = x + 2$

   Oplossing:

   $a(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ en $b(x) = x + 2$

$$\begin{array}{r} -x^2 + 6x - 17 \\ x+2|\overline{-x^3 + 4x^2 - 5x + 1} \\ -\left(\underline{-x^3 - 2x^2}\right) \\ 0 + 6x^2 - 5x \\ -\left(\underline{6x^2 + 12x}\right) \\ 0 - 17x + 1 \\ -\left(\underline{-17x - 34}\right) \\ 0 + 35 \end{array}$$

$$Q(x) = -x^2 + 6x - 17$$
$$R(x) = 35$$
$$\text{en } a(x) = b(x) \ . \ Q(x) + R(x)$$
$$\therefore a(x) = (x+2)(-x^2 + 6x - 17) + 35$$

Toets:

$$\begin{aligned}(x+2)(-x^2 + 6x - 17) + 35 &= -x^3 + 6x^2 - 17x - 2x^2 + 12x - 34 + 35 \\ &= -x^3 + 4x^2 - 5x + 1\end{aligned}$$

c) $a(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 6$ en $b(x) = x - 1$

Oplossing:

$$\begin{array}{r}
2x^2 + 5x + 6 \\
x - 1|\overline{2x^3 + 3x^2 + x - 6} \\
-\left(\underline{2x^3 - 2x^2}\right) \\
0 + 5x^2 + x \\
-\left(\underline{5x^2 - 5x}\right) \\
0 + 6x - 6 \\
-\left(\underline{6x - 6}\right) \\
0 + 0
\end{array}$$

Die res is gelyk aan nul, daarom is $b(x)$ 'n faktor van $a(x)$.

$$Q(x) = 2x^2 + 5x + 6$$
$$R(x) = 0$$
$$\text{en } a(x) = b(x) \ . \ Q(x) + R(x)$$
$$\therefore a(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 6)$$

Toets:

$$\begin{aligned}(x-1)(2x^2 + 5x + 6) &= 2x^3 + 5x^2 + 6x - 2x^2 - 5x - 6 \\ &= 2x^3 + 3x^2 + x - 6\end{aligned}$$

d) $a(x) = x^3 + 2x^2 + 5$ en $b(x) = x - 1$

Oplossing:

$$\begin{array}{r}
x^2 + 3x + 3 \\
x - 1|\overline{x^3 + 2x^2 + 5} \\
-\left(\underline{x^3 - x^2}\right) \\
0 + 3x^2 + 0x \\
-\left(\underline{3x^2 - 3x}\right) \\
0 + 3x + 5 \\
-\left(\underline{3x - 3}\right) \\
0 + 8
\end{array}$$

$$Q(x) = x^2 + 3x + 3$$
$$R(x) = 8$$
$$\text{en } a(x) = b(x) \ . \ Q(x) + R(x)$$
$$\therefore a(x) = (x-1)(x^2 + 3x + 3) + 8$$

Toets:

$$\begin{aligned}(x-1)(x^2+3x+3)+8 &= x^3+3x^2+3x-x^2-3x-3+8\\ &= x^3+2x^2+5\end{aligned}$$

e) $(x-1)$ word in $a(x)=x^4+2x^3-3x^2+5x+4$ gedeel

Oplossing:

$$\begin{array}{r} x^3+3x^2+0x+5 \\ x-1\overline{)x^4+2x^3-3x^2+5x+4} \\ -\left(\underline{x^4-x^3}\right) \\ 0+3x^3-3x^2 \\ -\left(\underline{3x^3-3x^2}\right) \\ 0+0+5x+4 \\ -\left(\underline{5x-5}\right) \\ 0+9 \end{array}$$

$$\begin{aligned}Q(x) &= x^3+3x^2+5\\ R(x) &= 9\\ \text{en } a(x) &= b(x)\ .\ Q(x)+R(x)\\ \therefore a(x) &= (x-1)(x^3+3x^2+5)+9\end{aligned}$$

Toets:

$$\begin{aligned}(x-1)(x^3+3x^2+5)+9 &= x^4+3x^3+5x-x^3-3x^2-5+9\\ &= x^4+2x^3-3x^2+5x+4\end{aligned}$$

f) $\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{5x^4+3x^3+6x^2+x+2}{x^2-2}$

Oplossing:

$$\begin{array}{r} 5x^2+3x+16 \\ x^2+0x-2\overline{)5x^4+3x^3+6x^2+x+2} \\ -\left(\underline{5x^4-0x^3-10x^2}\right) \\ 0+3x^3+16x^2+x \\ -\left(\underline{3x^3+0x^2-6x}\right) \\ 0+16x^2+7x+2 \\ -\left(\underline{16x^2+0x-32}\right) \\ 7x+34 \end{array}$$

$$\begin{aligned}Q(x) &= 5x^2+3x+16\\ R(x) &= 7x+34\\ \text{en } a(x) &= b(x)\ .\ Q(x)+R(x)\\ \therefore a(x) &= (x^2-2)(5x^2+3x+16)+7x+34\end{aligned}$$

Toets:

$$\begin{aligned}&(x^2-2)(5x^2+3x+16)+7x+34\\ &= 5x^4+3x^3+16x^2-10x^2-6x-32+7x+34\\ &= 5x^4+3x^3+6x^2+x+2\end{aligned}$$

g) $a(x) = 3x^3 - x^2 + 2x + 1$ word gedeel deur $(3x - 1)$

Oplossing:

$$\begin{array}{r} x^2 + \frac{2}{3} \\ 3x - 1|\overline{3x^3 - x^2 + 2x + 1} \\ -\underline{(3x^3 - x^2)} \\ 0 + 0 + 2x + 1 \\ -\underline{\left(2x - \frac{2}{3}\right)} \\ 0 + \frac{5}{3} \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 + \frac{2}{3} \\ R(x) &= \frac{5}{3} \\ \text{en } a(x) &= b(x) \,.\, Q(x) + R(x) \\ \therefore a(x) &= (3x - 1)\left(x^2 + \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Toets:

$$\begin{aligned} (3x - 1)\left(x^2 + \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{3} &= 3x^3 + 2x - x^2 - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} \\ &= 3x^3 - x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

h) $a(x) = 2x^5 + x^3 + 3x^2 - 4$ en $b(x) = x + 2$

Oplossing:

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 15x + 30 \\ x + 2|\overline{2x^5 + 0x^4 + x^3 + 3x^2 + 0x - 4} \\ -\underline{(2x^5 + 4x^4)} \\ 0 - 4x^4 + x^3 \\ -\underline{(-4x^4 - 8x^3)} \\ 0 + 9x^3 + 3x^2 \\ -\underline{(9x^3 + 18x^2)} \\ 0 - 15x^2 + 0x \\ -\underline{(-15x^2 - 30x)} \\ 0 + 30x - 4 \\ -\underline{(30x + 60)} \\ 0 - 64 \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 15x + 30 \\ R(x) &= -64 \\ \text{en } a(x) &= b(x) \,.\, Q(x) + R(x) \\ \therefore a(x) &= (x + 2)(2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 15x + 30) - 64 \end{aligned}$$

Toets:

$$\begin{aligned} &(x + 2)(2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 15x + 30) - 64 \\ &= 2x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 15x^2 + 30x + 4x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 30x + 60 - 64 \\ &= 2x^5 + x^3 + 3x^2 - 4 \end{aligned}$$

3. Gebruik sintetiese deling om die kwosiënt $Q(x)$ en die res $R(x)$ te bepaal wanneer $f(x)$ deur $g(x)$ gedeel word.

a)

$$f(x) = x^2 + 5x + 1$$
$$g(x) = x + 2$$

Oplossing:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 3 & -5 \\ \hline -2 & 1 & 5 & 1 \end{array}$$

$$q_1 = 1$$
$$q_0 = 5 + (-2)(1) = 3$$
$$R = 1 + (-2)(3) = -5$$

$$Q(x) = x + 3$$
$$R(x) = -5$$
en $f(x) = g(x)\ .\ Q(x) + R(x)$
$$\therefore f(x) = (x+2)(x+3) - 5$$

b)

$$f(x) = x^2 - 5x - 7$$
$$g(x) = x - 1$$

Oplossing:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & -11 \\ \hline 1 & 1 & -5 & -7 \end{array}$$

$$q_1 = 1$$
$$q_0 = -5 + (1)(1) = -4$$
$$R = -7 + (-4)(1) = -11$$

$$Q(x) = x - 4$$
$$R(x) = -11$$
en $f(x) = g(x)\ .\ Q(x) + R(x)$
$$\therefore f(x) = (x-1)(x-4) - 11$$

c)

$$f(x) = 2x^3 + 5x - 4$$
$$g(x) = x - 1$$

Oplossing:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 2 & 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 5 & -4 \end{array}$$

$$q_2 = 2$$
$$q_1 = 0 + (2)(1) = 2$$
$$q_0 = 5 + (2)(1) = 7$$
$$R = -4 + (7)(1) = 3$$

$$Q(x) = 2x^2 + 2x + 7$$
$$R(x) = 3$$
en $f(x) = g(x)\ .\ Q(x) + R(x)$
$$\therefore f(x) = (x-1)(2x^2 + 2x + 7) + 3$$

d)

$$f(x) = 19 + x^2 + 8x$$
$$g(x) = x + 3$$

Oplossing:

$$\begin{array}{l} \quad 1 \quad 5 \quad 4 \\ -3|\overline{1 \quad 8 \quad 19} \end{array}$$

$$q_1 = 1$$
$$q_0 = 8 + (-3)(1) = 5$$
$$R = 19 + (5)(-3) = 4$$

$$Q(x) = x + 5$$
$$R(x) = 4$$
$$\text{en } f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x)$$
$$\therefore f(x) = (x + 3)(x + 5) + 4$$

e)

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 10$$
$$g(x) = x - 1$$

Oplossing:

$$\begin{array}{l} \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad -6 \\ 1|\overline{1 \quad 2 \quad 1 \quad -10} \end{array}$$

$$q_2 = 1$$
$$q_1 = 2 + (1)(1) = 3$$
$$q_0 = 1 + (1)(3) = 4$$
$$R = -10 + (1)(4) = -6$$

$$Q(x) = x^2 + 3x + 4$$
$$R(x) = -6$$
$$\text{en } f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x)$$
$$\therefore f(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 4) - 6$$

f)

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$$
$$g(x) = x + 3$$

Oplossing:

$$\begin{array}{l} \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad +0 \\ -3|\overline{2 \quad 7 \quad 2 \quad -3} \end{array}$$

$$q_2 = 2$$
$$q_1 = 7 + (-3)(2) = 1$$
$$q_0 = 2 + (-3)(1) = -1$$
$$R = -3 + (-3)(-1) = 0$$

$$Q(x) = 2x^2 + x - 1$$
$$R(x) = 0$$
$$\text{en } f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x)$$
$$\therefore f(x) = (x + 3)(2x^2 + x - 1)$$

g)

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^3 + 4x^2 - x - 2 \\ g(x) &= 2x - 1 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Oplossing:

$$\begin{array}{l} \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad -1 \\ \frac{1}{2}|\overline{4 \quad 4 \quad -1 \quad -2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= 4 \\ q_1 &= 4 + \left(\frac{1}{2}\right)(4) = 6 \\ q_0 &= -1 + \left(\frac{1}{2}\right)(6) = 2 \\ R &= -2 + \left(\frac{1}{2}\right)(2) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4x^2 + 6x + 2 \\ R(x) &= -1 \\ \text{en } f(x) &= \frac{1}{2}g(x) \,.\, Q(x) + R(x) \\ &= \frac{1}{2} \,.\, 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^2 + 6x + 2) - 1 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(2)(2x^2 + 3x + 1) - 1 \\ \therefore f(x) &= (2x - 1)(2x^2 + 3x + 1) - 1 \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x + 22 + 2x^3 + x^2 \\ g(x) &= 2x + 3 \\ &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + x^2 + 5x + 22 \\ g(x) &= 2x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \quad 2 \quad -2 \quad 8 \quad 10 \\ -\frac{3}{2}|\overline{2 \quad 1 \quad 5 \quad 22} \end{array}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= 2 \\ q_1 &= 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)(2) = -2 \\ q_0 &= 5 + \left(-\frac{3}{2}\right)(-2) = 8 \\ R &= 22 + \left(-\frac{3}{2}\right)(8) = 10 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= 2x^2 - 2x + 8 \\
R(x) &= 10 \\
\text{en } f(x) &= \frac{1}{2}g(x) \,.\, Q(x) + R(x) \\
&= \frac{1}{2} \,.\, 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 2x + 8) + 10 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x^2 - x + 4) + 10 \\
\therefore f(x) &= (2x + 3)(x^2 - x + 4) + 10
\end{aligned}
$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2B7T	1b. 2B7V	1c. 2B7W	1d. 2B7X	1e. 2B7Y	1f. 2B7Z
2a. 2B82	2b. 2B83	2c. 2B84	2d. 2B85	2e. 2B86	2f. 2B87
2g. 2B88	2h. 2B89	3a. 2B8B	3b. 2B8C	3c. 2B8D	3d. 2B8F
3e. 2B8G	3f. 2B8H	3g. 2B8J	3h. 2B8K		

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

6.3 Resstelling

Oefening 6 – 4: Resstelling

1. Gebruik die resstelling om die res R te bepaal wanneer $g(x)$ gedeel word deur $h(x)$:

   a)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^3 + 4x^2 + 11x - 5 \\
h(x) &= x - 1
\end{aligned}
$$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^3 + 4x^2 + 11x - 5 \\
g(1) &= (1)^3 + 4(1)^2 + 11(1) - 5 \\
&= 1 + 4 + 11 - 5 \\
\therefore R &= 11
\end{aligned}
$$

   b)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2x^3 - 5x^2 + 8 \\
h(x) &= 2x - 1
\end{aligned}
$$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2x^3 - 5x^2 + 8 \\
g\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8 \\
&= 2\left(\frac{1}{8}\right) - 5\left(\frac{1}{4}\right) + 8 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + 8 \\
\therefore R &= 7
\end{aligned}
$$

c)

$$\begin{aligned} g(x) &= 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1 \\ h(x) &= x + 2 \end{aligned}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} g(x) &= 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1 \\ g(-2) &= 4(-2)^3 + 5(-2)^2 + 6(-2) - 1 \\ &= -32 + 20 - 12 - 1 \\ \therefore R &= -25 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} g(x) &= -5x^3 - x^2 - 10x + 9 \\ h(x) &= 5x + 1 \end{aligned}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} g(x) &= -5x^3 - x^2 - 10x + 9 \\ g\left(-\frac{1}{5}\right) &= -5\left(-\frac{1}{5}\right)^3 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 10\left(-\frac{1}{5}\right) + 9 \\ &= -5\left(-\frac{1}{125}\right) - \left(\frac{1}{25}\right) + 2 + 9 \\ &= \frac{1}{25} - \frac{1}{25} + 11 \\ \therefore R &= 11 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} g(x) &= x^4 + 5x^2 + 2x - 8 \\ h(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^4 + 5x^2 + 2x - 8 \\ g(-1) &= (-1)^4 + 5(-1)^2 + 2(-1) - 8 \\ &= 1 + 5 - 2 - 8 \\ &= 6 - 10 \\ \therefore R &= -4 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x^5 - 8x^4 + x^2 + 2 \\ h(x) &= 2 - x \end{aligned}$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} h(x) &= 2 - x \\ \text{As } x = 2: \quad h(2) &= 2 - 2 = 0 \\ g(x) &= h(x)\ .\ Q(x) + R \\ g(2) &= h(2)\ .\ Q(2) + R \\ \therefore g(2) &= 0\ .\ Q(2) + R \\ g(2) &= 0 + R \\ \therefore R &= 3(2)^5 - 8(2)^4 + (2)^2 + 2 \\ &= 3(32) - 8(16) + 6 \\ &= 96 - 128 + 6 \\ \therefore R &= -26 \end{aligned}$$

g)

$$g(x) = 2x^{100} - x - 1$$
$$h(x) = x + 1$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^{100} - x - 1 \\ g(-1) &= 2(-1)^{100} - (-1) - 1 \\ &= 2 + 1 - 1 \\ \therefore R &= 2 \end{aligned}$$

2. Bepaal die waarde van t as $x^3 + tx^2 + 8x + 21$ gedeel deur $x + 1$ 'n res van 16 gee.

Oplossing:

$$\begin{aligned} a(x) &= x^3 + tx^2 + 8x + 21 \\ b(x) &= x + 1 \\ R &= 16 \\ a(-1) &= (-1)^3 + t(-1)^2 + 8(-1) + 21 \\ \therefore 16 &= -1 + t - 8 + 21 \\ \therefore t &= 4 \end{aligned}$$

3. Bereken die waarde van m as $2x^3 - 7x^2 + mx - 26$ gedeel word deur $x - 2$ en 'n res gee van -24.

Oplossing:

$$\begin{aligned} a(x) &= 2x^3 - 7x^2 + mx - 26 \\ b(x) &= x - 2 \\ R &= -24 \\ a(2) &= 2(2)^3 - 7(2)^2 + m(2) - 26 \\ \therefore -24 &= 16 - 28 + 2m - 26 \\ 14 &= 2m \\ \therefore m &= 7 \end{aligned}$$

4. As $x^5 - 2x^3 - kx - 1$ deur $x - 1$ gedeel word en die res $-\frac{1}{2}$ is, vind die waarde van k.

Oplossing:

$$\begin{aligned} a(x) &= x^5 - 2x^3 - kx - 1 \\ b(x) &= x - 1 \\ R &= -\frac{1}{2} \\ a(1) &= (1)^5 - 2(1)^3 - k(1) - 1 \\ \therefore -\frac{1}{2} &= 1 - 2 - k - 1 \\ \frac{3}{2} &= -k \\ \therefore k &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

5. Bepaal die waarde van p as $18x^3 + px^2 - 8x + 9$ gedeel word deur $2x - 1$ en 'n res van 6 gee.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
a(x) &= 18x^3 + px^2 - 8x + 9 \\
b(x) &= 2x - 1 \\
R &= 6 \\
a\left(\frac{1}{2}\right) &= 18\left(\frac{1}{2}\right)^3 + p\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}\right) + 9 \\
\therefore 6 &= 18\left(\frac{1}{8}\right) + p\left(\frac{1}{4}\right) - 4 + 9 \\
6 &= \frac{18}{8} + \frac{p}{4} + 5 \\
1 &= \frac{18}{8} + \frac{p}{4} \\
4 &= 9 + p \\
\therefore p &= -5
\end{aligned}$$

6. As $x^3 + x^2 - x + b$ gedeel word deur $x - 2$ en die res $2\frac{1}{2}$ is, bereken die waarde van b.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } f(x) &= x^3 + x^2 - x + b \\
R &= \frac{5}{2} \\
f(2) &= (2)^3 + (2)^2 - (2) + b \\
\therefore \frac{5}{2} &= 8 + 4 - 2 + b \\
\frac{5}{2} - 10 &= b \\
\therefore b &= -\frac{15}{2}
\end{aligned}$$

7. Bereken die waarde van h as $3x^5 + hx^4 + 10x^2 - 21x + 12$ gedeel word deur $x - 2$ en 'n res gee van 10.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
a(x) &= 3x^5 + hx^4 + 10x^2 - 21x + 12 \\
b(x) &= x - 2 \\
R &= 10 \\
a(2) &= 3(2)^5 + h(2)^4 + 10(2)^2 - 21(2) + 12 \\
\therefore 10 &= 3(32) + 16h + 40 - 42 + 12 \\
10 &= 96 + 16h + 10 \\
-96 &= 16h \\
\therefore h &= -6
\end{aligned}$$

8. As $x^3 + 8x^2 + mx - 5$ gedeel word deur $x + 1$ en die res is n, druk m in terme van n uit.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
a(x) &= x^3 + 8x^2 + mx - 5 \\
b(x) &= x + 1 \\
R &= n \\
a(-1) &= (-1)^3 + 8(-1)^2 + m(-1) - 5 \\
\therefore n &= -1 + 8 - m - 5 \\
n &= 2 - m \\
\therefore m &= 2 - n
\end{aligned}$$

9. Waneer die polinoom $2x^3 + px^2 + qx + 1$ gedeel word deur $x + 1$ of $x - 4$, is die res 5. Bepaal die waardes van p en q.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} a(x) &= 2x^3 + px^2 + qx + 1 \\ a(-1) &= 2(-1)^3 + p(-1)^2 + q(-1) + 1 \\ \therefore 5 &= -2 + p - q + 1 \\ 6 &= p - q \\ \therefore q &= p - 6 \ldots\ldots (1) \\ a(4) &= 2(4)^3 + p(4)^2 + q(4) + 1 \\ \therefore 5 &= 128 + 16p + 4q + 1 \\ -124 &= 16p + 4q \\ \therefore -31 &= 4p + q \ldots\ldots (2) \\ \text{Vervang verg. } (1) \text{ in verg. } (2) & \\ \therefore -31 &= 4p + (p - 6) \\ -25 &= 5p \\ \therefore -5 &= p \\ \text{En } q &= -5 - 6 \\ &= -11 \end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2B8M	1b. 2B8N	1c. 2B8P	1d. 2B8Q	1e. 2B8R	1f. 2B8S
1g. 2B8T	2. 2B8V	3. 2B8W	4. 2B8X	5. 2B8Y	6. 2B8Z
7. 2B92	8. 2B93	9. 2B94			

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

6.4 Faktorstelling

Oefening 6 – 5: Faktorisering van derdegraadse polinome

1. Vind die res as $4x^3 - 4x^2 + x - 5$ gedeel word deur $x + 1$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Laat } a(x) &= 4x^3 - 4x^2 + x - 5 \\ a(-1) &= 4(-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) - 5 \\ &= -4 - 4 - 1 - 5 \\ &= -14 \end{aligned}$$

2. Gebruik die faktorstelling om $x^3 - 3x^2 + 4$ volledig te faktoriseer.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{Laat } a(x) &= x^3 - 3x^2 + 4 \\
a(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 \\
&= -1 - 3 + 4 \\
&= 0 \\
\therefore (x+1) &\text{ is 'n faktor} \\
a(x) &= (x+1)(x^2 - 4x + 4) \\
&= (x+1)(x-2)(x-2) \\
&= (x+1)(x-2)^2
\end{aligned}
$$

3. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

   a) Vind $f(1)$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3 + x^2 - 5x + 2 \\
f(1) &= 2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2 \\
&= 2 + 1 - 5 + 2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

   b) Faktoriseer $f(x)$ volledig.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 0 \\
\therefore (x-1) &\text{ is 'n faktor van } f(x) \\
f(x) &= (x-1)(2x^2 + 3x - 2) \\
&= (x-1)(2x-1)(x+2)
\end{aligned}
$$

4. Gebruik die faktorstelling om al die faktore van die volgende uitdrukkings te vind: $x^3 + x^2 - 17x + 15$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{Laat } a(x) &= x^3 + x^2 - 17x + 15 \\
a(1) &= (1)^3 + (1)^2 - 17(1) + 15 \\
&= 1 + 1 - 17 + 15 \\
&= 0 \\
\therefore a(x) &= (x-1)(x^2 + 2x - 15) \\
&= (x-1)(x+5)(x-3)
\end{aligned}
$$

5. Voltooi: As $f(x)$ 'n polinoom is en p is 'n getal sodat $f(p) = 0$ dan is $(x-p)$...

   Oplossing:

   'n faktor van $f(x)$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2B95 2. 2B96 3a. 2B97 3b. 2B98 4. 2B99 5. 2B9B

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 6 – 6: Los derdegraadse vergelykings op

Los die volgende derdegraadse vergelykings op:

1. $x^3 + x^2 - 16x = 16$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 16x &= 16 \\ x^3 + x^2 - 16x - 16 &= 0 \\ \text{Laat } a(x) &= x^3 + x^2 - 16x - 16 \\ a(-1) &= (-1)^3 + (-1)^2 - 16(-1) - 16 \\ &= -1 + 1 + 16 - 16 \\ &= 0 \\ \therefore a(x) &= (x+1)(x^2 - 16) \\ &= (x+1)(x-4)(x+4) \\ \therefore 0 &= (x+1)(x-4)(x+4) \\ \therefore x &= -1 \text{ of } x = 4 \text{ of } x = -4 \end{aligned}$$

2. $-n^3 - n^2 + 22n + 40 = 0$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} n^3 + n^2 - 22n - 40 &= 0 \\ \text{Laat } a(n) &= n^3 + n^2 - 22n - 40 \\ a(-2) &= (-2)^3 + (-2)^2 - 22(-2) - 40 \\ &= -8 + 4 + 44 - 40 \\ &= 0 \\ \therefore a(n) &= (n+2)(n^2 - n - 20) \\ &= (n+2)(n-5)(n+4) \\ \therefore 0 &= (n+2)(n-5)(n+4) \\ \therefore n &= -2 \text{ of } n = -4 \text{ of } n = 5 \end{aligned}$$

3. $y(y^2 + 2y) = 19y + 20$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} y(y^2 + 2y) &= 19y + 20 \\ y^3 + 2y^2 - 19y - 20 &= 0 \\ \text{Laat } a(y) &= y^3 + 2y^2 - 19y - 20 \\ a(-1) &= (-1)^3 + 2(-1)^2 - 19(-1) - 20 \\ &= -1 + 2 + 19 - 20 \\ &= 0 \\ \therefore a(y) &= (y+1)(y^2 + y - 20) \\ &= (y+1)(y+5)(y-4) \\ \therefore 0 &= (y+1)(y+5)(y-4) \\ \therefore y &= -1 \text{ of } y = 4 \text{ of } y = -5 \end{aligned}$$

4. $k^3 + 9k^2 + 26k + 24 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } a(k) &= k^3 + 9k^2 + 26k + 24 \\
a(-2) &= (-2)^3 + 9(-2)^2 + 26(-2) + 24 \\
&= -8 + 36 - 52 + 24 \\
&= 0 \\
\therefore a(k) &= (k+2)(k^2 + 7k + 12) \\
&= (k+2)(k+3)(k+4) \\
\therefore 0 &= (k+2)(k+3)(k+4) \\
\therefore k &= -2 \text{ of } k = -3 \text{ of } k = -4
\end{aligned}$$

5. $x^3 + 2x^2 - 50 = 25x$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
x^3 + 2x^2 - 50 &= 25x \\
x^3 + 2x^2 - 25x - 50 &= 0 \\
\text{Laat } a(x) &= x^3 + 2x^2 - 25x - 50 \\
a(-2) &= (-2)^3 + 2(-2)^2 - 25(-2) - 50 \\
&= -8 + 8 + 50 - 50 \\
&= 0 \\
\therefore a(x) &= (x+2)(x^2 - 25) \\
&= (x+2)(x-5)(x+5) \\
\therefore 0 &= (x+2)(x-5)(x+5) \\
\therefore x &= -2 \text{ of } x = 5 \text{ of } x = -5
\end{aligned}$$

6. $-p^3 + 19p = 30$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
-p^3 + 19p - 30 &= 0 \\
p^3 - 19p + 30 &= 0 \\
\text{Laat } a(p) &= p^3 - 19p + 30 \\
a(3) &= (3)^3 - 19(3) + 30 \\
&= 27 - 57 + 30 \\
&= 0 \\
\therefore a(p) &= (p-3)(p^2 + 3p - 10) \\
&= (p-3)(p-2)(p+5) \\
\therefore 0 &= (p-3)(p-2)(p+5) \\
\therefore p &= 3 \text{ of } p = 2 \text{ of } p = -5
\end{aligned}$$

7. $6x^2 - x^3 = 5x + 12$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
0 &= x^3 - 6x^2 + 5x + 12 \\
\text{Laat } a(x) &= x^3 - 6x^2 + 5x + 12 \\
a(-1) &= (-1)^3 - 6(-1)^2 + 5(-1) + 12 \\
&= -1 - 6 - 5 + 12 \\
&= 0 \\
\therefore a(x) &= (x+1)(x^2 - 7x + 12) \\
&= (x+1)(x-3)(x-4) \\
\therefore 0 &= (x+1)(x-3)(x-4) \\
\therefore x &= -1 \text{ of } x = 3 \text{ of } x = 4
\end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2B9C 2. 2B9D 3. 2B9F 4. 2B9G 5. 2B9H 6. 2B9J
7. 2B9K

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

6.6 Opsomming

Oefening 6 – 7: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Los op vir x: $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } a(x) &= x^3 + x^2 - 5x + 3 \\
a(1) &= (1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 3 \\
&= 0 \\
\therefore a(x) &= (x-1)(x^2 + 2x - 3) \\
&= (x-1)(x+3)(x-1) \\
&= (x-1)^2(x+3) \\
\therefore 0 &= (x-1)^2(x+3) \\
\therefore x &= 1 \text{ of } x = -3
\end{aligned}$$

2. Los op vir y: $y^3 = 3y^2 + 16y + 12$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } a(y) &= y^3 - 3y^2 - 16y - 12 \\
a(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 - 16(-1) - 12 \\
&= -1 - 3 + 16 - 12 \\
&= 0 \\
\therefore a(y) &= (y+1)(y^2 - 4y - 12) \\
&= (y+1)(y-6)(y+2) \\
\therefore 0 &= (y+1)(y-6)(y+2) \\
\therefore y &= -1 \text{ of } y = 6 \text{ of } y = -2
\end{aligned}$$

3. Los op vir m: $m(m^2 - m - 4) = -4$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } a(m) &= m^3 - m^2 - 4m + 4 \\
a(1) &= (1)^3 - (1)^2 - 4(1) + 4 \\
&= 1 - 1 - 4 + 4 \\
&= 0 \\
\therefore a(m) &= (m-1)(m^2 - 4) \\
&= (m-1)(m+2)(m-2) \\
\therefore 0 &= (m-1)(m+2)(m-2) \\
\therefore m &= 1 \text{ of } m = 2 \text{ of } m = -2
\end{aligned}$$

4. Los op vir x: $x^3 - x^2 = 3(3x+2)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
x^3 - x^2 &= 3(3x+2) \\
x^3 - x^2 &= 9x + 6 \\
x^3 - x^2 - 9x - 6 &= 0 \\
\text{Laat } x = -2: \quad (-2)^3 - (-2)^2 - 9(-2) - 6 & \\
&= -8 - 4 + 18 - 6 \\
&= 0 \\
\therefore (x+2) &\text{ is 'n faktor} \\
(x+2)(x^2 - 3x - 3) &= 0
\end{aligned}$$

Gebruik die kwadratiese formule om op te los vir x : $x^2 - 3x - 3 = 0$

$$\begin{aligned}
a = 1; \quad b = -3; \quad c &= -3 \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 12}}{2} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} \\
\therefore x = -2 \text{ of } x &= \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \text{ of } x = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}
\end{aligned}$$

5. Los op vir x as $2x^3 - 3x^2 - 8x = 3$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
2x^3 - 3x^2 - 8x &= 3 \\
2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 &= 0 \\
\text{Laat } a(x) &= 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 \\
a(-1) &= 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 8(-1) - 3 \\
&= -2 - 3 + 8 - 3 \\
&= 0 \\
\therefore a(x) &= (x+1)(2x^2 - 5x - 3) \\
&= (x+1)(2x+1)(x-3) \\
\therefore 0 &= (x+1)(2x+1)(x-3) \\
\therefore x = -1 \text{ of } x &= -\frac{1}{2} \text{ of } x = 3
\end{aligned}$$

6. Los op vir x: $16(x+1) = x^2(x+1)$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
16(x+1) &= x^2(x+1) \\
16x + 16 &= x^3 + x^2 \\
0 &= x^3 + x^2 - 16x - 16 \\
\text{Laat } a(x) &= x^3 + x^2 - 16x - 16 \\
a(-1) &= (-1)^3 + (-1)^2 - 16(-1) - 16 \\
&= -1 + 1 + 16 - 16 \\
&= 0 \\
\therefore a(x) &= (x+1)(x^2 - 16) \\
&= (x+1)(x-4)(x+4) \\
\therefore 0 &= (x+1)(x-4)(x+4) \\
\therefore x = -1 &\text{ of } x = 4 \text{ of } x = -4
\end{aligned}
$$

7. a) Wys dat $x - 2$ 'n faktor van $3x^3 - 11x^2 + 12x - 4$ is.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{Laat } a(x) &= 3x^3 - 11x^2 + 12x - 4 \\
a(2) &= 3(2)^3 - 11(2)^2 + 12(2) - 4 \\
&= 24 - 44 + 24 - 4 \\
&= 0 \\
\therefore (x-2) &\text{ is 'n faktor van } a(x)
\end{aligned}
$$

   b) Los daarna die vergelyking op deur volledig te faktoriseer: $3x^3 - 11x^2 + 12x - 4 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
3x^3 - 11x^2 + 12x - 4 &= 0 \\
(x-2)(3x^2 - 5x + 2) &= 0 \\
\therefore (x-2)(3x-2)(x-1) &= 0 \\
\therefore x = 2 \text{ of } x = \frac{2}{3} &\text{ of } x = 1
\end{aligned}
$$

8. $2x^3 - x^2 - 2x + 2 = Q(x).(2x-1) + R$ vir alle waardes van x. Wat is die waarde van R?

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{Laat } a(x) &= 2x^3 - x^2 - 2x + 2 \\
R = a\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \\
&= 2\left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) - 1 + 2 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \\
&= 1 \\
\therefore R &= 1
\end{aligned}
$$

9. a) Gebruik die faktorstelling om die volgende vergelykings vir m op te los: $8m^3 + 7m^2 - 17m + 2 = 0$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } a(m) &= 8m^3 + 7m^2 - 17m + 2 \\
a(1) &= 8(1)^3 + 7(1)^2 - 17(1) + 2 \\
&= 8 + 7 - 17 + 2 \\
&= 0 \\
\therefore a(m) &= (m-1)(8m^2 + 15m - 2) \\
&= (m-1)(8m-1)(m+2) \\
\therefore 0 &= (m-1)(8m-1)(m+2) \\
\therefore m = 1 \text{ of } m &= \frac{1}{8} \text{ of } m = -2
\end{aligned}$$

b) Los vervolgens, of andersins, op vir x:
$2^{3x+3} + 7.2^{2x} + 2 = 17.2^x$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
2^{3x+3} + 7 \cdot 2^{2x} + 2 &= 17 \cdot 2^x \\
2^{3x} \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^{2x} + 2 &= 17 \cdot 2^x \\
8 \cdot (2^x)^3 + 7 \cdot (2^x)^2 - 17 \cdot 2^x + 2 &= 0 \\
\text{wat ons kan vergelyk met } a(m) &= 8m^3 + 7m^2 - 17m + 2 \\
\text{Laat } 2^x &= m \\
\text{en van deel (a) weet ons dat } m = 1 \text{ of } m &= \frac{1}{8} \text{ of } m = -2 \\
\text{So } 2^x &= 1 \\
2^x &= 2^0 \\
\therefore x &= 0 \\
\text{Of } 2^x &= \frac{1}{8} \\
2^x &= 2^{-3} \\
\therefore x &= -3 \\
\text{Of } 2^x &= -2 \\
&\therefore \text{geen oplossing}
\end{aligned}$$

10. Vind die waarde van R as $x - 1$ 'n faktor van $h(x) = (x - 6) \cdot Q(x) + R$ is en $Q(x)$ gedeel deur $x - 1$ 'n res van 8 gee.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
h(x) &= (x-6) \cdot Q(x) + R \\
h(1) &= (1-6) \cdot Q(1) + R \\
\therefore 0 &= -5 \cdot Q(1) + R \\
\text{En } Q(1) &= 8 \\
0 &= -5(8) + R \\
\therefore R &= 40
\end{aligned}$$

11. Bepaal die waardes van p waarvoor die funksie

$$f(x) = 3p^3 - (3p - 7)x^2 + 5x - 3$$

'n Res los van 9 as dit deur $(x - p)$ gedeel word.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3p^3 - (3p-7)x^2 + 5x - 3 \\
\therefore f(p) &= 3p^3 - (3p-7)p^2 + 5p - 3 \\
&= 3p^3 - 3p^3 + 7p^2 + 5p - 3 \\
&= 7p^2 + 5p - 3 \\
f(p) &= 9 \\
\therefore 9 &= 7p^2 + 5p - 3 \\
0 &= 7p^2 + 5p - 12 \\
0 &= (7p+12)(p-1) \\
\therefore p = -\frac{12}{7} &\text{ of } p = 1
\end{aligned}
$$

Alternatiewe (lang) metode:
Ons haal eers die faktor deur langdeling uit:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad \underline{(7-3p)x + (5+7p-3p^2)} \\
(x-p)|(7-3p)x^2 + 5x + (3p^3-3) \\
\quad - \underline{\{(7-3p)x^2 - p(7-3p)x\}} \\
\qquad\qquad 0 + 5x + p(7-3p)x + (3p^3-3) \\
\qquad\qquad\quad 5x + 7px - 3p^2x + 3p^3x \\
\qquad\qquad\quad [5+7p-3p^2]x + 3p^3 - 3 \\
\qquad\qquad - \underline{\{[5+7p-3p^2]x - p(5+7p-3p^2)\}} \\
\qquad\qquad\quad 0 + 3p^3 - 3 + 5p + 7p^2 - 3p^3
\end{array}
$$

Ons neem die res en stel dit gelyk aan 9:

$$
\begin{aligned}
-3 + 5p + 7p^2 &= 9 \\
7p^2 + 5p - 12 &= 0 \\
(7p+12)(p-1) &= 0 \\
\therefore p = -\frac{12}{7} &\text{ of } p = 1
\end{aligned}
$$

12. Bereken t en $Q(x)$ as $x^2 + tx + 3 = (x+4) \cdot Q(x) - 17$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x^2 + tx + 20 &= (x+4) \cdot Q(x) \\
\text{Laat } f(x) &= x^2 + tx + 20 \\
f(-4) &= (-4)^2 + t(-4) + 20 \\
0 &= 16 - 4t + 20 \\
4t &= 36 \\
\therefore t &= 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 9x + 20 &= (x+4) \cdot Q(x) \\
(x+4)(x+5) &= (x+4) \cdot Q(x) \\
\therefore Q(x) &= x + 5
\end{aligned}
$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2B9N	2. 2B9P	3. 2B9Q	4. 2B9R	5. 2B9S	6. 2B9T
7. 2B9V	8. 2B9W	9. 2B9X	10. 2B9Y	11. 2B9Z	12. 2BB2

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK



Differensiaalrekene

- Verduidelik die terminologie baie goed, want daar is baie nuwe terme in hierdie hoofstuk.
- Moedig leerders aan om 'n skets te teken, want dit is baie handig om probleme op te los.
- Dit is baie belangrik dat leerders verstaan dat die limiet die waarde is waarheen 'n funksie neig (kom nader en nader na) en dit is nie 'n presiese antwoord nie.
- Verduidelik aan die leerders dat dit nie nodig is dat 'n funksie gedefinieerd is vir 'n gegewe waarde van x vir die limiet om te bestaan nie.
- Leerders moet verstaan dat die afgeleide van 'n funksie gee die gradiënt van die funksie by 'n gegewe punt **EN** die gradiënt van die raaklyn by die punt.
- Leerders moet differensiasie vanuit eerste beginsels oefen. Dit word dikwels in eksamens gevra.
- Leerders moet vertroud wees met die verskillende notasies vir differensiasie.

7.1 Limiete

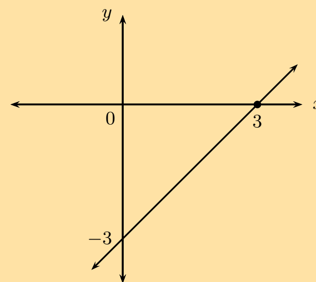
Oefening 7 – 1: Limiete

1. Bepaal die volgende limiete en trek ruwe sketse om dit te illustreer:

   a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

   Oplossing:

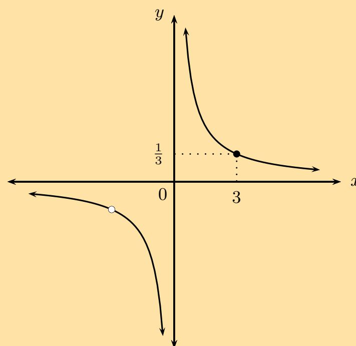
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} &= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} \\ &= \lim_{x \to 3} (x - 3) \\ &= 3 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$



   b) $\lim_{x \to 3} \frac{x + 3}{x^2 + 3x}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} \frac{x + 3}{x^2 + 3x} &= \lim_{x \to 3} \frac{x + 3}{x(x+3)} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



2. Bepaal die volgende limiete (as hulle bestaan):

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 4x}{3 - x}$

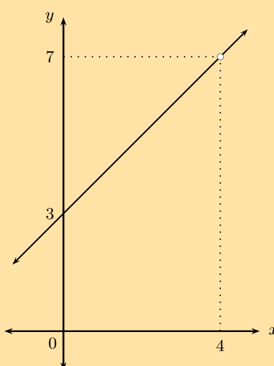
Oplossing:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x}{3 - x} &= \lim_{x \to 2} \frac{3(2)^2 - 4(2)}{3 - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{12 - 8}{1} \\ &= 4\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} &= \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)(x + 3)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \to 4}(x + 3) \\ &= 4 + 3 \\ &= 7\end{aligned}$$



Belangrik: let daarop dat alhoewel die funksie nie gedefinieerd is vir $x = 4$ nie, bestaan die limiet as x neig na 4 tog en is dit gelyk aan 7.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \left(3x + \dfrac{1}{3x}\right)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \left(3x + \frac{1}{3x}\right) &= 6 + \frac{1}{6} \\ &= \frac{37}{6}\end{aligned}$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

Oplossing:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} \therefore \text{ bestaan nie}$$

e) $\lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y+1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y+1} &= \frac{1-1}{1+1} \\ &= \frac{0}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

f) $\lim_{y\to 1} \frac{y+1}{y-1}$

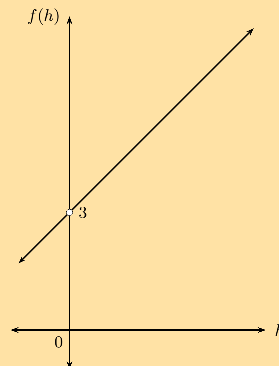
Oplossing:

$$\lim_{y\to 1} \frac{y+1}{y-1} = \frac{1+1}{1-1} \therefore \text{ bestaan nie}$$

g) $\lim_{h\to 0} \frac{3h+h^2}{h}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{3h+h^2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{h(3+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3+h) \\ &= 3+0 \\ &= 3\end{aligned}$$

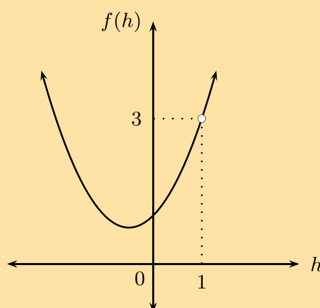


Alhoewel die funksie nie gedefinieerd is by $h = 0$ nie, sal die limiet as h neig na 0 tog bestaan en is gelyk aan 3.

h) $\lim_{h\to 1} \frac{h^3-1}{h-1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 1} \frac{h^3-1}{h-1} &= \lim_{h\to 1} \frac{(h-1)(h^2+h+1)}{h-1} \\ &= \lim_{h\to 1}(h^2+h+1) \\ &= 1^2+1+1 \\ &= 3\end{aligned}$$



Alhoewel die funksie nie gedefinieerd is by $h = 1$ nie, sal die limiet as h neig na 1 tog bestaan en gelyk wees aan 3.

i) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} &= \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

Neem kennis dat die funksie nie gedefinieerd is by $x = 3$ nie, maar dat die limiet as x neig na 3 tog bestaan en gelyk is aan $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BB5 1b. 2BB6 2a. 2BB7 2b. 2BB8 2c. 2BB9 2d. 2BBB
2e. 2BBC 2f. 2BBD 2g. 2BBF 2h. 2BBG 2i. 2BBH

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Gradiënt by 'n punt

Oefening 7 – 2: Gradiënt by 'n punt

1. Gegee: $f(x) = -x^2 + 7$

   a) Bepaal die gemiddelde gradiënt van die funksie f, tussen $x = -1$ en $x = 3$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Gemiddelde gradiënt} &= \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} \\
&= \frac{[-(3)^2+7]-[-(-1)^2+7]}{4} \\
&= \frac{(-9+7)-(-1+7)}{4} \\
&= \frac{-2-6}{4} \\
&= -\frac{8}{4} \\
&= -2
\end{aligned}$$

b) Illustreer dit met 'n grafiek.

Oplossing:

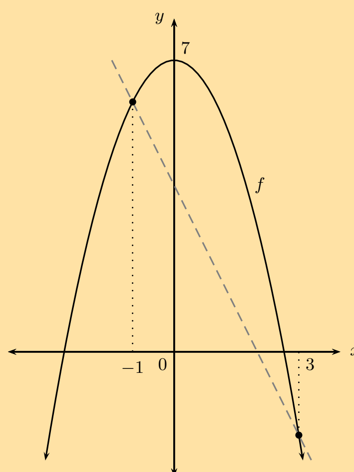
Grafiek:

Parabool: "frons" $(a < 0)$

$y_{\text{af}} : x = 0, y = 7$

$x_{\text{af}} : y = 0, x = \pm\sqrt{7}$

Draaipunt: $(0; 7)$



c) Bepaal die gradiënt van f by die punt $x = 3$ en toon dit aan op jou grafiek.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Gradiënt by 'n punt} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[-(x+h)^2+7]-[-x^2+7]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-x^2-2xh-h^2+7+x^2-7}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh-h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (-2x-h) \\
&= -2x
\end{aligned}$$

2. Bepaal die gradiënt van die raaklyn aan g as $g(x) = \frac{3}{x}$ $(x \neq 0)$ by $x = a$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Gradiënt van raaklyn} &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{x+h}-\frac{3}{x}}{h}
\end{aligned}$$

Om die twee breuke in die teller te vereenvoudig, kry ons 'n gemene noemer $x(x+h)$:

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3(x)-3(x+h)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x-3x-3h}{h.x(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h\ .\ x(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-3}{x^2+xh} \\
&= \frac{-3}{x^2}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Gradiënt by $x = a$ is $\frac{-3}{a^2}$

3. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan $H(x) = x^2 + 3x$ at $x = -1$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{Gradiënt van raaklyn } &= \lim_{h\to 0} \frac{H(x+h)-H(x)}{(x+h)-x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+3(x+h)-(x^2+3x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2+3x+3h-x^2-3x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+3h+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+3+h)}{h} \\
&= 2x+3
\end{aligned}
$$

By $x = -1: \quad m = 2(-1) + 3 = 1$

Die raaklyn raak die grafiek van H by $(-1; y)$.

$$\therefore y = (-1)^2 + 3(-1) = -2$$

Dus gaan die raaklyn deur $H(-1; -2)$.

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
\text{Vervang: } y - (-2) &= 1(x - (-1)) \\
y + 2 &= x + 1 \\
y &= x - 1
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Verg. raaklyn by $x = -1$ is $y = x - 1$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BBJ 2. 2BBK 3. 2BBM

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 7 – 3: Differensiasie vanuit eerste beginsels

1. Gegee: $g(x) = -x^2$

   a) Bepaal $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$.
   Oplossing:

$$g(x) = -x^2$$
$$g(x+h) = -(x+h)^2$$
$$\therefore \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h}$$

   b) Bepaal vervolgens $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-(x^2+2xh+h^2)+x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-x^2-2xh-h^2+x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh-h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -2x-h \\
&= -2x
\end{aligned}$$

   c) Verduidelik die betekenis van jou antwoord in (b).
   Oplossing:
   Die afgeleide van $g(x)$ is $g'(x) = -2x$. Die gradiënt van die funksie g word gegee deur die uitdrukking $-2x$. Die gradiënt van die grafiek hang af van die waarde van x.

2. Bepaal die afgeleide van $f(x) = -2x^2+3x+1$ deur gebruik te maak van eerste beginsels.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2x^2+3x+1 \\
f(x+h) &= -2(x+h)^2+3(x+h)+1 \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2(x+h)^2+3(x+h)+1-(-2x^2+3x+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2(x^2+2xh+h^2)+1+3x+3h+2x^2-3x-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2x^2-4xh-2h^2+3h+2x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-4xh-2h^2+3h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-4x-2h+3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (-4x-2h+3) \\
f'(x) &= -4x+3
\end{aligned}$$

3. Bepaal die afgeleide van $f(x) = \frac{1}{x-2}$ deur gebruik te maak van eerste beginsels.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x-2} \\
f(x+h) &= \frac{1}{x+h-2} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x-2)-(x+h-2)}{(x+h-2)(x-2)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-2-x-h+2}{(x+h-2)(x-2)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{-h}{(x+h-2)(x-2)}\right) \times \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-2)(x-2)} \\
f'(x) &= \frac{-1}{(x-2)^2}
\end{aligned}$$

4. Bepaal $g'(3)$ vanuit eerste beginsels as $g(x) = -5x^2$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
g(x) &= -5x^2 \\
g(x+h) &= -5(x+h)^2 \\
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-5(x^2+2xh+h^2)-(-5x^2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-5x^2-10xh-5h^2+5x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-10xh-5h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-10x-5h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (-10x-5h) \\
&= -10x
\end{aligned}$$

Dus is:

$$\begin{aligned}
g'(3) &= -10(3) \\
&= -30
\end{aligned}$$

5. As $p(x) = 4x(x-1)$, bepaal $p'(x)$ deur gebruik te maak van eerste beginsels.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
p(x) &= 4x(x-1) \\
&= 4x^2 - 4x \\
p(x+h) &= 4(x+h)^2 - 4(x+h) \\
p'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4(x^2+2xh+h^2)-4x-4h-4x^2+4x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4x^2+8xh+4h^2-4h-4x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(8x+4h-4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (8x+4h-4) \\
&= 8x-4
\end{aligned}$$

6. Bepaal die afgeleide van $k(x) = 10x^3$ deur gebruik te maak van eerste beginsels.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
k(x) &= 10x^3 \\
k(x+h) &= 10(x+h)^3 \\
k'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)-k(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{10(x+h)^3-10x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{10\left(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\right)-10x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{10x^3+30x^2h+30xh^2+10h^3-10x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{30x^2h+30xh^2+10h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(30x^2+30xh+10h^2\right) \\
k'(x) &= 30x^2
\end{aligned}$$

7. Differensieer $f(x) = x^n$ deur gebruik te maak van eerste beginsels.
   (Wenk: Gebruik Pascal se driehoek)

   Oplossing:

   Stap 1: Gebruik eerste beginsels om die afgeleide te bepaal.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \text{ (gemiddelde gradiënt)}$$

$$\begin{aligned}
\text{Gemiddelde gradiënt } &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \frac{(x+h)^n - x^n}{h}
\end{aligned}$$

   Brei $(x+h)^n$ uit deur gebruik te maak van die patroon van koëffisiënte by Pascal se Driehoek:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
x & & & & & & 1 & & & & & \\
(x+h) & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
(x+h)^2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
(x+h)^3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
(x+h)^4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
. & & & & & & & & & & & \\
. & & & & & & & & & & & \\
(x+h)^n & 1 & & n & . & . & . & . & . & n & & 1
\end{array}$$

$$\therefore (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h \cdots nxh^{n-1} + h^n$$

Al die terme, behalwe x^n, bevat h.

$$\begin{aligned}
\text{Gemiddelde gradiënt} &= \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-1} + h^n) - x^n}{h} \\
&= \frac{nx^{n-1}h + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\
&= \frac{h(nx^{n-1} + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1})}{h} \\
&= nx^{n-1} + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{Gemiddelde gradiënt} &= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right) \\
\therefore &= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{As } f(x) &= x^n \\
f'(x) &= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

Dit is 'n baie waardevolle algemene reël om die afgeleide van 'n funksie te bepaal.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BBP 1b. 2BBQ 1c. 2BBR 2. 2BBS 3. 2BBT 4. 2BBV
5. 2BBW 6. 2BBX 7. 2BBY

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

7.3 Reëls vir differensiasie

Oefening 7 – 4: Reëls vir differensiasie

1. Differensieer die volgende:

   a) $y = 3x^2$

      Oplossing:

      $\frac{dy}{dx} = 6x$

   b) $f(x) = 25x$

      Oplossing:

      $f'(x) = 25$

   c) $k(x) = -30$

      Oplossing:

      $k'(x) = 0$

   d) $y = -4x^5 + 2$

      Oplossing:

      $\frac{dy}{dx} = -20x^4$

   e) $g(x) = 16x^{-2}$

      Oplossing:

      $g'(x) = -32x^{-3} = -\frac{32}{x^3}$

   f) $y = 10(7-3)$

Oplossing:
$y = 40 \therefore y' = 0$

g) $q(x) = x^4 - 6x^2 - 1$
Oplossing:
$q'(x) = 4x^3 - 12x$

h) $y = x^2 + x + 4$
Oplossing:
$\frac{dy}{dx} = 2x + 1$

i) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{5}$
Oplossing:
$f'(x) = x^2 - 2x$

j) $y = 3x^{\frac{3}{2}} - 4x + 20$
Oplossing:
$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} - 4$

k) $g(x) = x(x + 2) + 5x$
Oplossing:
$g(x) = x^2 + 7x$
$g'(x) = 2x + 7$

l) $p(x) = 200[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - 40]$
Oplossing:
$p'(x) = 200[3x^2 - x + \frac{1}{5}]$
$p'(x) = 600x^2 - 200x + 40$

m) $y = 14(x - 1)\left[\frac{1}{2} + x^2\right]$
Oplossing:
$y = 14(x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$
$\therefore \frac{dy}{dx} = 14\left(3x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right)$
$= 42x^2 - 28x + 7$

2. Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} \\ &= \frac{(x-3)(x-2)}{x-2} \\ &= x - 3 \\ f'(x) &= 1 \end{aligned}$$

3. Bepaal $f'(y)$ as $f(y) = \sqrt{y}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(y) &= \sqrt{y} \\ &= y^{\frac{1}{2}} \\ f'(y) &= \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

4. Bepaal $f'(z)$ as $f(z) = (z - 1)(z + 1)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1)(z+1) \\ &= z^2 - 1 \\ f'(z) &= 2z \end{aligned}$$

5. Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $y = \frac{x^3+2\sqrt{x}-3}{x}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3 + 2\sqrt{x} - 3}{x} \\ y &= x^2 + 2x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{-1} \\ \frac{dy}{dx} &= 2x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} - 3(-1)x^{-2} \\ &= 2x - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

6. Bepaal die afgeleide van $y = \sqrt{x^3} + \frac{1}{3x^3}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^{-3} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-4} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

7. Bepaal $D_x\left[x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}\right]^2$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} D_x\left[x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}\right]^2 &= D_x\left[x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}\right]\left[x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}\right] \\ &= D_x\left[x^3 - 2(3x) + \frac{9}{x}\right] \\ &= D_x\left[x^3 - 6x + 9x^{-1}\right] \\ &= 3x^2 - 6 - 9x^{-2} \\ &= 3x^2 - 6 - \frac{9}{x^2} \end{aligned}$$

8. Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $x = 2y + 3$.

Oplossing:

Maak y die onderwerp van die formule sodat jy y kan differensieer ten opsigte van x.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

9. Bepaal $f'(\theta)$ as $f(\theta) = 2(\theta^{\frac{3}{2}} - 3\theta^{-\frac{1}{2}})^2$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2(\theta^{\frac{3}{2}} - 3\theta^{-\frac{1}{2}})^2 \\ &= 2(\theta^{\frac{3}{2}} - 3\theta^{-\frac{1}{2}})(\theta^{\frac{3}{2}} - 3\theta^{-\frac{1}{2}}) \\ &= 2(\theta^3 - 6\theta + 9\theta^{-1}) \\ \therefore f'(\theta) &= 2(3\theta^2 - 6 - 9\theta^{-2}) \\ &= 2(3\theta^2 - 6 - \frac{9}{\theta^2}) \\ &= 6\theta^2 - 12 - \frac{18}{\theta^2} \end{aligned}$$

10. Bepaal $\frac{dp}{dt}$ as $p(t) = \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^{\frac{1}{2}}} \\
&= t^{-\frac{1}{2}}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1) \\
&= t^{\frac{5}{2}} + 3t^{\frac{3}{2}} + 3t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} \\
\therefore \frac{dp}{dt} &= \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2t^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BC2	1b. 2BC3	1c. 2BC4	1d. 2BC5	1e. 2BC6	1f. 2BC7
1g. 2BC8	1h. 2BC9	1i. 2BCB	1j. 2BCC	1k. 2BCD	1l. 2BCF
1m. 2BCG	2. 2BCH	3. 2BCJ	4. 2BCK	5. 2BCM	6. 2BCN
7. 2BCP	8. 2BCQ	9. 2BCR	10. 2BCS		

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

7.4 Vergelyking van ’n raaklyn aan ’n kurwe

Oefening 7 – 5: Vergelyking van ’n raaklyn aan ’n kurwe

1. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kurwe gedefinieer deur $F(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$ by $x = 2$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Gradiënt van raaklyn } &= F'(x) \\
F'(x) &= 3x^2 + 4x - 7 \\
F'(2) &= 3(2)^2 + (4)(2) - 7 \\
&= 13 \\
\therefore \text{Raaklyn: } y &= 13x + c
\end{aligned}$$

waar c die y-afsnit is.
Raaklyn ontmoet $F(x)$ by $(2; F(2))$

$$\begin{aligned}
F(2) &= (2)^3 + 2(2)^2 - 7(2) + 1 \\
&= 8 + 8 - 14 + 1 \\
&= 3 \\
\text{Raaklyn: } 3 &= 13(2) + c \\
\therefore c &= -23 \\
y &= 13x - 23
\end{aligned}$$

2. Bepaal die punt waar die gradiënt van die raaklyn aan die kurwe.

a) $f(x) = 1 - 3x^2$ gelyk is aan 5.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Gradiënt van raaklyn } &= f'(x) = -6x \\
\therefore -6x &= 5 \\
\therefore x &= -\frac{5}{6} \\
\text{En } f\left(-\frac{5}{6}\right) &= 1 - 3\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \\
&= 1 - 3\left(\frac{25}{36}\right) \\
&= 1 - \frac{25}{12} \\
&= -\frac{13}{12} \\
\therefore &\left(-\frac{5}{6}; -\frac{13}{12}\right)
\end{aligned}$$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$ gelyk is aan 0.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Gradiënt van raaklyn } &= g'(x) = \frac{2}{3}x + 2 \\
\therefore \frac{2}{3}x + 2 &= 0 \\
\frac{2}{3}x &= -2 \\
\therefore x &= -2 \times \frac{3}{2} \\
&= -3 \\
\text{En } g(-3) &= \frac{1}{3}(-3)^2 + 2(-3) + 1 \\
&= \frac{1}{3}(9) - 6 + 1 \\
&= 3 - 6 + 1 \\
&= -2 \\
\therefore &(-3; -2)
\end{aligned}$$

3. Bereken die punt(e) op die kurwe $f(x) = (2x - 1)^2$ waar die raaklyn

a) ewewydig is aan die lyn $y = 4x - 2$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Gradiënt van raaklyn } &= f'(x) \\
f(x) &= (2x - 1)^2 \\
&= 4x^2 - 4x + 1 \\
\therefore f'(x) &= 8x - 4 \\
\text{Raaklyn is ewewydig aan } y &= 4x - 2 \\
\therefore m &= 4 \\
\therefore f'(x) = 8x - 4 &= 4 \\
8x &= 8 \\
x &= 1 \\
\text{Vir } x = 1: \quad y &= (2(1) - 1)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Dus is die raaklyn ewewydig aan die gegewe lyn by die punt $(1; 1)$.

b) loodreg is op die lyn $2y + x - 4 = 0$.
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Loodreg op } 2y + x - 4 &= 0 \\
y &= -\frac{1}{2}x + 2 \\
\therefore \text{ gradiënt van } \perp \text{ lyn } &= 2 \quad (m_1 \times m_2 = -1) \\
\therefore f'(x) &= 8x - 4 \\
\therefore 8x - 4 &= 2 \\
8x &= 6 \\
x &= \frac{3}{4} \\
\therefore y &= \left[2\left(\frac{3}{4}\right) - 1\right]^2 \\
&= \frac{1}{4} \\
\therefore \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

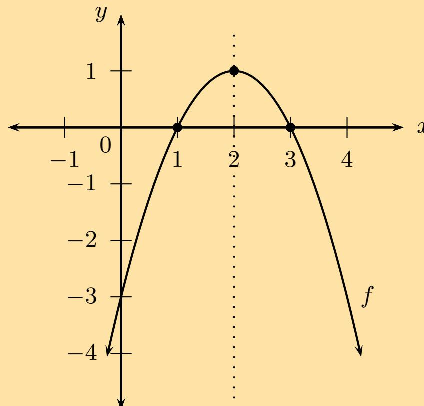
Dus is die raaklyn loodreg op die gegewe lyn by die punt $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

4. Die funksie f: $y = -x^2 + 4x - 3$ word gegee.

a) Trek 'n grafiek van f, en toon duidelik alle afsnitte en draaipunte aan.
Oplossing:
Voltooi die vierkant:

$$\begin{aligned}
y &= -[x^2 - 4x + 3] \\
&= -[(x - 2)^2 - 4 + 3] \\
&= -(x - 2)^2 + 1 \\
\text{Draaipunt :} &(2; 1)
\end{aligned}$$

Afsnitte:
$y_{\text{af}} : x = 0, y = -3$
$x_{\text{af}} : y = 0,$
$-x^2 + 4x - 3 = 0$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
$(x - 3)(x - 1) = 0$
$x = 3$ of $x = 1$
Vorm: "frons" $(a < 0)$



b) Bepaal die vergelykings van die raaklyne aan f by:
i. die y-afsnit van f.
ii. die draaipunt van f.

iii. die punt waar $x = 4{,}25$.

Oplossing:

i.

$$\begin{aligned} y_{\text{af}} &: (0; -3) \\ m_{\text{raaklyn}} &= f'(x) = -2x + 4 \\ f'(0) &= -2(0) + 4 \\ \therefore m &= 4 \\ \text{Raaklyn } y &= 4x + c \\ \text{Deur } (0; -3) &\therefore y = 4x - 3 \end{aligned}$$

ii.

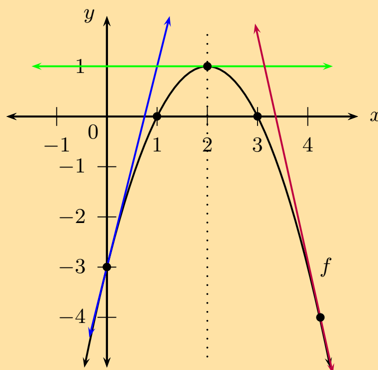
$$\begin{aligned} \text{Draaipunt: } &(2; 1) \\ m_{\text{raaklyn}} &= f'(2) = -2(2) + 4 \\ &= 0 \\ \text{Raaklyn vergelyking: } &y = 1 \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} \text{As } x &= 4{,}25 \\ f(4{,}25) &= -4{,}25^2 + 4(4{,}25) - 3 \\ &= -4{,}0625 \\ m_{\text{raaklyn}} \text{ at } x &= 4{,}25 \\ m &= -2(4{,}25) + 4 \\ &= -4{,}5 \\ \text{Raaklyn } y &= -4{,}5x + c \\ \text{Deur } (4{,}25; -4{,}0625) & \\ -4{,}0625 &= -4{,}5(4{,}25) + c \\ \therefore c &= 15{,}0625 \\ y &= -4{,}5x + 15{,}0625 \end{aligned}$$

c) Trek die drie raaklyne op jou grafiek van f.

Oplossing:



d) Skryf al jou waarnemings omtrent hierdie drie raaklyne aan f neer.

Oplossing:

Raaklyn by y_{af} (blou lyn): gradiënt is positief, die funksie is stygend by hierdie punt.

Raaklyn by draaipunt (groen lyn): gradiënt is gelyk aan nul, raaklyn is horisontaal, ewewydig aan x-as.

Raaklyn by $x = 4{,}25$ (pers lyn): gradiënt is negatief, die funksie is dalend by hierdie punt.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BCT 2a. 2BCV 2b. 2BCW 3. 2BCX 4. 2BCY

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 7 – 6: Tweede afgeleide

1. Bereken die tweede afgeleide vir elk van die volgende:

a) $g(x) = 5x^2$

Oplossing:

$$g'(x) = 10x$$
$$g''(x) = 10$$

b) $y = 8x^3 - 7x$

Oplossing:

$$\frac{dy}{dx} = 24x^2 - 7$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 48x$$

c) $f(x) = x(x-6) + 10$

Oplossing:

$$f(x) = x^2 - 6x + 10$$
$$f'(x) = 2x - 6$$
$$f''(x) = 2$$

d) $y = x^5 - x^3 + x - 1$

Oplossing:

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 3x^2 + 1$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 6x$$

e) $k(x) = (x^2+1)(x-1)$

Oplossing:

$$k(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$
$$k'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$
$$k''(x) = 6x - 2$$

f) $p(x) = -\frac{10}{x^2}$

Oplossing:

$$p(x) = -10x^{-2}$$
$$p'(x) = 20x^{-3} = \frac{20}{x^3}$$
$$p''(x) = -60x^{-4} = \frac{-60}{x^4}$$

g) $q(x) = \sqrt{x} + 5x^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} q(x) &= x^{\frac{1}{2}} + 5x^2 \\ q'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 10x \\ q''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + 10 \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} + 10 \end{aligned}$$

2. Bepaal die eerste en tweede afgeleides van $f(x) = 5x(2x+3)$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= 10x^2 + 15x \\ f'(x) &= 20x + 15 \\ f''(x) &= 20 \end{aligned}$$

3. Bepaal $\frac{d^2}{dx^2}\left[6\sqrt[3]{x^2}\right]$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= 6\sqrt[3]{x^2} \\ &= 6x^{\frac{2}{3}} \\ \frac{dy}{dx} &= 6\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1} \\ &= 4x^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 4\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} \\ &= -\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}} \\ &= -\frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}} \end{aligned}$$

4. Die funksie $g: \quad y = (1-2x)^3$ word gegee.

   a) Bepaal g' en g''.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} g(x) &= (1-2x)^3 \\ &= (1-2x)(1-2x)^2 \\ &= (1-2x)(1-4x+4x^2) \\ &= 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3 \\ g'(x) &= -6 + 24x - 24x^2 \\ g''(x) &= 24 - 48x \end{aligned}$$

   b) Watter tipe funksie is:

      i. g'
      ii. g''

   Oplossing:

      i. $g'(x) = -6 + 24x - 24x^2$ (kwadratiese funksie)

      ii. $g''(x) = 24 - 48x$ (lineêre funksie)

c) Bepaal die waarde van $g''\left(\frac{1}{2}\right)$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} g''\left(\frac{1}{2}\right) &= 24 - 48\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 24 - 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d) Wat let jy op omtrent die graad (hoogste mag) van elk van die afgeleide funksies?
Oplossing:
Elke afgeleide funksie is een graad laer as die vorige een.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BCZ 1b. 2BD2 1c. 2BD3 1d. 2BD4 1e. 2BD5 1f. 2BD6
1g. 2BD7 2. 2BD8 3. 2BD9 4. 2BDB

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

7.6 Skets van grafieke

Funksies van die vorm $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Afsnitte

Oefening 7 – 7: Afsnitte

1. Die funksie $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ word gegee.

a) Bepaal die x- en y-afsnitte van $f(x)$.
Oplossing:
Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= (0)^3 + (0)^2 - 10(0) + 8 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 8)$.
Ons gebruik die faktorstelling om 'n faktor van $f(x)$ te bepaal deur probeer en tref:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 10x + 8 \\ f(1) &= (1)^3 + (1)^2 - 10(1) + 8 \\ &= 0 \\ \therefore (x-1) &\text{ is 'n faktor van } f(x) \end{aligned}$$

Faktoriseer verder deur inspeksie:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x^2 + 2x - 8) \\ &= (x-1)(x-2)(x+4) \end{aligned}$$

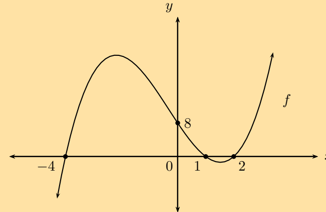
Vir die x-afsnit, stel $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= (x-1)(x-2)(x+4) \\ \therefore x &= 1, x = 2 \text{ of } x = -4 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $(-4; 0)$, $(1; 0)$ en $(2; 0)$.

b) Trek 'n ruwe skets van die grafiek.

Oplossing:



c) Is die funksie stygend of dalend by $x = -5$?

Oplossing:

Stygend

2. Bepaal die x- en y-afsnitte vir elk van die volgende:

a) $y = -x^3 - 5x^2 + 9x + 45$

Oplossing:

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= -(0)^3 - 5(0)^2 + 9(0) + 45 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 45)$.

Ons gebruik die faktorstelling om 'n faktor te vind deur probeer en tref:

$$\begin{aligned} \text{Laat } f(x) &= -x^3 - 5x^2 + 9x + 45 \\ f(3) &= -(3)^3 - 5(3)^2 + 9(3) + 45 \\ &= 0 \\ \therefore (x-3) & \text{ is 'n faktor van } f(x) \end{aligned}$$

Faktoriseer verder deur inspeksie:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)(-x^2 - 8x - 15) \\ &= -(x-3)(x^2 + 8x + 15) \\ &= -(x-3)(x+3)(x+5) \end{aligned}$$

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -(x-3)(x+3)(x+5) \\ \therefore x &= 3, x = -3 \text{ of } x = -5 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $(-5; 0)$, $(-3; 0)$ en $(3; 0)$.

b) $y = x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$

Oplossing:

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= (0)^3 - \frac{5}{4}(0)^2 - \frac{7}{4}(0) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; \frac{1}{2})$.
Ons gebruik die faktorstelling om 'n faktor te vind deur probeer en tref:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } f(x) &= x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{1}{2} \\
f(-1) &= (-1)^3 - \frac{5}{4}(-1)^2 - \frac{7}{4}(-1) + \frac{1}{2} \\
&= -1 - \frac{5}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{4}{4} - \frac{5}{4} + \frac{7}{4} + \frac{2}{4} \\
&= 0 \\
\therefore (x+1) &\text{ is 'n faktor van } f(x)
\end{aligned}$$

Faktoriseer verder deur inspeksie:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)(x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}) \\
&= (x+1)(x-2)\left(x - \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= (x+1)(x-2)\left(x - \frac{1}{4}\right) \\
\therefore x = -1, x = 2 \text{ of } x &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Dit gee die punte $(-1; 0)$, $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$, $(2; 0)$ en $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

c) $y = x^3 - x^2 - 12x + 12$

Oplossing:

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned}
y &= (0)^3 - (0)^2 - 12(0) + 12 \\
&= 12
\end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 12)$.
Ons gebruik die faktorstelling om 'n faktor te vind deur probeer en tref:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } f(x) &= x^3 - x^2 - 12x + 12 \\
f(1) &= (1)^3 - (1)^2 - 12(1) + 12 \\
&= 0 \\
\therefore (x-1) &\text{ is 'n faktor van } f(x)
\end{aligned}$$

Faktoriseer verder deur inspeksie:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)(x^2 - 12) \\
&= (x-1)(x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12})
\end{aligned}$$

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= (x-1)(x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12}) \\
\therefore x = 1, x = \sqrt{12} \text{ of } x &= -\sqrt{12}
\end{aligned}$$

Dit gee die punte $(1; 0)$, $(\sqrt{12}; 0)$ en $(-\sqrt{12}; 0)$.

d) $y = x^3 - 16x$

Oplossing:

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= (0)^3 - 16(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 0)$.

Ons haal 'n gemene faktor van x uit en faktoriseer dan die verskil tussen vierkante:

$$\begin{aligned} y &= x(x^2 - 16) \\ &= x(x-4)(x+4) \end{aligned}$$

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= x(x-4)(x+4) \\ \therefore x &= 0, x = 4 \text{ of } x = -4 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $(0; 0)$, $(-4; 0)$ en $(4; 0)$.

e) $y = x^3 - 5x^2 + 6$

Oplossing:

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= (0)^3 - 5(0)^2 + 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 6)$.

Ons gebruik die faktorstelling om 'n faktor te vind deur probeer en tref:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 5x^2 + 6 \\ f(-1) &= (-1)^3 - 5(-1)^2 + 6 \\ &= -1 - 5 + 6 \\ &= 0 \\ \therefore (x+1) &\text{ is 'n faktor van } f(x) \end{aligned}$$

Faktoriseer verder deur inspeksie:

$$f(x) = (x+1)(x^2 - 6x + 6)$$

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= (x+1)(x^2 - 6x + 6) \\ \therefore x = -1, \text{ of } x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} \\ &= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 3 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Dit gee die punte $(-1; 0)$, $(3 - \sqrt{3}; 0)$ en $(3 + \sqrt{3}; 0)$.

3. Bepaal alle afsnitte van $g(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ en trek 'n ruwe skets van die grafiek.

Oplossing:

Vir die y-afsnit, stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= (0)^3 + 3(0)^2 - 10(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

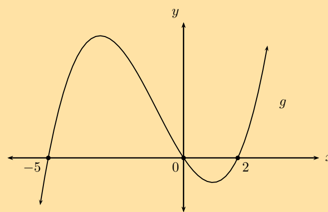
Dit gee die punt $(0; 0)$.

$$\begin{aligned} y &= x^3 + 3x^2 - 10x \\ &= x(x^2 + 3x - 10) \\ &= x(x + 5)(x - 2) \end{aligned}$$

Vir die x-afsnit, stel $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= x(x + 5)(x - 2) \\ \therefore x = 0, x &= -5 \text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $(0; 0)$, $(-5; 0)$ en $(2; 0)$.



Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BDC   2a. 2BDD   2b. 2BDF   2c. 2BDG   2d. 2BDH   2e. 2BDJ
3. 2BDK

 www.everythingmaths.co.za    m.everythingmaths.co.za

Stasionêre punte

Oefening 7 – 8: Stasionêre punte

1. Gebruik differensiasie om die stasionêre punt(e) van $g(x) = -x^2 + 5x - 6$ te bepaal.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -x^2 + 5x - 6 \\
g'(x) &= -2x + 5 \\
\text{Stasionêre punt: } y' &= 0 \\
-2x + 5 &= 0 \\
-2x &= -5 \\
x &= 2{,}5 \\
\text{Vervang } x &= 2{,}5 \\
\therefore y &= -(2{,}5)^2 + 5(2{,}5) - 6 \\
&= -6{,}25 + 12{,}5 - 6 \\
&= 0{,}25 \\
\therefore \text{ Stasionêre punt } &\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}
$$

2. Bereken die x-waardes van die stasionêre punte van $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 5$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 5 \\
f'(x) &= -x^2 + x + 6 \\
\text{Stasionêre punt: } y' &= 0 \\
-x^2 + x + 6 &= 0 \\
x^2 - x - 6 &= 0 \\
(x+2)(x-3) &= 0 \\
\therefore x &= -2 \text{ of } x = 3
\end{aligned}
$$

3. Bepaal die koördinate van die stasionêre punte van die volgende funksies deur differensiasiereëls te gebruik.

   a) $y = (x-1)^3$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= (x-1)^3 \\
y &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
y' &= 3x^2 - 6x + 3 \\
\text{Stasionêre punt: } y' &= 0 \\
3(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\
(x-1)^2 &= 0 \\
\therefore x &= 1 \\
\text{Vervang } x &= 1 \\
y &= (1-1)^3 = 0 \\
\therefore \text{ Stasionêre punt } &(1; 0)
\end{aligned}
$$

   b) $y = x^3 - 5x^2 + 1$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= x^3 - 5x^2 + 1 \\
y' &= 3x^2 - 10x \\
\text{Stasionêre punt: } y' &= 0 \\
3x^2 - 10x &= 0 \\
x(3x - 10) &= 0 \\
\therefore x &= 0, x = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

$$\text{Vervang } x = 0$$
$$y = (0)^3 - 5(0)^2 + 1 = 1$$
$$\therefore \text{ Stasionêre punt } (0; 1)$$
$$\text{Vervang } x = \frac{10}{3}$$
$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 1 \\ &= \frac{1000}{27} - \frac{500}{9} + 1 \\ &= -\frac{473}{27} \end{aligned}$$
$$\therefore \text{ Stasionêre punt } \left(\frac{10}{3}; -\frac{473}{27}\right)$$

c) $y + 7x = 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= -7x + 1 \\ y' &= -7 \end{aligned}$$

Dit is 'n reguitlyn met 'n konstante gradiënt, dus is daar geen stasionêre punte nie.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BDM 2. 2BDN 3a. 2BDP 3b. 2BDQ 3c. 2BDR

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Skets van kubiese grafieke

Oefening 7 – 9: Konkawiteit en infleksiepunte

Voltooi die volgende vir elke funksie:

- Bepaal en bespreek die verandering in gradiënt van die funksie.
- Bepaal die konkawiteit van die grafiek.
- Bepaal die infleksiepunt.
- Teken 'n sketsgrafiek.

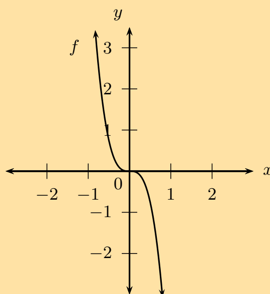
1. $f : y = -2x^3$

   Oplossing:

   a) Gradiënt: $f'(x) = -6x^2$
   $f'(x) < 0$ vir $x < 0$: funksie neem af
   $f'(x) = 0$ vir $x = 0$: funksie stasionêr
   $f'(x) > 0$ vir $x > 0$: funksie neem toe

   b) Konkawiteit: $f''(x) = -12x$
   $f''(x) > 0$ vir $x < 0$: konkaaf op
   $f''(x) = 0$ vir $x = 0$: infleksiepunt
   $f''(x) < 0$ vir $x > 0$: konkaaf af

   c) Infleksiepunt: $(0; 0)$



2. $g(x) = \frac{1}{8}x^3 + 1$

Oplossing:

$g(x) = y = \frac{1}{8}x^3 + 1$

a) Gradiënt: $g'(x) = \frac{3}{8}x^2$
   Gradiënt altyd > 0 (aangesien $\frac{3}{8}x^2 \geq 0$) vir alle x behalwe $x = 0$ waar die gradiënt 0 sal wees.

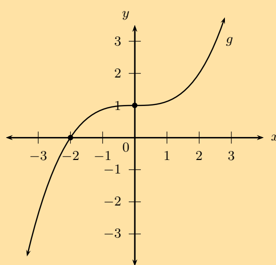
b) Konkawiteit: $g''(x) = \frac{3}{4}x$
   $g''(x) < 0$ vir $x < 0$: konkaaf af
   $g''(x) = 0$ vir $x = 0$: infleksiepunt
   $g''(x) > 0$ vir $x > 0$: konkaaf op

c) Infleksiepunt: $(0; 1)$

Afsnitte:

$$\begin{aligned} y_{\text{af}}: &\text{ laat } x = 0 \\ &\therefore y = 1 \\ &\therefore (0; 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{af}}: &\text{ laat } y = 0 \\ \frac{1}{8}x^3 + 1 &= 0 \\ x^3 &= -8 \\ x &= -2 \\ \therefore x_{\text{af}}&(-2; 0) \end{aligned}$$



3. $h : x \rightarrow (x-2)^3$

Oplossing:

$h(x) = (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

a) Gradiënt:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3x^2 - 12x + 12 \\ &= 3(x^2 - 4x + 4) \\ &= 3(x-2)^2 \end{aligned}$$

   Gradiënt altyd > 0 vir alle x behalwe $x = 2$ waar die gradiënt 0 sal wees.
   Stasionêre punt: $(2; 0)$

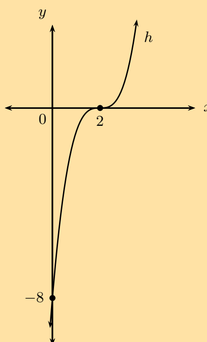
b) Konkawiteit: $h''(x) = 6x - 12$
$h''(x) < 0$ vir $x < 2$: konkaaf af
$h''(x) = 0$ vir $x = 2$: infleksiepunt
$h''(x) > 0$ vir $x > 2$: konkaaf op

c) Infleksiepunt: $(2; 0)$

Afsnitte:

$y_{\text{af}} : (0; -8)$

$x_{\text{af}} : (2; 0)$



Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BDS 2. 2BDT 3. 2BDV

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 7 – 10: Gemengde oefeninge oor kubiese grafieke

1. Gegee $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

   a) Toon aan dat $(x - 1)$ 'n faktor is van $f(x)$ en faktoriseer gevolglik $f(x)$.
   Oplossing:
   Stel eers $x = 1$ in om vas te stel of $(x - 1)$ 'n faktor is:

$$\begin{aligned} f(1) &= (1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 3 \\ &= 1 + 1 - 5 + 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Dus is $(x - 1)$ 'n faktor van $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)(x^2 + 2x - 3) \\ &= (x - 1)(x + 3)(x - 1) \end{aligned}$$

   b) Bepaal die koördinate van die afsnitte en die draaipunte.
   Oplossing:
   Vir die y-afsnit, stel $x = 0$: $f(0) = 0^3 + 0^2 - 5(0) + 3 = 3$, wat die punt $(0; 3)$ gee.
   Vir die x-afsnit, stel $f(x) = 0$:

$$0 = (x - 1)(x + 3)(x - 1)$$

   Dus, die x-afsnitte is: $(1; 0)$ en $(-3; 0)$.

Bepaal die draaipunte:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 + 2x - 5 \\
0 &= 3x^2 + 2x - 5 \\
0 &= (3x+5)(x-1) \\
\therefore x &= -\frac{5}{3} \text{ of } x = 1
\end{aligned}$$

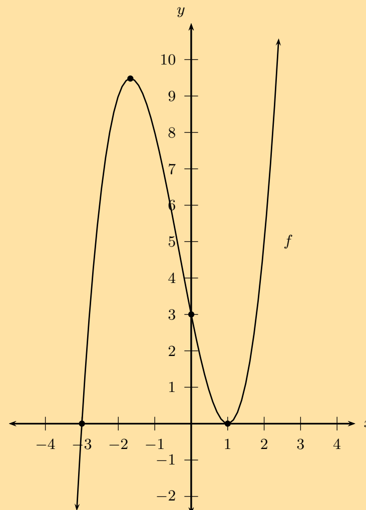
Om die y-waardes te bepaal, stel ons hierdie twee waardes vir x in die oorspronklike vergelyking in. Ons weet alreeds dat wanneer $x = 1$, $y = 0$. Deur die ander waardes in te stel kry ons:

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{5}{3}\right) &= \left(-\frac{5}{3}\right)^3 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{5}{3}\right) + 3 \\
&= \frac{256}{27}
\end{aligned}$$

Dus is die draaipunte: $(1;0)$ en $\left(-\frac{5}{3}; \frac{256}{27}\right)$

c) Skets die grafiek.

Oplossing:



2. a) Skets die grafiek van $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 11x - 30$. Toon al die draaipunte en afsnitte met die asse aan.

Oplossing:

Ons bepaal die y-afsnit deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^3 + 4x^2 + 11x - 30 \\
f(0) &= -(0)^3 + 4(0)^2 + 11(0) - 30 \\
&= -30
\end{aligned}$$

Die y-afsnit is: $(0; -30)$

Ons bepaal die x-afsnitte deur $f(x) = 0$ te stel.

Ons gebruik die faktorstelling om vas te stel of $(x-1)$ 'n faktor is.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^3 + 4x^2 + 11x - 30 \\
f(1) &= -(1)^3 + 4(1)^2 + 11(1) - 30 \\
&= -16
\end{aligned}$$

Dus, $(x-1)$ is nie 'n faktor nie.

Ons gebruik nou die faktorstelling om vas te stel of $(x+1)$ 'n faktor is.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 4x^2 + 11x - 30 \\ f(-1) &= -(-1)^3 + 4(-1)^2 + 11(-1) - 30 \\ &= -36 \end{aligned}$$

Dus, $(x+1)$ is nie 'n faktor nie.
Nou probeer ons $(x-2)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 4x^2 + 11x - 30 \\ f(2) &= -(2)^3 + 4(2)^2 + 11(2) - 30 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dus, $(x-2)$ is 'n faktor.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)(-x^2 + 2x + 15) \\ &= -(x-2)(x^2 - 2x - 15) \\ &= -(x-2)(x+3)(x-5) \end{aligned}$$

Die x-afsnitte is: $(2;0), (-3;0), (5;0)$.
Vir die draaipunte, stel $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 8x + 11 \\ &= -(3x^2 - 8x - 11) \\ \therefore 0 &= (3x-11)(x+1) \end{aligned}$$

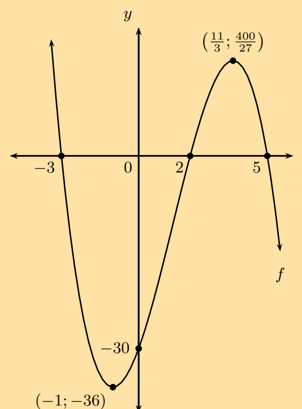
Die x-koördinate van die draaipunte is: $x = -1$ en $x = \frac{11}{3}$.
Die y-koördinate van die draaipunte word as volg bereken:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -(-1)^3 + 4(-1)^2 + 11(-1) - 30 \\ &= -36 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} f(\frac{11}{3}) &= -\left(\frac{11}{3}\right)^3 + 4\left(\frac{11}{3}\right)^2 + 11\left(\frac{11}{3}\right) - 30 \\ &= \frac{400}{3} \end{aligned}$$

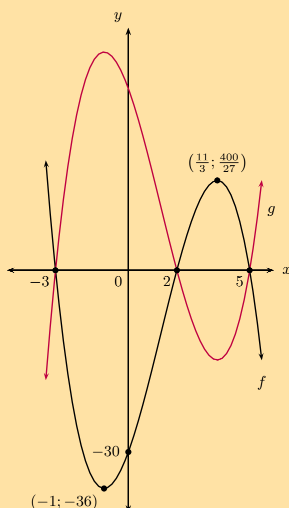
Dus, die draaipunte is: $(-1;-36)$ en $(\frac{11}{3};\frac{400}{27})$.



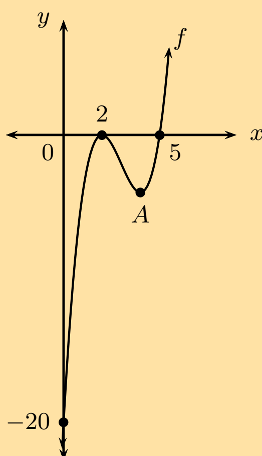
b) Gegee $g(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$, skets die grafiek van g sonder enige verdere berekenings. Beskryf die metode wat jy gebruik om die grafiek te teken.

Oplossing:

Dit is die spieëlbeeld van f in die x-as. Met ander woorde, ons reflekteer die grafiek van f om die x-as.



3. Gegee is 'n sketsgrafiek van die kubiese funksie, f, met 'n draaipunt by $(2;0)$, en wat deur $(5;0)$ en $(0;-20)$ gaan.



a) Bepaal die vergelyking van f.

Oplossing:

x-afsnitte is $(2;0)$, $(2;0)$ en $(5;0)$.

$$\begin{aligned}
\therefore \text{ Verg. van } f: \quad y &= a(x-2)^2(x-5) \\
&= a(x^2 - 4x + 4)(x-5) \\
&= a(x^3 - 9x^2 + 24x - 20) \\
&= ax^3 - 9ax^2 + 24ax - 20a
\end{aligned}$$

Van die grafiek, y_{af} is $(0;20)$.

$$\begin{aligned}
\therefore -20a &= -20 \\
a &= 1 \\
\therefore f: \quad y &= x^3 - 9x^2 + 24x - 20
\end{aligned}$$

b) Bereken die koördinate van draaipunt A.

Oplossing:
Die draaipunte is waar $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$
$$3x^2 - 18x + 24 = 0$$
$$(3x - 12)(x - 2) = 0$$
$$\therefore 3x - 12 = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$
$$\therefore x = 4 \text{ of } x = 2$$
$$\therefore \text{ Punt } A \text{ is } (4; y)$$

Stel $x = 4$ in die vergelyking van f in om die ooreenstemmende y-waarde te bepaal:

$$y = (4)^3 - (9)(4)^2 + 24(4) - 20$$
$$= 64 - 144 + 96 - 20$$
$$= -4$$
$$\therefore \text{ Punt } A \text{ is } (4; -4)$$

4. a) Bepaal die afsnitte en stasionêre punt(e) van $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2$ en skets die grafiek.
Oplossing:

$$y_{\text{af}}: \text{ Laat } x = 0$$
$$\therefore y = -\frac{1}{3}(0)^3 + 2$$
$$y = 2$$

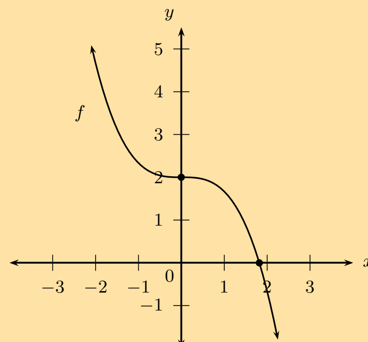
Dit gee die punt $(0; 2)$.

$$x_{\text{af}}: \text{ Laat } y = 0$$
$$-\frac{1}{3}x^3 + 2 = 0$$
$$-\frac{1}{3}x^3 = -2$$
$$x^3 = 6$$
$$x = \sqrt[3]{6}$$

Dit gee die punt $\left(\sqrt[3]{6}; 0\right)$.

$$\text{Stasionêre punte waar } f'(x) = 0$$
$$f'(x) = -x^2$$
$$-x^2 = 0$$
$$\therefore x = 0$$
$$\text{Vervang in } f \therefore y = -\frac{1}{3}(0)^2 + 2$$
$$y = 2$$

Daar is slegs een stasionêre punt by $(0; 2)$. Van $f'(x) = -x^2$, lei ons af dat die gradiënt van die funksie altyd negatief is, dus is dit 'n infleksiepunt.



b) Vir watter waardes van x sal:

i. $f(x) < 0$
ii. $f'(x) < 0$
iii. $f''(x) < 0$

Motiveer elke antwoord.

Oplossing:

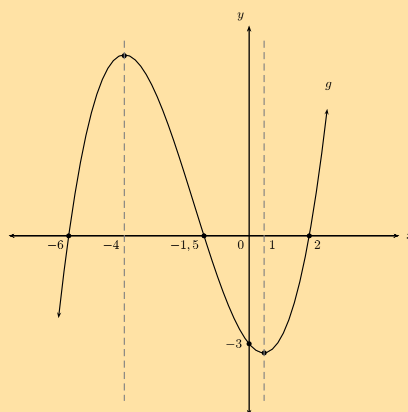
i. Vir $f(x) < 0$, is die funksiewaardes negatief en dit is waar vir $x > \sqrt[3]{6}$.
ii. Vir $f'(x) < 0$, is die gradiënt van $f(x)$ negatief, dus $f'(x) < 0$, en dit is waar vir $x \in R$, $x \neq 0$.
iii. $f''(x) < 0$ waar $f(x)$ konkaaf af is en dit is waar vir $x > 0$.

5. Gebruik onderstaande informasie om 'n grafiek van elke kubiese funksie te teken (moenie die vergelykings van die funksies bepaal nie).

a)

$$g(-6) = g(-1{,}5) = g(2) = 0$$
$$g'(-4) = g'(1) = 0$$
$$g'(x) > 0 \text{ vir } x < -4 \text{ of } x > 1$$
$$g'(x) < 0 \text{ vir } -4 < x < 1$$

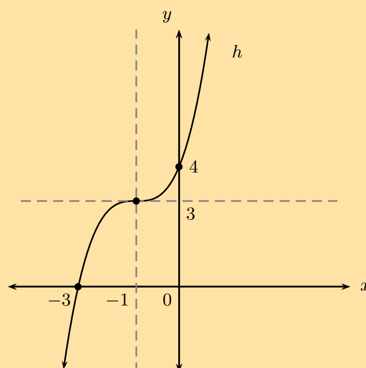
Oplossing:



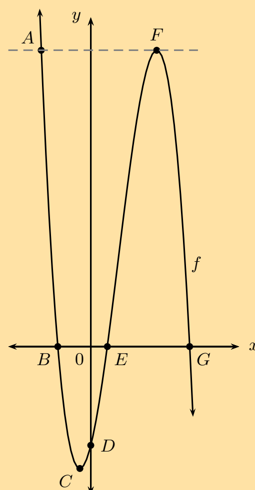
b)

$$h(-3) = 0$$
$$h(0) = 4$$
$$h(-1) = 3$$
$$h'(-1) = 0$$
$$h''(-1) = 0$$
$$h'(x) > 0 \text{ vir alle } x \text{ waardes behalwe } x = -1$$

Oplossing:



6. Onderstaande diagram is 'n sketsgrafiek van $f(x) = -(x+2)(x-1)(x-6)$ met draaipunte by C en F. AF is parallel aan die x-as.



Bepaal die volgende:

a) lengte OB

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Vind } x_{\text{af}} \text{ van } f\text{: laat } y &= 0 \\ \therefore -(x+2)(x-1)(x-6) &= 0 \\ x = -2\ (B),\ \ x = 1\ \ (E),\ \ x &= 6\ \ (G) \\ \therefore OB &= 2 \text{ eenhede} \quad \text{(lengte is altyd positief)}\end{aligned}$$

b) lengte OE

Oplossing:

$OE = 1$ eenheid

c) lengte EG

Oplossing:

$EG = 6 - 1 = 5$ eenhede

d) lengte OD

Oplossing:

Bepaal y_{af} deur f in uitgebreide vorm te skryf:

$$\begin{aligned}y &= -(x+2)(x^2 - 7x + 6) \\ &= -(x^3 - 5x^2 - 8x + 12) \\ &= -x^3 + 5x^2 + 8x - 12 \\ \therefore OD &= 12 \text{ eenhede}\end{aligned}$$

e) koördinate van C en F

Oplossing:

C en F is die draaipunte.

Om die x-koördinate van C en F te bepaal, bepaal $f'(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= -3x^2 + 10x + 8 \\ \text{By draaipunte, } f'(x) &= 0 \\ \therefore -3x^2 + 10x + 8 &= 0 \\ 3x^2 - 10x - 8 &= 0 \\ (3x+2)(x-4) &= 0 \\ x = -\frac{2}{3} &\text{ of } x = 4\end{aligned}$$

Stel in, om die y-koördinate van die draaipunte te bereken:

$$\begin{aligned} x = -\frac{2}{3}: \quad y &= -\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 5\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 8\left(-\frac{2}{3}\right) - 12 \\ &= \frac{8}{27} + \frac{20}{9} - \frac{16}{3} - 12 \\ &= \frac{8 + 60 - 144 - 324}{27} \\ &= -\frac{400}{27} \\ &\approx -14{,}8 \\ \therefore C &= \left(-\frac{2}{3}; -\frac{400}{27}\right) \\ x = 4: \quad y &= -(4)^3 + 5(4)^2 + 8(4) - 12 \\ &= -64 + 80 + 32 - 12 \\ &= 36 \\ \therefore F &= (4; 36) \end{aligned}$$

f) lengte AF

Oplossing:

A het dieselfde y-koördinaat as F, $y = 36$. Dus is $-x^3 + 5x^2 + 8x - 12 = 36$ by F.
Los op vir x om die x-koördinaat van A te bepaal: $x^3 - 5x^2 - 8x + 48 = 0$.
Ons weet dat $x = 4$ is 'n oplossing van hierdie vergelyking, dus is $(x - 4)$ 'n faktor.

$$\begin{aligned} \therefore x^3 - 5x^2 - 8x + 48 &= (x - 4)(x^2 - x - 12) = 0 \\ \text{Los op } x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x - 4)(x + 3) &= 0 \\ \therefore x = 4, \quad x &= -3 \\ \therefore x\text{-koördinaat van } A \text{ is } &-3 \\ x\text{-koördinaat van } F \text{ is } &4 \\ \therefore AF = 7 \text{ eenhede} \end{aligned}$$

g) gemiddelde gradiënt tussen E en F

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Gemiddelde gradiënt} &= \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \\ &= \frac{36 - 0}{3} \\ &= 12 \end{aligned}$$

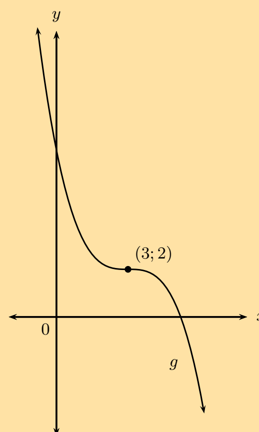
h) die vergelyking van die raaklyn aan die grafiek by E

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Gradiënt by } E &= f'(1) \\ f'(x) &= -3x^2 + 10x + 8 \\ f'(1) &= -3(1)^2 + 10(1) + 8 \\ &= 15 \\ \therefore y &= 15x + c \\ \text{Raaklyn gaan deur } (1; 0) & \\ \therefore 0 &= 15(1) + c \\ \therefore c &= -15 \end{aligned}$$

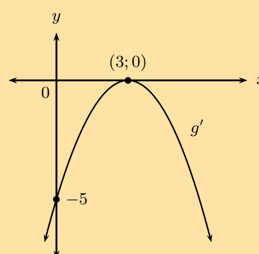
Dus, die vergelyking van die raaklyn is $y = 15x - 15$.

7. Gegee die grafiek van 'n kubiese funksie met die stasionêre punt $(3;2)$, skets die grafiek van die afgeleide funksie as dit ook gegee is dat die gradiënt van die funksie g gelyk is aan -5 by $x = 0$.



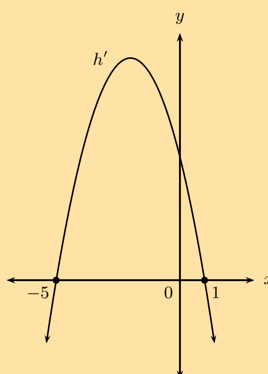
Oplossing:

Afgeleide sal van die tweede graad wees: parabool. Gradiënt van funksie is deurgaans negatief, behalwe by $(3;2)$, waar gradiënt $= 0$, $\therefore g'(3) = 0$. g' het 'n maksimum waarde van 0 waar $x = 3$. Dus $g'(0) = -5$.



8. Onderstaande diagram is 'n sketsgrafiek van $h'(x)$ met x-afsnitte by -5 en 1.

Teken 'n sketsgrafiek van $h(x)$ as $h(-5) = 2$ en $h(1) = 6$.

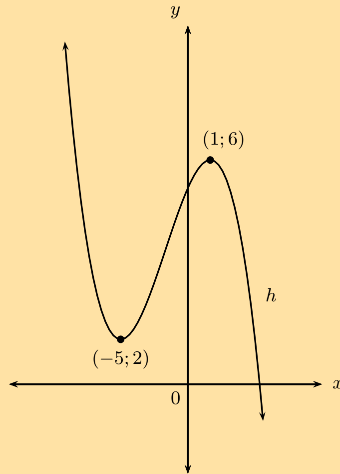


Oplossing:

$h(x)$ is 'n kubiese funksie want $h'(x)$ is 'n parabool. $h(x)$ het twee draaipunte want $h'(x)$ het twee x-afsnitte.

Die x-waardes van die draaipunte van $h(x)$ is die x-afsnitte van $h'(x)$, waar $h'(x) = 0$.

Dus sal $h(x)$ draaipunte hê by $(-5;2)$: minimum draaipunt (waar gradiënt van negatief na positief verander) en by $(1;6)$: maksimum draaipunt (waar gradiënt van positief na negatief verander).



Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BDX 2. 2BDY 3. 2BDZ 4. 2BF2 5a. 2BF3 5b. 2BF4
6. 2BF5 7. 2BF6 8. 2BF7

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

7.7 Toepassings van differensiële calculus

Optimeringsprobleme

Oefening 7 – 11: Oplossing van optimeringsprobleme

1. Die som van twee positiewe getalle is 20. Een van die twee getalle word vermenigvuldig met die kwadraat van die ander. Bepaal die twee getalle wat 'n maksimum produk gee.

   Oplossing:

   Gestel die eerste getal is x en die tweede getal y en die produk P. Ons formuleer die volgende twee vergelykings:

$$\begin{aligned} x + y &= 20 \\ xy^2 &= P \end{aligned}$$

   Herrangskikking van die eerste vergelyking en instelling in die tweede, gee:

$$\begin{aligned} P &= (20 - x)^2 x \\ &= 400x - 40x^2 + x^3 \end{aligned}$$

   Differensiëring en gelykstelling aan 0 gee:

$$\begin{aligned} P' &= 400 - 80x + 3x^2 \\ 0 &= 3x^2 - 80x + 400 \\ &= (3x - 20)(x - 20) \end{aligned}$$

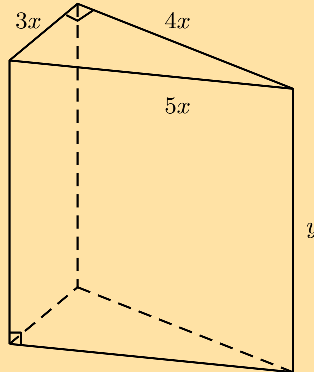
Dus, $x = 20$ of $x = \frac{20}{3}$.

As $x = 20$ dan is $y = 0$ en die produk is 'n minimum, nie 'n maksimum nie.

Dus, $x = \frac{20}{3}$ en $y = 20 - \frac{20}{3} = \frac{40}{3}$.

Dus is die twee getalle $\frac{20}{3}$ en $\frac{40}{3}$ (afgerond tot die naaste heelgetal gee 7 en 13).

2. 'n Houtblok word uitgesny soos aangetoon in die diagram. Die sykante is reghoekige driehoeke met sye $3x$, $4x$ en $5x$. Die lengte van die blok is y. Die totale buitevlak-area van die blok is 3600 cm^2.



a) Toon aan dat $y = \frac{300-x^2}{x}$.

Oplossing:

Ons begin deur die buitevlak-area van die prisma te bereken :

$$\begin{aligned} \text{Buitevlak-area} &= 2\left(\frac{1}{2}b \times h\right) + 3xy + 4xy + 5xy \\ 3600 &= (3x \times 4x) + 12xy \\ &= 12x^2 + 12xy \end{aligned}$$

Deur y op te los, verkry ons:

$$\begin{aligned} 12xy &= 3600 - 12x^2 \\ y &= \frac{3600 - 12x^2}{12x} \\ y &= \frac{300 - x^2}{x} \end{aligned}$$

b) Bepaal die waarde van x waarvoor die die blok 'n maksimum volume sal hê. (Volume = area van basis × hoogte)

Oplossing:

Begin deur 'n uitdrukking vir die volume in terme van x te kry:

$$\begin{aligned} V &= \text{ area van driehoek } \times y \\ V &= 6x^2 \times \frac{300 - x^2}{x} \\ &= 6x(300 - x^2) \\ &= 1800x - 6x^3 \end{aligned}$$

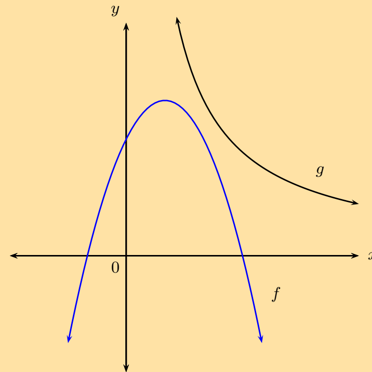
Bepaal nou die afgeleide en stel dit gelyk aan 0:

$$\begin{aligned} V' &= 1800 - 18x^2 \\ 0 &= 1800 - 18x^2 \\ 18x^2 &= 1800 \\ x^2 &= 100 \\ x &= \pm 10 \end{aligned}$$

Siende dat die lengte slegs positief kan wees, $x = 10$
$\therefore x = 10$ cm

3. Bepaal die kortste vertikale afstand tussen die krommes van f en g as dit gegee word dat:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$
$$\text{en } g(x) = \frac{8}{x}, \quad x > 0$$



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Afstand: } P(x) &= g(x) - f(x) \\
&= \frac{8}{x} - (-x^2 + 2x + 3) \\
&= \frac{8}{x} + x^2 - 2x - 3
\end{aligned}$$

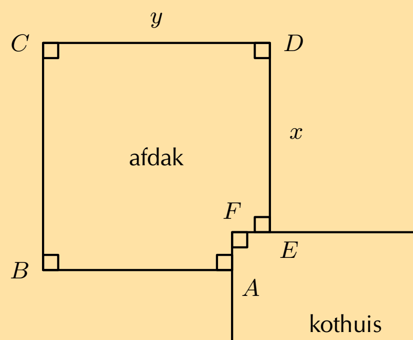
Om die afstand tussen die krommes te minimeer, stel $P'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
P'(x) &= -\frac{8}{x^2} + 2x - 2 \qquad (x \neq 0) \\
0 &= -\frac{8}{x^2} + 2x - 2 \\
\therefore 0 &= -8 + 2x^3 - 2x \\
0 &= 2x^3 - 2x - 8 \\
0 &= x^3 - x - 4 \\
0 &= (x - 2)(x^2 + x + 2) \\
\therefore x = 2 \text{ of } x &= \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\
&= \text{ geen reële oplossings} \\
\therefore x &= 2
\end{aligned}$$

Dus, die korste afstand is:

$$\begin{aligned}
P(2) &= \frac{8}{(2)} + (2)^2 - 2(2) - 3 \\
&= 4 + 4 - 4 - 3 \\
&= 1 \text{ eenheid}
\end{aligned}$$

4. Die diagram toon 'n sketsplan vir 'n afdak wat aan die hoek van 'n kothuis aangebou moet word. 'n Reling $ABCDE$ moet opgerig word rondom die vier rante van die afdak.



As $AB = DE = x$ en $BC = CD = y$ en die lengte van die reling moet 30 m wees, bepaal die waardes van x en y waarvoor die afdak 'n maksimum area sal hê.

Oplossing:

Ons moet 'n uitdrukking vir die area in terme van slegs een veranderlike bepaal.

Die omtrek is:

$$\begin{aligned} P &= 2x + 2y \\ 30 &= 2x + 2y \\ 15 &= x + y \\ y &= 15 - x \end{aligned}$$

Die area is:

$$\begin{aligned} A &= y^2 - (y - x)^2 \\ &= y^2 - (y^2 - 2xy + x^2) \\ &= y^2 - y^2 + 2xy - x^2 \\ &= 2xy - x^2 \end{aligned}$$

Ons gebruik die uitdrukking vir die omtrek om die y veranderlike te elimineer, sodat ons 'n uitdrukking vir die area slegs in terme van x het:

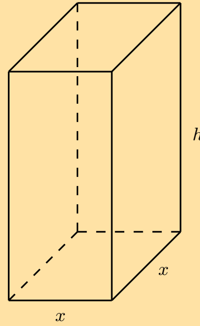
$$\begin{aligned} A(x) &= 2x(15 - x) - x^2 \\ &= 30x - 2x^2 - x^2 \\ &= 30x - 3x^2 \end{aligned}$$

Om die maksimum te bepaal, moet ons die afgeleide bepaal en dit gelyk aan 0 stel:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 30 - 6x \\ 0 &= 30 - 6x \\ 6x &= 30 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Dus, $x = 5$ m en deur instelling hiervan in die formule vir die omtrek, kry ons $y = 10$ m.

5. 'n Reghoekige saphouer, gemaak van karton, het 'n vierkantige basis en hou 750 cm^3 sap. Die houer het 'n spesiaal ontwerpte bokant wat toevou om die houer te sluit. Die karton wat gebruik word om die bokant van die houer toe te vou, is tweekeer soveel as die karton wat gebruik word vir die basis, wat slegs 'n enkellaag karton benodig.



a) As die lengte van die basis x cm is, toon aan dat die karton benodig vir die totale area van een houer, gegee word deur:

$$A \text{ (in vierkante sentimetres)} = \frac{3000}{x} + 3x^2$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} V &= x^2 h \\ 750 &= x^2 h \\ \therefore h &= \frac{750}{x^2} \\ A &= \text{ area van sye } + \text{ area van basis } + \text{ area van bokant} \\ &= 4xh + x^2 + 2x^2 \\ &= 4xh + 3x^2 \\ \text{Vervang } h &= \frac{750}{x^2}: \\ A &= 4x\left(\frac{750}{x^2}\right) + 3x^2 \\ &= \frac{3000}{x} + 3x^2 \end{aligned}$$

b) Bepaal die afmetings van die houer sodat die hoeveelheid (area) karton gebruik 'n minimum is.

Oplossing:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{3000}{x} + 3x^2 \\ A'(x) &= -\frac{3000}{x^2} + 6x \\ \therefore 0 &= -\frac{3000}{x^2} + 6x \\ 6x &= \frac{3000}{x^2} \\ x^3 &= 500 \\ \therefore x &= \sqrt[3]{500} \\ &\approx 7{,}9 \text{ cm} \\ \therefore h &= \frac{750}{(7{,}9)^2} \\ &\approx 12{,}0 \text{ cm} \end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BF8 2a. 2BF9 2b. 2BFB 3. 2BFC 4. 2BFD 5a. 2BFF 5b. 2BFG

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 7 – 12: Veranderingstempo

1. 'n Pomp is aan 'n waterreservoir gekoppel. Die volume van die water word gereguleer deur die pomp en word gegee deur die formule:

$$V(d) = 64 + 44d - 3d^2$$
$$\text{waar } V = \text{ volume in kilolitres}$$
$$d = \text{ dae}$$

a) Bepaal die veranderingstempo van die volume van die reservoir met betrekking tot tyd na 8 dae.
Oplossing:

$$\text{Veranderingstempo } = V'(d)$$
$$V'(d) = 44 - 6d$$
Na 8 dae is die veranderingstempo:
$$V'(8) = 44 - 6(8)$$
$$= -4 \text{ k}\ell \text{ per dag}$$

b) Neem die volume van die water toe of neem dit af aan die einde van 8 dae? Verduidelik jou antwoord.
Oplossing:
Die veranderingstempo is negatief, so die funksie neem af.

c) Na hoeveel dae sal die reservoir leeg wees?
Oplossing:

$$\text{Reservoir leeg: } V(d) = 0$$
$$\therefore 64 + 44d - 3d^2 = 0$$
$$(16 - d)(4 + 3d) = 0$$
$$\therefore d = 16 \text{ of } d = -\frac{4}{3}$$
$\therefore$ Dit sal leeg wees na 16 dae.

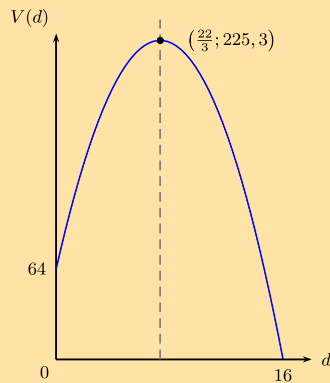
d) Wanneer sal die hoeveelheid water 'n minimum wees?
Oplossing:
Maksimum by draaipunt

$$\text{Draaipunte: } V'(d) = 0$$
$$\therefore 44 - 6d = 0$$
$$d = \frac{44}{6}$$
$$= 7\frac{1}{3} \text{ dae}$$

e) Bereken die maksimum volume.
Oplossing:
Maksimum by draaipunt

$$\text{Maksimum volume } = V\left(\frac{22}{3}\right)$$
$$V\left(\frac{22}{3}\right) = 64 + 44\left(\frac{22}{3}\right) - 3\left(\frac{22}{3}\right)^2$$
$$= 225{,}3 \text{ k}\ell$$

f) Teken 'n grafiek van $V(d)$.
Oplossing:



2. 'n Sokkerbal word vertikaal in die lug geskop en sy beweging word voorgestel deur die vergelyking:

$$D(t) = 1 + 18t - 3t^2$$
waar $D =$ afstand bo die grond (in meter)
$t =$ tyd verloop (in sekondes)

a) Bepaal die aanvanklike hoogte van die bal op die oomblik wat dit geskop word.
Oplossing:

$$\begin{aligned} D(t) &= 1 + 18t - 3t^2 \\ D(0) &= 1 + 18(0) - 3(0)^2 \\ &= 1 \text{ meter} \end{aligned}$$

b) Bepaal die aanvanklike hoogte van die bal.
Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Snelheid } &= D'(t) = 18 - 6t \\ \text{Aanvanklike sneldheid } &= D'(0) \\ D'(0) &= 18 - 6(0) = 18 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

c) Bepaal die snelheid van die bal na 1,5 s.
Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Snelheid na } 1{,}5 \text{ s} &= D'(1{,}5) \\ D'(1{,}5) &= 18 - 6(1{,}5)^2 \\ &= 18 - 9 \\ &= 9 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

d) Bereken die maksimum hoogte van die bal.
Oplossing:
Maksimum hoogte is by die draaipunt.

$$\begin{aligned} \text{Draaipunt: } D'(t) &= 0 \\ \therefore 18 - 6t &= 0 \\ 6t &= 18 \\ t &= 3 \text{ s} \\ \text{Maksimum hoogte } &= D(3) \\ &= 1 + (18)(3) - (3)(3)^2 \\ &= 28 \text{ m} \end{aligned}$$

e) Bepaal die versnelling van die bal na 1 sekonde en verduidelik die betekenis van die antwoord.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Versnelling } &= D''(t) \\ D''(t) &= -6 \text{ m.s}^{-2} \end{aligned}$$

Interpretasie: die snelheid neem af teen 6 meter per sekonde per sekonde.

f) Bereken die gemiddelde snelheid van die bal gedurende die derde sekonde.

Oplossing:

Gemiddelde snelheid gedurende die derde sekonde:

$$\begin{aligned} &= \frac{D(3) - D(2)}{3 - 2} \\ &= \frac{1 + 18(3) - 3(3)^2 - \left[1 + 18(2) - 3(2)^2\right]}{1} \\ &= 3 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

g) Bereken die snelheid van die bal na 3 sekondes en interpreteer die antwoord.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Oombliklike snelheid } &= D'(3) \\ &= 18 - 6(3) \\ &= 0 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

Interpretasie: dit is die stasionêre punt waar die afgeleide nul is. Die bal het opgehou om op te gaan en is besig om om te draai, sodat dit kan afkom.

h) Hoe lank sal dit neem voordat die bal die grond tref?

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Tref die grond: } D(t) &= 0 \\ -3t^2 + 18t + 1 &= 0 \\ t &= \frac{-18 \pm \sqrt{(18^2 - 4(1)(-3)}}{2(-3)} \\ t &= \frac{-18 \pm \sqrt{336}}{-6} \\ \therefore t &= -0{,}05 \text{ of } t = 6{,}05 \end{aligned}$$

Die bal tref die grond by $6{,}05$ s (tyd kan nie negatief wees nie).

i) Bepaal die snelheid waarteen die bal die grond tref.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Snelheid na } 6{,}05 \text{ s} &= D'(6{,}05) \\ D'(6{,}05) = 18 - 5(6{,}05) &= -18{,}3 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

3. As die verplasing s (in meter) van 'n partikel, in tyd t (in sekondes,) beskryf word deur die vergelyking $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$, bepaal sy versnelling na 2 sekondes.

Oplossing:

Ons weet dat snelheid die veranderingstempo van verplasing is. Dit beteken dat $\frac{dS}{dt} = v$:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}t^3 - 2t \\ v &= \frac{3}{2}t^2 - 2 \end{aligned}$$

Ons weet ook dat versnelling die veranderingstempo van snelheid is. Dit beteken dat $\frac{dv}{dt} = a$:

$$v = \frac{3}{2}t^2 - 2$$
$$a = 3t$$

Instelling van $t = 2$ gee $a = 6$ m.s^{-2}.

4. Gedurende 'n eksperiment verander die temperatuur T (in grade Celsius) met betrekking tot tyd t (in ure), volgens die formule: $T(t) = 30 + 4t - \frac{1}{2}t^2, \ \ t \in [1; 10]$.

   a) Bepaal 'n uitdrukking vir die veranderingstempo van temperatuur met betrekking tot tyd.

   Oplossing:

   Ons bepaal die veranderingstempo van temperatuur met betrekking tot tyd deur

$$T(t) = 30 + 4t - \frac{1}{2}t^2$$
$$T'(t) = 4 - t$$

   te differensieer:

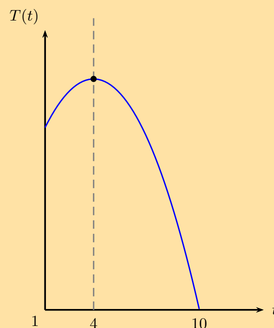
   b) Gedurende watter tydsinterval het die temperatuur gedaal?

   Oplossing:

   Ons stel die afgeleide gelyk aan 0:

$$0 = 4 - t$$
$$t = 4$$

   Ons kyk na die koëffisiënt van die t^2 term om te besluit of dit 'n minimum of maksimum punt is. Die koëffisiënt is negatief en daarom moet die funksie 'n maksimum waarde hê. Die interval waarbinne die temperatuur styg is $[1; 4)$. Die interval waarin die temperatuur daal is $(4; 10]$. Ons kan dit kontroleer deur die grafiek te teken of deur instelling van die waardes vir t in die oorspronklike vergelyking.



Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BFH 2a. 2BFJ 2b. 2BFK 2c. 2BFM 2d. 2BFN 2e. 2BFP
2f. 2BFQ 2g. 2BFR 2h. 2BFS 2i. 2BFT 3. 2BFV 4a. 2BFW
4b. 2BFX

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 7 – 13: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels as $f(x) = 2x - x^2$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x - x^2 \\
f(x+h) &= -(x+h)^2 + 2(x+h) \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)^2 + 2(x+h) - (-x^2 + 2x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-x^2 - 2xh - h^2 + 2x + 2h + x^2 - 2x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2 + 2h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x - h + 2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (-2x - h + 2) \\
&= -2x + 2
\end{aligned}$$

2. Gegee $f(x) = \frac{1}{x} + 3$, bepaal $f'(x)$ deur gebruik te maak van die definisie van die afgeleide.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{x+h} + 3\right) - \left(\frac{1}{x} + 3\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1+3(x+h)}{x+h} - \frac{1+3x}{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x(1+3x+3h) - (x+h)(1+3x)}{x(x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x(1+3x+3h) - (x+h)(1+3x)}{h \,.\, x(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x + 3x^2 + 3xh - x - 3x^2 - h - 3xh}{hx(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2 + xh} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

3. Bereken: $\lim_{x\to 1} \frac{1 - x^3}{1 - x}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x\to 1} (x^2 + x + 1) \\
&= 3
\end{aligned}$$

4. Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as:

a) $y=(x+2)(7-5x)$

Oplossing:

$$y = 14 - 3x - 5x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = -3 - 10x$$

b) $y=\frac{8x^3+1}{2x+1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \frac{8x^3+1}{2x+1} \\ &= \frac{(2x+1)(4x^2-2x+1)}{2x+1} \\ &= 4x^2-2x+1 \\ \frac{dy}{dx} &= 8x-2 \end{aligned}$$

c) $y=(2x)^2-\frac{1}{3x}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x)^2 - \frac{1}{3x} \\ f(x) &= 4x^2 - \frac{x^{-1}}{3} \\ f'(x) &= 8x + \frac{x^{-2}}{3} \\ f'(x) &= 8x + \frac{1}{3x^2} \end{aligned}$$

d) $y=\frac{2\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}} \\ &= 2 - 5x^{\frac{-1}{2}} \\ f'(x) &= -5(\frac{-1}{2})x^{\frac{-3}{2}} \\ &= \frac{5}{2\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

5. Gegee: $f(x) = 2x^2 - x$

a) Gebruik die definisie van die afgeleide om $f'(x)$ te bereken.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - x \\
f(x+h) &= 2(x+h)^2 - (x+h) \\
&= 2(x^2 + 2xh + h^2) - x - h \\
&= 2x^2 + 4xh + 2h^2 - x - h
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(2x^2 + 4xh + 2h^2 - x - h) - (2x^2 - x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - x - h - 2x^2 + x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 - h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h - 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (4x + 2h - 1) \\
&= 4x - 1
\end{aligned}
$$

b) Gevolglik, bereken die koördinate van die punt waar die gradiënt van die raaklyn aan die grafiek van f gelyk is aan 7.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= 4x - 1 = 7 \\
0 &= 4x - 8 \\
0 &= x - 2 \\
\therefore x &= 2
\end{aligned}
$$

Die y waarde is:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - x \\
\therefore f(2) &= 2(2)^2 - 2 \\
&= 8 - 2 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Die koördinate van die punt is $(2; 6)$.

6. As $g(x) = \left(x^{-2} + x^2\right)^2$, bereken $g'(2)$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \left(x^{-2} + x^2\right)\left(x^{-2} + x^2\right) \\
&= x^{-4} + x^0 + x^0 + x^4 \\
&= x^{-4} + 1 + 1 + x^4 \\
&= x^{-4} + 2 + x^4 \\
g'(x) &= -4x^{-5} + 4x^3 \\
g'(2) &= -4(2)^{-5} + 4(2)^3 \\
&= \frac{-4}{32} + 32 \\
&= -\frac{1}{8} + 32 \\
&= 31\frac{7}{8} \\
&= \frac{255}{8}
\end{aligned}
$$

7. Gegee: $f(x) = 2x - 3$

a) Bepaal $f^{-1}(x)$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ f^{-1}: \quad x &= 2y - 3 \\ 2y &= x + 3 \\ y &= \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) Los op vir x as $f^{-1}(x) = 3f'(x)$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{2} &= 3(2) \\ x + 3 &= 12 \\ &= 9 \end{aligned}$$

8. Bepaal die afgeleide van elk van die volgende:

a) $p(t) = \frac{\sqrt[5]{t^3}}{3} + 10$
Oplossing:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{\sqrt[5]{t^3}}{3} + 10 \\ p(t) &= \frac{t^{\frac{3}{5}}}{3} + 10 \\ p'(t) &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}t^{-\frac{2}{5}}\right) \\ &= \frac{1}{5\sqrt[5]{t^2}} \end{aligned}$$

b) $k(n) = \frac{\left(2n^2-5\right)(3n+2)}{n^2}$
Oplossing:

$$\begin{aligned} k(n) &= \frac{6n^3 + 4n^2 - 15n - 10}{n^2} \\ &= 6n + 4 - 15n^{-1} - 10n^{-2} \\ k'(n) &= 6 + 15n^{-2} + 20n^{-3} \\ &= 6 + \frac{15}{n^2} + \frac{20}{n^3} \end{aligned}$$

9. As $xy - 5 = \sqrt{x^3}$, bepaal $\frac{dy}{dx}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} xy - 5 &= \sqrt{x^3} \\ y &= \frac{x^{\frac{3}{2}} + 5}{x} \\ &= x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 5x^{-2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} \end{aligned}$$

10. Gegee: $y = x^3$

a) Bepaal $\frac{dy}{dx}$.

Oplossing:

Differensieer y met betrekking tot x.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

b) Bepaal $\frac{dx}{dy}$.

Oplossing:

Om x met betrekking tot y te differensieer, druk x in terme van y uit:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{y} \\ &= y^{\frac{1}{3}} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \end{aligned}$$

c) Toon aan dat $\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} &= 3x^2 \times \frac{y^{-\frac{2}{3}}}{3} \\ \text{Maar } y &= x^3 \\ \therefore \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} &= 3x^2 \times \frac{\left(x^3\right)^{-\frac{2}{3}}}{3} \\ &= x^2 \times x^{-2} \\ &= x^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

11. Gegee: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

a) Bereken $f(-1)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Gevolglik, los op vir $f(x) = 0$.

Oplossing:

Ons weet dat $(x + 1)$ 'n faktor is van $f(x)$ omdat $f(-1) = 0$. Ons faktoriseer verder deur middel van inspeksie:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x^2 - 4x + 4) \\ &= (x+1)(x-2)(x-2) \\ \therefore \quad f(x) &= (x+1)(x-2)(x-2) \\ 0 &= (x+1)(x-2)(x-2) \\ \therefore \quad x &= -1 \text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

c) Bepaal $f'(x)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

d) Skets die grafiek van f, toon die koördinate van die draaipunte en die afsnitte op albei asse aan.

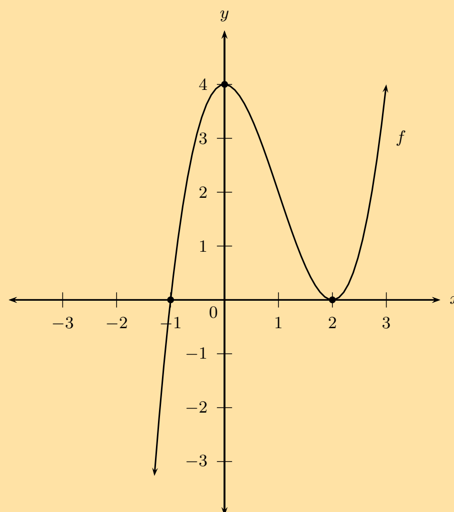
Oplossing:

Die y-afsnit is $y = 4$.

Die x-afsnitte is $(2; 0)$ en $(-1; 0)$.

Om die draaipunte te bepaal, stel ons die afgeleide gelyk aan 0. $f'(x) = 3x(x-2) = 0$. Die x-waardes van die draaipunte is: $x = 0$ en $x = 2$.

Dus, die draaipunte is $(0; 4)$ en $(2; 0)$.



e) Bepaal die koördinate van die punte op die grafiek van f waar die gradiënt 9 is.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 6x \\
3x^2 - 6x &= 9 \\
3x^2 - 6x - 9 &= 0 \\
x^2 - 2x - 3 &= 0 \\
(x-3)(x+1) &= 0 \\
\therefore \quad x &= 3 \text{ of } x = -1 \\
\text{As } x = 3: \quad f(3) &= (3)^3 - 3(3)^2 + 4 \\
&= 27 - 27 + 4 \\
&= 4 \\
\text{As } x = -1: \quad f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1)^2 + 4 \\
&= -1 - 3 + 4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

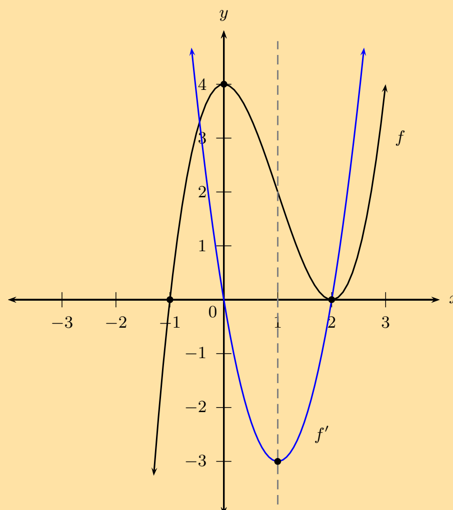
Dus, by $(-1; 0)$ en $(3; 4)$.

f) Teken die grafiek van $f'(x)$ op dieselfde assestelsel.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 6x \\
y_{\text{af}}: &\ (0; 0) \\
x_{\text{af}}: &\ 3x(x-2) = 0 \\
\therefore \quad x &= 0 \text{ of } x = 2 \\
\therefore &\ (0; 0) \text{ of } (2; 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Draaipunt is waar } f''(x) &= 0 \\
\therefore \ 6x - 6 &= 0 \\
\therefore \quad x &= 1 \\
\text{Draaipunt: } &(1; -3)
\end{aligned}
$$



g) Bepaal $f''(x)$ en gebruik dit om gevolgtrekkings te maak omtrent die konkawiteit van f.

Oplossing:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x - 6 \\ 6x - 6 &= 0 \text{ vir } x = 1 \\ x < 1,\ \ f''(x) < 0 &\therefore f(x) \text{ is konkaaf af} \\ x > 1,\ \ f''(x) > 0 &\therefore f(x) \text{ is konkaaf op} \\ x = 1,\ \ f''(x) = 0 &\therefore\ \ f(x) \text{ is 'n infleksiepunt} \end{aligned}$$

12. Gegee $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

a) As $f(-1) = 0$, bepaal die x-afsnitte van f.

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \\ f(-1) &= 0, \text{ dus } (x+1) \text{ is 'n faktor van } f(x) \\ f(x) &= (x+1)(2x^2 - 7x + 3) \\ &= (x+1)(2x-1)(x-3) \\ \text{Laat}\ \ f(x) &= 0 \\ \therefore\ \ &(x+1)(2x-1)(x-3) = 0 \\ \therefore\ \ x &= -1,\ \ x = \frac{1}{2} \text{ of } x = 3 \end{aligned}$$

Die x-afsnitte van f is $(-1;0)$, $\left(\frac{1}{2};0\right)$ en $(3;0)$.

b) Bepaal die koördinate van die draaipunte van f.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6x^2 - 10x - 4 \\
0 &= 2(3x^2 - 5x - 2) \\
&= 3x^2 - 5x - 2 = 0 \\
&= (3x+1)(x-2) = 0 \\
\therefore \quad x &= -\frac{1}{3} \text{ of } x = 2
\end{aligned}$$

Vervang $x = -\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}
y &= 2\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right) + 3 \\
&= \frac{100}{27} \\
&= 3{,}7
\end{aligned}$$

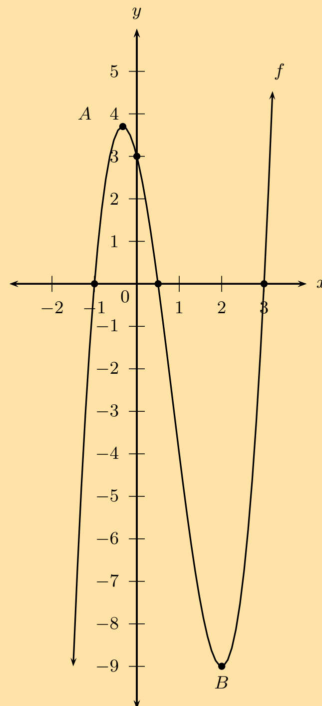
Vervang $x = 2$:

$$\begin{aligned}
y &= 2(2)^3 - 5(2)^2 - 4(2) + 3 \\
&= -9
\end{aligned}$$

$\therefore$ Draaipunte: $A\left(-\frac{1}{3}; 3{,}7\right)$ en $B\,(2; -9)$

c) Teken 'n sketsgrafiek van f. Toon die koördinate van die draaipunte en die afsnitte met die asse duidelik aan.

Oplossing:



d) Vir watter waarde(s) van k sal die vergelyking $f\,(x) = k$ drie reële wortels hê, waarvan twee gelyk is?

Oplossing:

Om die punt te bepaal wanneer die kubiese funksie twee reële wortels het, moet ons die punte vasstel waar een van die draaipunte die x-as raak. Ons kyk na die y-waardes van die draaipunte om dit te bepaal. Vir die maksimum draaipunt laat sak ons die grafiek en vir die minimum punt skuif ons die grafiek op. Dit gee: $k = 3{,}7$ of $k = -9$.

e) Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die grafiek van $f\,(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ by die punt waar $x = 1$.

Oplossing:
Bereken die y-waarde as $x = 1$:

$$f(1) = 2(1)^3 - 5(1)^2 - 4(1) + 3$$
$$= -4$$

Bepaal die waarde van m deur $x = 1$ in die afgeleide te stel:

$$f'(x) = 6x^2 - 10x - 4$$
$$f'(1) = 6(1)^2 - 10(1) - 4$$
$$m = -8$$

Die vergelyking van die raaklyn is:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 4 = -8(x - 1)$$
$$y = -8x + 4$$

13. Gegee die funksie $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ met y-afsnit $(0; 26)$, x-afsnit $(-2; 0)$ en 'n infleksiepunt by $x = -3$.

a) Toon deur berekening aan dat $b = 9$, $c = 27$ en $d = 26$.

Oplossing:

$$y_{\text{af}}(0; 26): \ d = 26$$
$$\therefore f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 26$$
$$x_{\text{af}}(-2; 0): \ f(-2) = (-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + 26$$
$$\therefore 0 = -8 + 4b - 2c + 26$$
$$0 = 4b - 2c + 18$$
$$2b - c = -9 \quad ①$$

Stasionêre punt: $x = -3$

$$\therefore f'(-3) = 0$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$
$$f'(-3) = 3(-3)^2 + 2b(-3) + c$$
$$0 = 27 - 6b + c$$
$$6b - c = 27 \quad ②$$
$$2b - c = -9 \quad ①$$
$$① - ②: \ 4b = 36$$
$$b = 9$$

Vervang $b = 9$ in verg. ①

$$2(9) - c = -9$$
$$-c - 27$$
$$c = 27$$
$$\therefore f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 26$$

b) Bereken die y-koördinaat van die infleksiepunt.

Oplossing:

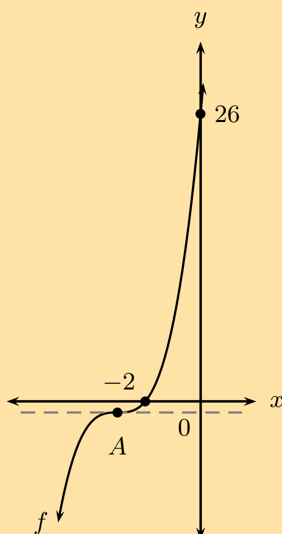
Gaan deur $(-3; y)$

$$\therefore y = (-3)^3 + 9(-3)^2 + 27(-3) + 26$$
$$= -27 + 81 - 81 + 26$$
$$= -1$$

$\therefore$ Infleksiepunte: $A(-3; -1)$

c) Teken die grafiek van f.

Oplossing:



d) Bespreek die gradiënt van f.

Oplossing:

Gradiënt altyd positief behalwe as $A(-3;-1)$ waar die gradiënt 'n minimum is, naamlik nul.

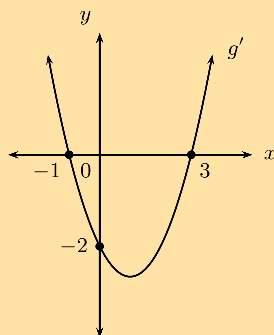
e) Bespreek die konkawiteit van f.

Oplossing:

Konkawiteit verander by die infleksiepunt $A(-3;-1)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 27$$
$$f''(x) := 6x + 18$$
$$x < -3, \quad f''(x) < 0 \therefore f(x) \text{ is konkaaf af}$$
$$x = -3, \quad f''(x) = 0 \therefore \quad f(x) \text{ is 'n infleksiepunt}$$
$$x > 1, \quad f''(x) > 0 \therefore f(x) \text{ is konkaaf op}$$

14. Gegee is 'n sketsgrafiek van $g'(x)$.



a) Identifiseer die stasionêre punte van die kubiese funksie, $g(x)$.

Oplossing:

Draaipunte is by $x = -1$ en $x = 3$:

Vir $x = -1$: dit is 'n lokale maksimum draaipunt (die gradiënt van g verander van positief na negatief).

Vir $x = 3$: dit is 'n lokale minimum draaipunt (gradiënt van g verander van negatief na positief).

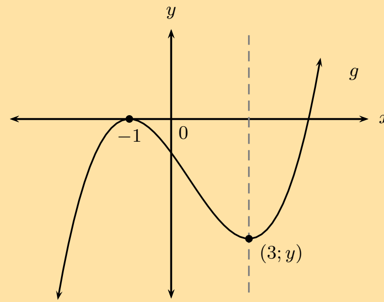
b) Wat is die gradiënt van die funksie waar $x = 0$.

Oplossing:

By $x = 0$, is die gradiënt van die funksie gelyk aan -2. Ons kan dit skryf as $g'(0) = -2$.

c) As dit verder gegee word dat f slegs twee reële wortels het, trek 'n ruwe sketsgrafiek van f. Afsnitwaardes hoef nie aangetoon te word nie.

Oplossing:



15. Gegee die lineêre funksie $h(x)$ met $h(2) = 11$ en $h'(2) = -1$. Bepaal die vergelyking van $h(x)$.

Oplossing:

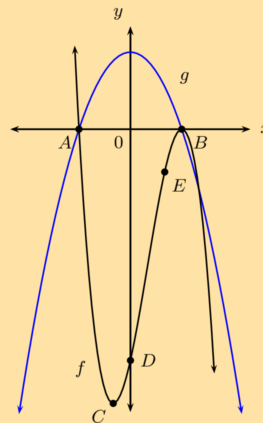
$h(x)$ is 'n lineêre funksie met kenmerkende vorm $y = mx+c$. Die afgeleide van 'n lineêre funksie is $\frac{dy}{dx} = m$, dus, van $h'(2) = -1$, kan ons aflei dat $m = -1$.

$$\begin{aligned} &\therefore y = -x + c \\ \text{Vervang } (2;11): \quad &11 = -2 + c \\ &\therefore c = 13 \\ &\therefore y = -x + 13 \end{aligned}$$

Dus, $h(x) = -x + 13$.

16. Die grafieke van f en g, met die volgende punte, word gegee:

$$A(-3;0) \quad B(3;0) \quad C(-1;-32) \quad D(0;-27) \quad E(2;y)$$



a) Gebruik die grafieke en bepaal die waardes van x waarvoor:

i. $f(x)$ 'n dalende funksie is.
ii. $f(x) \,.\, g(x) \geq 0$.
iii. $f'(x)$ en $g(x)$ albei negatief is.

Oplossing:

i. $x < -1$ en $x > 3$
ii. $x = -3$ of $x \geq 3$ (beide f en g is negatief)
iii. $f'(x) < 0$ waar die gradiënt van f negatief is. Dus, $x < -1$ of $x > 3$.
En $g < 0$ vir $x < -3$ of $x > 3$.
Dus, f' en $g < 0$ vir $x < -3$ of $x > 3$.

b) Gegee $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$, bepaal die vergelyking van die raaklyn aan f by die punt $E(2;y)$.

Oplossing:
Vergelyking van raaklyn aan f by $E(2;y)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2+6x+9 \\ \text{By } x=2: \quad f'(2) &= -3(2)^2+6(2)+9 \\ &= -12+12+9 \\ &= 9 \\ \therefore y &= 9x+c \end{aligned}$$

Om die waardes van y by E te bepaal, stel $x=2$ in $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(2) &= -(2)^3+3(2)^2+9(2)-27 \\ &= -8+12+18-27 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Stel $(2;-5)$ in $f'(x)$ om c te bereken:

$$\begin{aligned} y &= 9x+c \\ -5 &= 9(2)+c \\ \therefore c &= -23 \\ y &= 9x-23 \end{aligned}$$

c) Bepaal die koördinate van die punt(e) waar die raaklyn in die vraag hierbo, weer die grafiek van f ontmoet.

Oplossing:
Stel die vergelyking van die raaklyn gelyk aan $f(x)$:

$$\begin{aligned} 9x-23 &= -x^3+3x^2+9x-27 \\ \therefore 0 &= -x^3+3x^2-4 \\ \text{Laat } k(x) &= -x^3+3x^2-4 \\ k(-1) &= -(-1)^3+3(-1)^2-4 \\ &= 1+3-4 \\ &= 0 \\ \therefore k(x) &= (x+1)(-x^2+4x-4) \\ &= -(x+1)(x^2-4x+4) \\ &= -(x+1)(x-2)^2 \\ \therefore 0 &= -(x+1)(x-2)^2 \\ \therefore x &= -1 \text{ of } x=2 \text{ of } x=2 \end{aligned}$$

Dus, die raaklyn sny die grafiek van f in die draaipunt $C(-1;-32)$.

d) Sonder enige berekenings, gee die x-afsnitte van die grafiek van $f'(x)$. Verduidelik jou redenasie.

Oplossing:
x-afsnitte van f' is by $(-1;0)$ en $(3;0)$, die draaipunte van f (punte B en C). By hierdie twee punte is die gradiënt van die grafiek gelyk aan nul, waar $f'(x)$ die x-as sny.

17. a) Skets die grafiek van $f(x)=x^3-9x^2+24x-20$ en toon alle afsnitte met die asse en die draaipunte aan.

Oplossing:
Ons bepaal die y-afsnit deur die waarde van $f(0)$ te bepaal.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3-9x^2+24x-20 \\ f(0) &= (0)^3-9(0)^2+24(0)-20 \\ &= -20 \end{aligned}$$

Die y-afsnit is: $(0; -20)$
Ons bepaal die x-afsnitte deur die waardes te bepaal waarvoor $f(x) = 0$.
Ons gebruik die faktorstelling om vas te stel of $(x - 1)$ 'n faktor is.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x^2 + 24x - 20 \\ f(1) &= (1)^3 - 9(1)^2 + 24(1) - 20 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Dus, $(x - 1)$ is nie 'n faktor nie.
Ons gebruik nou die faktorstelling om vas te stel of $(x + 1)$ 'n faktor is.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x^2 + 24x - 20 \\ f(-1) &= (-1)^3 - 9(-1)^2 + 24(-1) - 20 \\ &= -54 \end{aligned}$$

Dus, $(x + 1)$ is nie 'n faktor nie.
Nou probeer ons $(x - 2)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x^2 + 24x - 20 \\ f(1) &= (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) - 20 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dus, $(x - 2)$ is 'n faktor.
As ons $f(x)$ deel met $(x - 2)$ kry ons:

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 7x + 10)$$

Dit het faktore:

$$f(x) = (x - 2)(x - 5)(x - 2)$$

Die x-afsnitte is: $(2; 0), (5; 0)$.
Bepaal die draaipunte deur $f'(x) = 0$ te stel.
As ons differensiasiereëls gebruik, kry ons:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 \\ 0 &= 3(x^2 - 6x + 8) \\ &= 3(x - 2)(x - 4) \end{aligned}$$

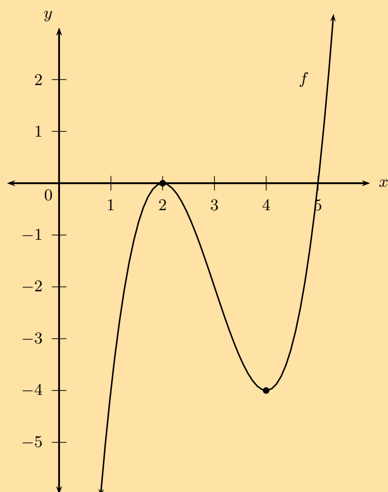
Die x-koördinate van die draaipunte is: $x = 4$ en $x = 2$.
Die y-koördinate van die draaipunte word bereken as :

$$\begin{aligned} f(2) &= (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) - 20 \\ &= 0 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} f(4) &= (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) - 20 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Dus die draaipunte is: $(2; 0)$ en $(4; -4)$.



b) Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan $f(x)$ by $x = 4$.

Oplossing:

Ons weet dat by $x = 4$, $y = -4$ (dit is die draaipunt van die grafiek).

Ons stel $x = 4$ in die afgeleide van die funksie in om m te bepaal:

$$\begin{aligned} m &= 3(4-2)(4-4) \\ m &= 0 \end{aligned}$$

Die instelling hiervan, asook die koördinate van die punt, in $y - y_1 = m(x - x_1)$ in, gee:

$$\begin{aligned} y - (-4) &= 0(x - 4) \\ y &= -4 \end{aligned}$$

Die vergelyking van die raaklyn aan die grafiek by $x = 4$ is $y = -4$.

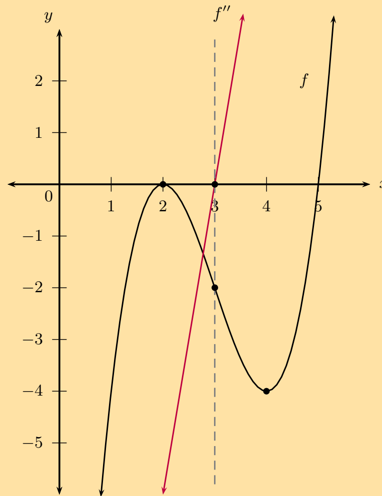
c) Bepaal die infleksiepunt en bespreek die konkawiteit van f.

Oplossing:

Infleksiepunt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 18x + 24 \\ f''(x) &= 6x - 18 \\ \therefore 0 &= 6x - 18 \\ 6x &= 18 \\ \therefore x &= 3 \\ \text{Vervang } x = 3: \quad f(3) &= (3)^3 - 9(3)^2 + 24(3) - 20 \\ &= 27 - 81 + 72 - 20 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(3; -2)$.



Konkawiteit:
$f''(x) < 0$ vir $x < 3$: konkaaf af
$f''(x) = 0$ vir $x = 3$: infleksiepunt
$f''(x) > 0$ vir $x > 3$: konkaaf op

18. Bepaal die minimum waarde van die som van 'n positiewe getal en sy resiprook.

Oplossing:

Gestel die getal is x en die resiprook is $\frac{1}{x}$. Die som van hierdie twee getalle is $S = x + \frac{1}{x}$. Om die minimum waarde te bepaal, moet ons die uitdrukking vir die som differensieer en dit gelyk stel aan nul :

$$\begin{aligned} S &= x + \frac{1}{x} \\ S' &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ 0 &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ 1 &= \frac{1}{x^2} \\ x^2 &= 1 \\ x &= 1 \\ \therefore S &= 1 + \frac{1}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dus, die minimum waarde van die som van 'n positiewe getal en sy resiprook is 2.

19. Op 'n tydstip t minute nadat 'n ketel begin kook het, word die hoogte van die water in die ketel gegee deur $d = 86 - \frac{1}{8}t - \frac{1}{4}t^3$, waar d gemeet word in millimeters.

a) Bereken die hoogte van die watervlak in die ketel net voordat dit begin kook.

Oplossing:

Die ketel begin kook as $t = 0$:

$$\begin{aligned} d &= 86 - \frac{1}{8}t - \frac{1}{4}t^3 \\ &= 86 - \frac{1}{8}(0) - \frac{1}{4}(0)^3 \\ &= 86 \text{ mm} \end{aligned}$$

b) Soos die water kook, sak die watervlak in die ketel. Bepaal die tempo waarteen die watervlak daal wanneer $t = 2$ minute.

Oplossing:

Om die tempo te vind waarteen die watervlak daal, bepaal ons die afgeleide van die diepte van die water:

$$\begin{aligned}
d(t) &= 86 - \frac{1}{8}t - \frac{1}{4}t^3 \\
d'(t) &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{4}(3)t^2 \\
&= -\frac{1}{8} - \frac{3}{4}t^2 \\
d'(2) &= -\frac{1}{8} - \frac{3}{4}(2)^2 \\
&= -\frac{1}{8} - 3 \\
&= -\frac{25}{8} \\
&= -3{,}125 \text{ mm per minuut}
\end{aligned}$$

Hierdie tempo is negatief, siende dat die watervlak daal.

c) Na hoeveel minute vandat die ketel begin kook het, sal die watervlak teen 'n tempo van $12\frac{1}{8}$ mm per minuut daal?

Oplossing:

Om die aantal minute te bepaal wanneer die tempo $-12{,}125$ mm.min^{-1} sal wees (watervlak daal), stel ons die afgeleide gelyk aan hierdie waarde en los vir t op:

$$\begin{aligned}
d'(t) &= -\frac{1}{8} - \frac{3}{4}t^2 \\
-12{,}125 &= -\frac{1}{8} - \frac{3}{4}t^2 \\
\frac{97}{8} - \frac{1}{8} &= \frac{3}{4}t^2 \\
\frac{3}{4}t^2 &= 12 \\
t^2 &= 16 \\
t &= 4
\end{aligned}$$

Na 4 minute sal die watervlak daal teen $12{,}125$ mm.min^{-1}.

20. Die verplasing van 'n bewegende voorwerp word voorgestel deur die vergelyking:

$$\begin{aligned}
D(t) &= \frac{4}{3}t^3 - 3t \\
\text{waar } D &= \text{ afstand afgelê in meter} \\
t &= \text{ tyd in sekondes}
\end{aligned}$$

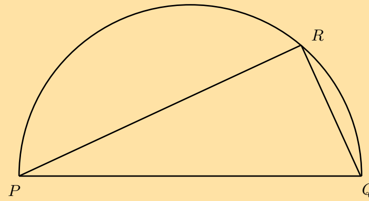
Bereken die versnelling van die voorwerp na 3 sekondes.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
D(t) &= \frac{4}{3}t^3 - 3t \\
D'(t) &= 4t^2 - 3 \\
D''(t) &= 8t \\
\therefore D''(3) &= 8(3) \\
&= 24
\end{aligned}$$

Na 3 sekondes, is die versnelling 24 m.s^{-2}.

21. In die figuur is PQ die middellyn van die semi-sirkel PRQ. Die som van die lengtes van PR en QR is 10 eenhede. Bereken die omtrek van $\triangle PQR$ as $\triangle PQR$ die maksimum area in die semi-sirkel beslaan. Laat die antwoord in vereenvoudigde wortelvorm.



Oplossing:

Gestel PR is x eenhede en QR is $(10-x)$ eenhede.

$$\begin{aligned} \text{Area } \triangle PQR &= \frac{1}{2}PR\ .\ QR \quad (\angle \text{ in semi-sirkel}) \\ \therefore A(x) &= \frac{1}{2}x(10-x) \\ &= 5x - \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Om die maksimum area te bepaal, stel $A'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 5 - x \\ 0 &= 5 - x \\ \therefore x &= 5 \end{aligned}$$

Dus, $PR = 5$ eenhede en $QR = 5$ eenhede.

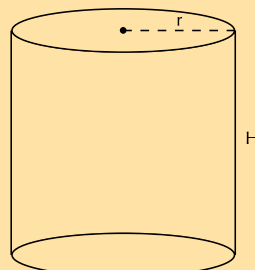
$$\begin{aligned} PQ^2 &= 5^2 + 5^2 \quad \text{(Pythagoras)} \\ &= 50 \\ \therefore PQ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Omtrek } \triangle PQR &= 5 + 5 + 5\sqrt{2} \\ &= 5 + 5 + 5\sqrt{2} \\ &= 10 + 5\sqrt{2} \text{ eenhede} \end{aligned}$$

Omtrek van die driehoek is $10 + 5\sqrt{2}$ eenhede.

22. Die kapasiteit van 'n silindirese watertenk is 1000 litres. Stel die hoogte gelyk aan H en die radius gelyk aan r. Die materiaal wat gebruik word vir die bodem van die tenk is tweekeer so dik en ook tweekeer so duur as die materiaal wat gebruik word vir die geboë deel van die tenk en die bokant van die tenk.

Onthou: $1000\ \ell = 1\ \text{m}^3$



a) Druk H uit in terme van r.

Oplossing:

$$V = \pi r^2 H$$
$$1 = \pi r^2 H$$
$$\therefore H = \frac{1}{\pi r^2}$$

b) Toon aan dat die koste van materiaal vir die tenk uitgedruk kan word as:

$$C = 3\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

Oplossing:

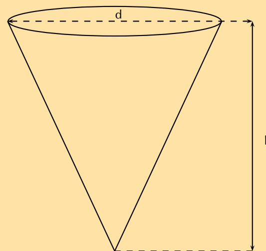
$$\begin{aligned}\text{Koste van materiaal } &= (2 \times \text{area bodem }) + \text{ area bokant } + \text{ area geboë deel}\\ &= \left(2 \times \pi r^2\right) + \pi r^2 + (2\pi r H)\\ &= 3\pi r^2 + 2\pi r H\\ \text{Vervang } H &= \frac{1}{\pi r^2}:\\ \text{Koste van materiaal } &= 3\pi r^2 + \left(2\pi r \times \frac{1}{\pi r^2}\right)\\ &= 3\pi r^2 + \frac{2}{r}\end{aligned}$$

c) Bepaal die deursnit of middellyn van die tenk wat die minimum koste van die materiaal sal gee.
[IEB, 2006]

Oplossing:
Gestel die koste van die materiaal is $C(r)$.

$$\begin{aligned}C(r) &= 3\pi r^2 + \frac{2}{r}\\ C'(r) &= 6\pi r - \frac{2}{r^2}\\ \therefore 0 &= 6\pi r - \frac{2}{r^2}\\ r^3 &= \frac{2}{6\pi}\\ \therefore r &= 0{,}47 \text{ m}\\ \therefore d &= 2 \times 0{,}47 \text{ m}\\ &= 0{,}94 \text{ m}\end{aligned}$$

23. Die middellyn van 'n roomyshorinkie is d en die vertikale hoogte is h. Die som van die middellyn en die hoogte van die roomyshorinkie is 10 cm.



a) Bepaal die volume van die roomyshorinkie in terme van h en d.
(Volume van 'n keël: $V = \frac{1}{3}\pi r^3 h$)

Oplossing:

$$\begin{aligned}
r &= \frac{d}{2} \\
h + d &= 10 \\
\therefore h &= 10 - d \\
V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\
&= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 (10 - d) \\
&= \frac{1}{12}\pi d^2 (10 - d) \\
&= \frac{1}{12}(10\pi d^2 - \pi d^3)
\end{aligned}$$

b) Bepaal die radius en die hoogte van die roomyshorinkie as die volume ’n maksimum is.

Oplossing:

Gestel die volume van die roomyshorinkie is $V(d)$.

$$\begin{aligned}
V(d) &= \frac{1}{12}(10\pi d^2 - \pi d^3) \\
V'(d) &= \frac{1}{12}(20\pi d - 3\pi d^2) \\
\therefore 0 &= \frac{1}{12}(20\pi d - 3\pi d^2) \\
0 &= 20\pi d - 3\pi d^2 \\
0 &= \pi d(20 - 3d) \\
\therefore d &= 0 \text{ of } d = \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore d &= 6{,}67 \text{ cm} \\
\therefore r &= \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \\
&= \frac{10}{3} \\
&= 3{,}34 \text{ cm} \\
h &= 10 - \frac{20}{3} \\
&= \frac{10}{3} \\
&= 3{,}34 \text{ cm}
\end{aligned}$$

c) Bereken die maksimum volume van die roomyshorinkie.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\
&= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{10}{3}\right)^2 \left(\frac{10}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{100}{9}\right) \left(\frac{10}{3}\right) \\
&= \frac{1000\pi}{81} \\
&= 38{,}79 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

24. 'n Waterreservoir het beide 'n inloop-pyp en 'n uitloop-pyp om die diepte van die water in die reservoir te reguleer. Die diepte word gegee deur die funksie:

$$\begin{aligned} D(h) &= 3 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^3 \\ \text{waar } D &= \text{ diepte in meter} \\ h &= \text{ ure na 06h00} \end{aligned}$$

a) Bepaal die tempo waarteen die diepte van die water verander teen 10h00.

Oplossing:

$$\begin{aligned} D(h) &= 3 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^3 \\ D'(h) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}h^2 \\ \therefore D'(4) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(4)^2 \\ &= \frac{1}{2} - 12 \\ &= -11\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus, die veranderingstempo van die diepte van die water is $-11{,}5$ m per uur teen 10h00.

b) Neem die diepte van die water toe of af?

Oplossing:

Neem af (tempo is negatief).

c) Teen watter tyd sal die invloei van water dieselfde wees as die uitvloei? [IEB, 2006]

Oplossing:

$$\begin{aligned} D'(h) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}h^2 \\ 0 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}h^2 \\ \frac{3}{4}h^2 &= \frac{1}{2} \\ h^2 &= \frac{2}{3} \\ \therefore h &= 0{,}82 \text{ uur} \end{aligned}$$

Ons omskep dit in minute: $0{,}82 \times 60 \approx 49$ minute. Dus, by 06h49.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BFY	2. 2BFZ	3. 2BG2	4a. 2BG3	4b. 2BG4	4c. 2BG5
4d. 2BG6	5a. 2BG7	5b. 2BG8	6. 2BG9	7a. 2BGB	7b. 2BGC
8a. 2BGD	8b. 2BGF	9. 2BGG	10a. 2BGH	10b. 2BGJ	10c. 2BGK
11a. 2BGM	11b. 2BGN	11c. 2BGP	11d. 2BGQ	11e. 2BGR	11f. 2BGS
11g. 2BGT	12a. 2BGV	12b. 2BGW	12c. 2BGX	12d. 2BGY	12e. 2BGZ
13a. 2BH2	13b. 2BH3	13c. 2BH4	13d. 2BH5	13e. 2BH6	14a. 2BH7
14b. 2BH8	14c. 2BH9	15. 2BHB	16a. 2BHC	16b. 2BHD	16c. 2BHF
16d. 2BHG	17. 2BHH	18. 2BHJ	19a. 2BHK	19b. 2BHM	19c. 2BHN
20. 2BHP	21. 2BHQ	22a. 2BHR	22b. 2BHS	22c. 2BHT	23a. 2BHV
23b. 2BHW	23c. 2BHX	24a. 2BHY	24b. 2BHZ	24c. 2BJ2	

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK



Analitiese meetkunde

- Integreer kennis van Euklidiese Meetkunde met Analitiese Meetkunde
- Beklemtoon die waarde en belangrikeid van sketse maak.
- Beklemtoon die belangrikheid van konsekwent koördinate skryf vir die afstandformule en die gradiënt.
- Leerders moet die metode van vierkantsvoltooing hersien. Hierdie metode word gebruik in die bepaling van die algemene vorm vergelyking van 'n sirkel, met middelpunt (a, b).
- Herhinner leerders dat die raaklyn aan 'n sirkel loodreg op die radius is (asook die middellyn).

8.1 Hersiening

Vergelykings vir reguitlyne

Oefening 8 – 1: Hersiening

1. Bepaal die volgende vir die lynsegment tussen die twee gegewe punte:
   - lengte
   - middelpunt
   - gradiënt
   - vergelyking

   a) $(-2; -4)$ en $(3; 11)$
   Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Afstand} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(3 - (-2))^2 + (11 - (-4))^2} \\ &= \sqrt{(5)^2 + (15)^2} \\ &= \sqrt{25 + 225} \\ &= \sqrt{250} \\ &= 5\sqrt{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(x; y) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-2 + 3}{2}; \frac{-4 + 11}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{11 - (-4)}{3 - (-2)} \\ &= \frac{15}{5} \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ y &= 3x + c \\ \text{Vervang } (-2;-4) \quad -4 &= 3(-2) + c \\ -4 + 6 &= c \\ 2 &= c \\ \therefore y &= 3x + 2 \end{aligned}$$

b) $(-5;-3)$ en $(10;6)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Afstand } &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(10 - (-5))^2 + (6 - (-3))^2} \\ &= \sqrt{(15)^2 + (9)^2} \\ &= \sqrt{225 + 81} \\ &= \sqrt{306} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x;y) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-5 + 10}{2}; \frac{-3 + 6}{2}\right) \\ &= \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{6 - (-3)}{10 - (-5)} \\ &= \frac{9}{15} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ y &= \frac{3}{5}x + c \\ \text{Vervang } (10;6) \quad 6 &= \frac{3}{5}(10) + c \\ 6 - 6 &= c \\ 0 &= c \\ \therefore y &= \frac{3}{5}x \end{aligned}$$

c) $(h;-h-k)$ en $(2k;h-5k)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Afstand } &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(h - 2k)^2 + (-h - k - (h - 5k))^2} \\ &= \sqrt{(h - 2k)^2 + (-2h + 4k)^2} \\ &= \sqrt{h^2 - 4hk + 4k^2 + +4h^2 - 16hk + 16k^2} \\ &= \sqrt{5h^2 - 20hk + 20k^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)\\
&= \left(\frac{h+2k}{2};\frac{-h-k+(h-5k)}{2}\right)\\
&= \left(\frac{h+2k}{2};\frac{-6k)}{2}\right)\\
&= \left(\frac{h+2k}{2};-3k\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\
&= \frac{(h-5k)-(-h-k)}{2k-h}\\
&= \frac{2h-4k}{-h+2k}\\
&= \frac{-2(-h+2k)}{-h+2k}\\
&= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= mx+c\\
y &= -2x+c\\
\text{Vervang } (h;-h-k) \quad -h-k &= -2(h)+c\\
-h+2h-k &= c\\
h-k &= c\\
\therefore y &= -2x+h-k
\end{aligned}
$$

d) $(2;9)$ en $(0;-1)$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{Afstand } &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\
&= \sqrt{(2-(0))^2+(9-(-1))^2}\\
&= \sqrt{(2)^2+(10)^2}\\
&= \sqrt{4+100}\\
&= \sqrt{104}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)\\
&= \left(\frac{2+0}{2};\frac{9-1}{2}\right)\\
&= (1;4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\
&= \frac{-1-9}{0-2}\\
&= \frac{-10}{-2}\\
&= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= mx+c\\
y &= 5x+c\\
\text{Vervang } (0;-1) \quad -1 &= 5(0)+c\\
-1 &= c\\
\therefore y &= 5x-1
\end{aligned}
$$

2. Die lyn wat $A(x;y)$ en $B(-3;6)$ verbind het middelpunt $M(2;3)$. Bepaal die waardes van x en y.

Oplossing:

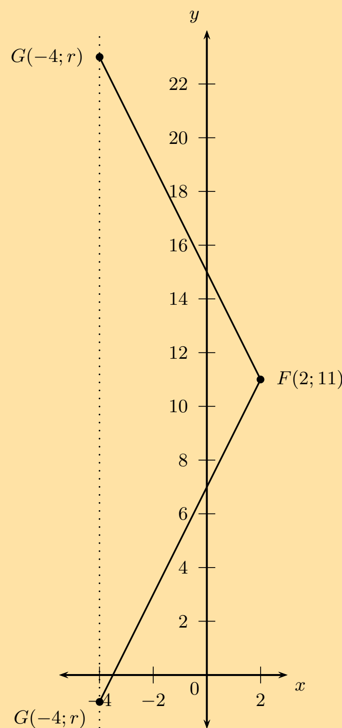
$$
\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \\
M(2;3) &= \left(\frac{x-3}{2}; \frac{y+6}{2}\right) \\
\therefore 2 &= \frac{x-3}{2} \\
4 &= x - 3 \\
\therefore 7 &= x \\
\text{En } 3 &= \frac{y+6}{2} \\
6 &= y + 6 \\
\therefore 0 &= y
\end{aligned}
$$

$A(7;0)$

3. Gegee $F(2;11), G(-4;r)$ en lengte $FG = 6\sqrt{5}$ eenhede, bepaal die waarde(s) van r.

Oplossing:

Daar is twee moontlike waardes van r sodat die lengte $FG = 6\sqrt{5}$ eenhede :



$$
\begin{aligned}
FG &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
6\sqrt{5} &= \sqrt{(-4-2)^2 + (r-11)^2} \\
\left(6\sqrt{5}\right)^2 &= 36 + r^2 - 22r + 121 \\
36 \times 5 &= r^2 - 22r + 157 \\
0 &= r^2 - 22r - 23 \\
0 &= (r+1)(r-23) \\
\therefore r &= -1 \text{ of } r = 23
\end{aligned}
$$

4. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn met die volgende eienskappe:

a) gaan deur die punte $(\frac{1}{2};4)$ en $(1;5)$.
Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{y-y_1}{x-x_2} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\ \frac{y-4}{x-\frac{1}{2}} &= \frac{5-4}{1-\frac{1}{2}}\\ \frac{y-4}{x-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\frac{1}{2}}\\ \frac{y-4}{x-\frac{1}{2}} &= 2\\ y-4 &= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\\ y &= 2x-1+4\\ \therefore y &= 2x+3\end{aligned}$$

b) gaan deur die punte $(2;-3)$ en $(-1;0)$.
Oplossing:

$$\begin{aligned}y &= mx+c\\ -3 &= 2m+c\ldots(1)\\ 0 &= -m+c\ldots(2)\\ (1)-(2):\quad -3 &= 2m+m\\ -3 &= 3m\\ \therefore -1 &= m\\ \therefore c &= -1\\ \therefore y &= -x-1\end{aligned}$$

c) gaan deur die punt $(9;1)$ en met $m=\frac{1}{3}$.
Oplossing:

$$\begin{aligned}y-y_1 &= m(x-x_1)\\ y-1 &= \frac{1}{3}(x-9)\\ y-1 &= \frac{1}{3}x-3\\ \therefore y &= \frac{1}{3}x-2\end{aligned}$$

d) ewewydig aan die x-as en gaan deur die punt $(0;-4)$.
Oplossing:

$$\begin{aligned}y-y_1 &= m(x-x_1)\\ y-(-4) &= 0(x-0)\\ \therefore y &= -4\end{aligned}$$

e) gaan deur die punt $(\frac{1}{2};-1)$ en met $m=-4$.
Oplossing:

$$\begin{aligned}y-y_1 &= m(x-x_1)\\ y-(-1) &= -4(x-\frac{1}{2})\\ y+1 &= -4x+2\\ \therefore y &= -4x+1\end{aligned}$$

f) loodreg op die x-as en gaan deur die punt $(5; 0)$.
Oplossing: $x = 5$

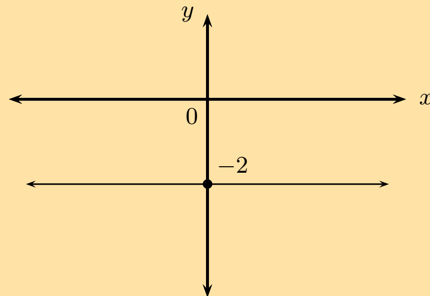
g) met ongedefinieërde gradiënt en gaan deur die punt $(\frac{3}{4}; 0)$.
Oplossing: $x = \frac{3}{4}$

h) met $m = 2p$ wat deur die punt $(3; 6p + 3)$ gaan.
Oplossing:

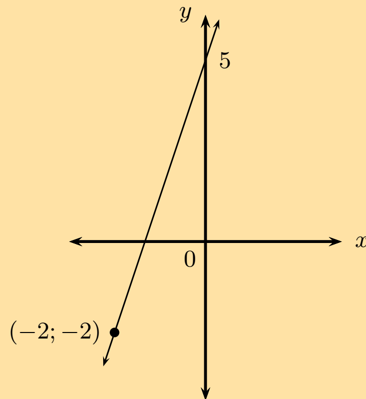
$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (6p + 3) &= 2p(x - 3) \\ y - 6p - 3 &= 2px - 6p \\ \therefore y &= 2px + 3 \end{aligned}$$

i) wat die y-as sny by $y = -\frac{3}{5}$ en met $m = 4$.
Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ y &= mx - \frac{3}{5} \\ \therefore y &= 4x - \frac{3}{5} \end{aligned}$$

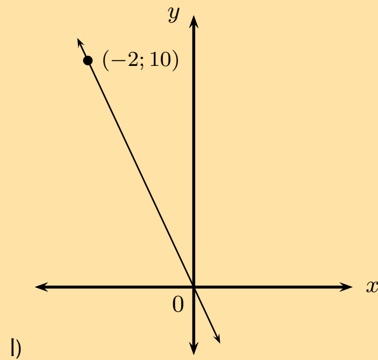


j)
Oplossing: $y = -2$



k)
Oplossing:

$$\begin{aligned} c &= 5 \\ y &= mx + c \\ y &= mx + 5 \\ \text{Vervang } (-2; -2) \qquad -2 &= -2m + 5 \\ -7 &= -2m \\ m &= \frac{7}{2} \\ \therefore y &= \frac{7}{2}x + 5 \end{aligned}$$



l)

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
c &= 0 \\
y &= mx + c \\
y &= mx + 0 \\
\text{Vervang } (-2; 10) \quad 10 &= -2m \\
-2m &= 10 \\
\therefore m &= -5 \\
\therefore y &= -5x
\end{aligned}
$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BJ3	1b. 2BJ4	1c. 2BJ5	1d. 2BJ6	2. 2BJ7	3. 2BJ8
4a. 2BJ9	4b. 2BJB	4c. 2BJC	4d. 2BJD	4e. 2BJF	4f. 2BJG
4g. 2BJH	4h. 2BJJ	4i. 2BJK	4j. 2BJM	4k. 2BJN	4l. 2BJP

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Inklinasie/helling van ’n lyn

Oefening 8 – 2: Helling van ’n reguitlyn

1. Bepaal die inklinasiehoek (korrek tot 1 desimale plek) vir elk van die volgende:

   a) ’n lyn met $m = \frac{3}{4}$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= m \\
&= \frac{3}{4} \\
\theta &= \tan^{-1}(0{,}75) \\
\therefore \theta &= 36{,}9^\circ
\end{aligned}
$$

   b) $6 + x = 2y$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
6 + x &= 2y \\
2y &= x + 6 \\
y &= \frac{1}{2}x + 3 \\
\tan\theta &= m \\
&= \frac{1}{2} \\
\theta &= \tan^{-1}(0{,}5) \\
\therefore \theta &= 26{,}6^\circ
\end{aligned}
$$

c) die lyn gaan deur die punte $(-4; 0)$ en $(2; 6)$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{6 - 0}{2 - (-4)} \\
&= \frac{6}{6} \\
\therefore m &= 1 \\
\tan\theta &= 1 \\
\theta &= \tan^{-1}(1) \\
\therefore \theta &= 45^\circ
\end{aligned}
$$

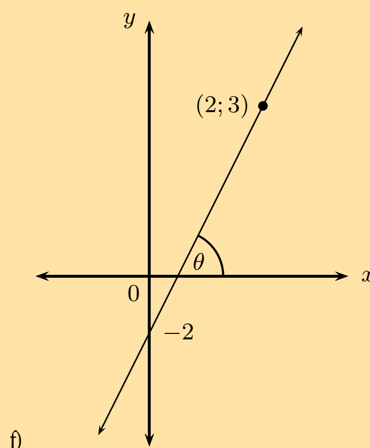
d) $y = 4$

Oplossing: Horisontale lyne

e) 'n lyn met 'n gradiënt van $1{,}733$

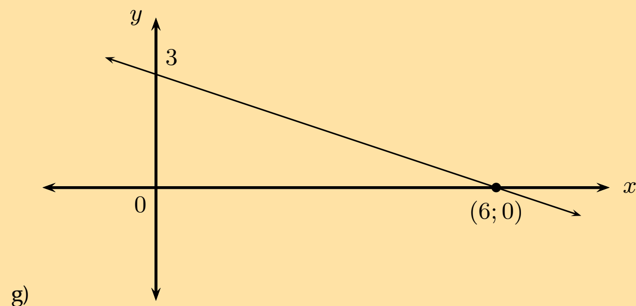
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= 1{,}733 \\
\theta &= \tan^{-1}(1{,}733) \\
\therefore \theta &= 60^\circ
\end{aligned}
$$

f) 

Oplossing:

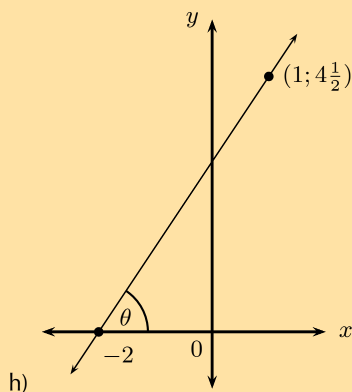
$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{3+2}{2-0} \\
&= \frac{5}{2} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \\
\therefore \theta &= 68{,}2^\circ
\end{aligned}
$$



g)

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{3-0}{0-6} \\
&= \frac{3}{-6} \\
\therefore m &= -\frac{1}{2} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \\
\therefore \theta &= -26{,}6^\circ \\
\therefore \theta &= 180^\circ - 26{,}6^\circ \\
\therefore \theta &= 153{,}4^\circ
\end{aligned}
$$



h)

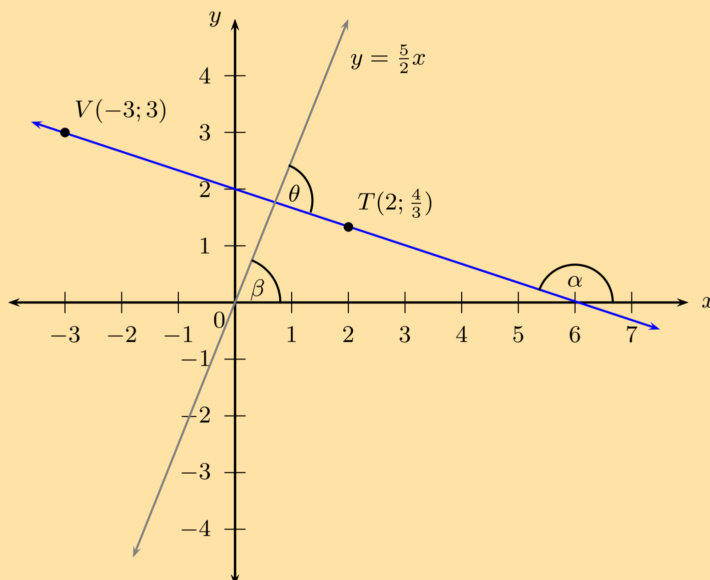
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{\frac{9}{2} - 0}{1 + 2} \\
&= \frac{\frac{9}{2}}{3} \\
&= \frac{3}{2} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \\
\therefore \theta &= 56{,}3^{\circ}
\end{aligned}
$$

2. Vind die hoek tussen die lyn $2y = 5x$ en die lyn wat deur die punte $T(2; \frac{4}{3})$ en V$(-3; 3)$ gaan.

Oplossing:

Laat die inklinasiehoek van die lyn $2y = 5x$ gelyk aan β wees en laat die inklinasiehoek van die ander lyn α wees. Laat die hoek tussen die twee lyne θ wees.



$$
\begin{aligned}
2y &= 5x \\
y &= \frac{5}{2}x \\
\therefore m &= \frac{5}{2} \\
\beta &= \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \\
\therefore \beta &= 68{,}2^{\circ} \\
m_{TV} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{3 - \frac{4}{3}}{-3 - 2} \\
&= \frac{\frac{5}{3}}{-5} \\
\therefore m_{TV} &= -\frac{1}{3} \\
m_{TV} = \tan\alpha &= -\frac{1}{3} \\
\alpha &= \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \\
&= -18{,}4^{\circ} \\
\alpha &= 180^{\circ} - 18{,}4^{\circ} \\
\therefore \alpha &= 161{,}6^{\circ} \\
\text{En } \theta &= \beta + (180^{\circ} - \alpha) \quad (\text{buite } \angle\triangle) \\
\therefore \theta &= 68{,}2^{\circ} + (180^{\circ} - 161{,}6^{\circ}) \\
&= 86{,}6^{\circ}
\end{aligned}
$$

3. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(1; 2)$ gaan en ewewydig is aan die lyn $y + 3x = 1$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y + 3x &= 1 \\
y &= -3x + 1 \\
\therefore m &= -3 \\
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - 2 &= -3(x - 1) \\
y &= -3x + 3 + 2 \\
\therefore y &= -3x + 5
\end{aligned}
$$

4. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-4; -4)$ gaan en ewewydig is aan die lyn met inklinasiehoek $\theta = 56{,}31^{\circ}$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\theta &= 56{,}31^{\circ} \\
\therefore m &= \tan\theta \\
&= \tan 56{,}31^{\circ} \\
\therefore m &= 1{,}5 \\
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y + 4 &= \frac{3}{2}(x + 4) \\
y &= \frac{3}{2}x + 6 - 4 \\
\therefore y &= \frac{3}{2}x + 2
\end{aligned}
$$

5. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(1;-6)$ gaan en loodreg is op die lyn $5y = x$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
5y &= x \\
y &= \frac{1}{5}x \\
\therefore m_1 &= \frac{1}{5} \\
\text{Vir } \perp\text{: } m_1 \times m_2 &= -1 \\
\frac{1}{5} \times m_2 &= -1 \\
\therefore m_2 &= -5 \\
y &= mx + c \\
y &= -5x + c \\
\text{Vervang } (1;-6): \quad -6 &= -5(1) + c \\
-6 &= -5 + c \\
\therefore c &= -1 \\
\therefore y &= -5x - 1
\end{aligned}$$

6. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(3;-1)$ gaan en loodreg is op die lyn met inklinasiehoek $\theta = 135°$.

Oplossing:

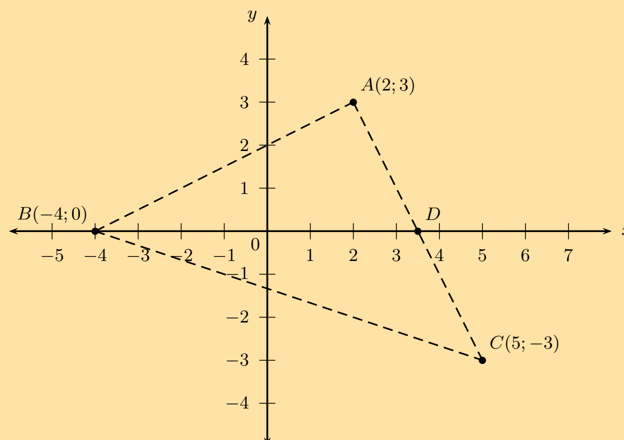
$$\begin{aligned}
\theta &= 135° \\
\therefore m_1 &= \tan\theta \\
&= \tan 135° \\
\therefore m_1 &= -1 \\
m_1 \times m_2 &= -1 \\
\therefore m_2 &= 1 \\
y &= mx + c \\
y &= x + c \\
\text{Vervang } (3;-1): \quad -1 &= (3) + c \\
\therefore c &= -4 \\
\therefore y &= x - 4
\end{aligned}$$

7. $A(2;3)$, $B(-4;0)$ en $C(5;-3)$ is die hoekpunte van $\triangle ABC$ in die Cartesiese vlak. AC kruis die x-as by D. Teken 'n skets en bepaal die volgende:

   a) die vergelyking van die lyn AC

      Oplossing:

      Teken 'n skets:



$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-3-3}{5-2} \\
&= \frac{-6}{3} \\
\therefore m &= -2 \\
y &= mx + c \\
\therefore y &= -2x + c \\
\text{Vervang } (2;3): \quad 3 &= -2(2) + c \\
\therefore c &= 7 \\
\therefore y &= -2x + 7
\end{aligned}
$$

b) die koördinate van punt D

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= -2x + 7 \\
0 &= -2x + 7 \\
\therefore x &= \frac{7}{2} \\
\therefore & D\left(\frac{7}{2};0\right)
\end{aligned}
$$

c) die inklinasiehoek van AC

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\therefore m &= -2 \\
\tan\theta &= m \\
\tan\theta &= -2 \\
\therefore \theta &= \tan^{-1}(-2) \\
\theta &= -63{,}4^\circ + 180^\circ \\
\therefore \theta &= 116{,}6^\circ
\end{aligned}
$$

d) die gradiënt van lyn AB

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{3-0}{2+4} \\
&= \frac{3}{6} \\
\therefore m &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

e) $B\hat{A}C$

Oplossing:

$B\hat{A}C = 90^\circ$ omdat $m_{AB} \times m_{AC} = -1$

f) die vergelyking van die lyn loodreg op AB en wat deur die oorsprong gaan

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m_{PQ} &= \frac{1}{2} \\
\therefore m_{\perp} &= -2 \\
y &= -2x + c \\
c &= 0 \\
\therefore y &= -2x
\end{aligned}
$$

g) die middelpunt M van BC

Oplossing:

$$\begin{aligned} M(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-4+5}{2};\frac{0-3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

h) die vergelyking van die lyn parallel aan AC en wat deur die punt M gaan

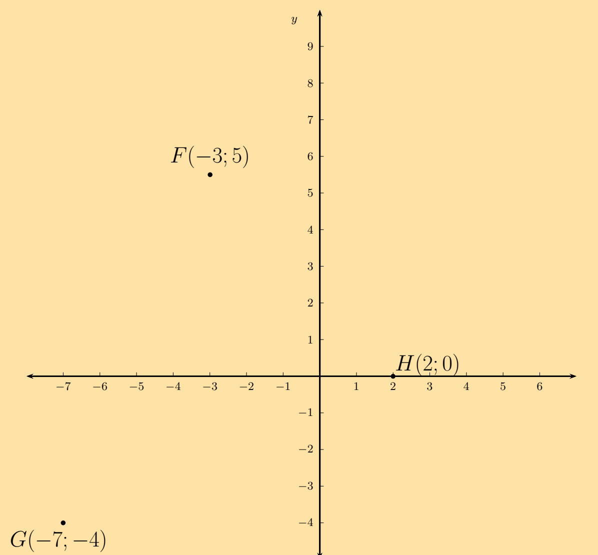
Oplossing:

$$\begin{aligned} m &= -2 \\ y &= mx+c \\ y &= -2x+c \\ \text{Vervang } \left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right): \quad -\frac{3}{2} &= -2\left(\frac{1}{2}\right)+c \\ c &= -\frac{1}{2} \\ y &= -2x-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

8. Punte $F(-3;5)$, $G(-7;-4)$ en $H(2;0)$ word gegee.

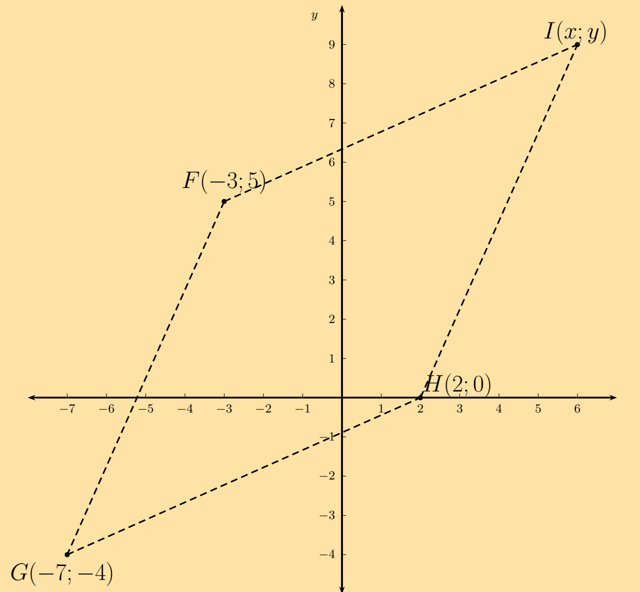
a) Stip die punte op die Cartesiese vlak.

Oplossing:



b) Bepaal die koördinate van I as $FGHI$ 'n parallelogram is.

Oplossing:



$$m_{GH} = \frac{-4-0}{-7-2}$$
$$= \frac{4}{9}$$
$$\therefore m_{FI} = \frac{4}{9}$$

$\therefore$ vanaf $F(-3;5)$: 9 eenhede na regs en 4 eenhede op

$$\therefore I = (6;9)$$

c) Bewys dat $FGHI$ 'n ruit is.

Oplossing:

$$FG = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-7-(-3))^2 + (-4-5)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-9)^2}$$
$$= \sqrt{16+81}$$
$$= \sqrt{97}$$
$$HG = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(2+7)^2 + (0+4)^2}$$
$$= \sqrt{(9)^2 + (4)^2}$$
$$= \sqrt{81+16}$$
$$= \sqrt{97}$$
$$\therefore FG = HG$$

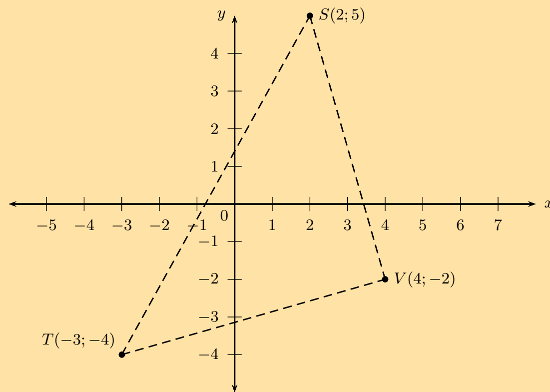
$\therefore FGHI$ is 'n rombus (parallelogram met aangrensende sye)

9. Gegewe punte $S(2;5)$, $T(-3;-4)$ en $V(4;-2)$.

a) Wys dat die vergelyking van ST $5y = 9x + 7$ is.

Oplossing:

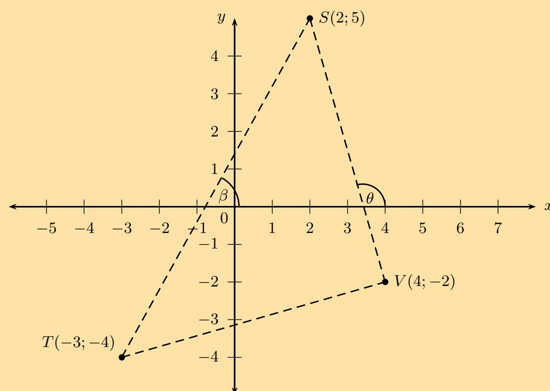
Teken 'n skets:



$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{5+4}{2+3} \\ &= \frac{9}{5} \\ y &= mx + c \\ y &= \frac{9}{5}x + c \\ \text{Vervang } S(2;5): \quad 5 &= \frac{9}{5}(2) + c \\ \therefore c &= \frac{7}{5} \\ \therefore y &= \frac{9}{5}x + \frac{7}{5} \\ \therefore 5y &= 9x + 7 \end{aligned}$$

b) Bepaal die grootte van $T\hat{S}V$.

Oplossing:



Laat die inklinasiehoek van lyn ST β wees.

Laat die inklinasiehoek van lyn SV θ wees.

$T\hat{S}V = \theta - \beta$. (buite $\angle$ van $\triangle$ = som van teenoorstaande binne $\angle$e)

$$m_{ST} = \frac{9}{5}$$
$$\tan\beta = \frac{9}{5}$$
$$\therefore \beta = \tan^{-1}\left(\frac{9}{5}\right)$$
$$= 60{,}9^\circ$$
$$m_{SV} = \frac{5+2}{2-4}$$
$$= \frac{7}{-2}$$
$$\tan\theta = -\frac{7}{2}$$
$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{7}{2}\right)$$
$$= -74{,}1^\circ + 180^\circ$$
$$= 105{,}9^\circ$$
$$\therefore T\hat{S}V = 105{,}9^\circ - 60{,}9^\circ$$
$$= 45^\circ$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BJQ 1b. 2BJR 1c. 2BJS 1d. 2BJT 1e. 2BJV 1f. 2BJW
1g. 2BJX 1h. 2BJY 2. 2BJZ 3. 2BK2 4. 2BK3 5. 2BK4
6. 2BK5 7. 2BK6 8. 2BK7 9. 2BK8

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

8.2 Vergelyking van 'n sirkel

Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by die oorsprong

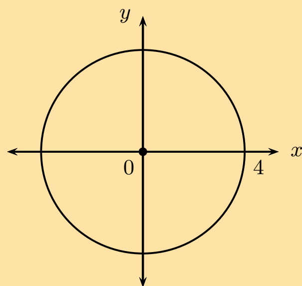
Oefening 8 – 3: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by die oorsprong

1. Voltooi die volgende vir elke sirkel hieronder gegee:
   - Bepaal die radius.
   - Teken 'n skets.
   - Bereken die koördinate van twee punte op die sirkel.

   a) $x^2 + y^2 = 16$

   Oplossing:

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$r^2 = 16$$
$$\therefore r = 4$$



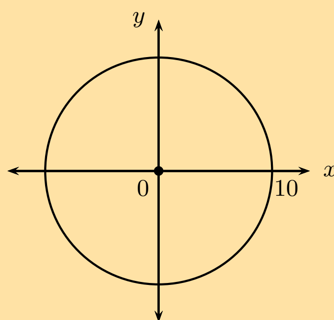
$$\text{As } x = 1$$
$$(1)^2 + y^2 = 16$$
$$y^2 = 15$$
$$\therefore y = \pm\sqrt{15}$$

Dit gee die punte $(1; \sqrt{15})$ en $(1; -\sqrt{15})$.

b) $x^2 + y^2 = 100$

Oplossing:

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$r^2 = 100$$
$$\therefore r = 10$$



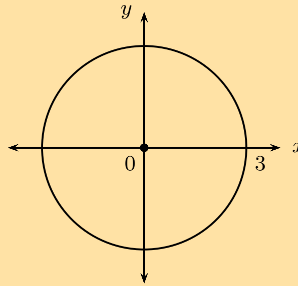
$$\text{As } x = 2$$
$$(2)^2 + y^2 = 100$$
$$y^2 = 96$$
$$\therefore y = \pm\sqrt{96}$$

Dit gee die punte $(2; \sqrt{96})$ en $(2; -\sqrt{96})$.

c) $3x^2 + 3y^2 = 27$

Oplossing:

$$3x^2 + 3y^2 = 27$$
$$x^2 + y^2 = 9$$
$$r^2 = 9$$
$$\therefore r = 3$$



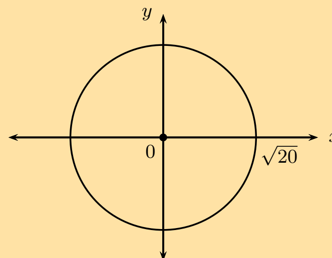
$$\text{As } x = 1$$
$$(1)^2 + y^2 = 9$$
$$y^2 = 8$$
$$\therefore y = \pm\sqrt{8}$$

Dit gee die punte $(1; \sqrt{8})$ en $(1; -\sqrt{8})$

d) $y^2 = 20 - x^2$

Oplossing:

$$x^2 + y^2 = 20$$
$$r^2 = 20$$
$$\therefore r = \sqrt{20}$$



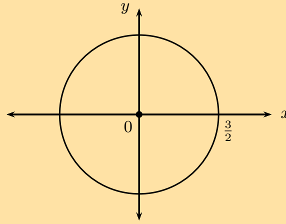
$$\text{As } x = 2$$
$$(2)^2 + y^2 = 20$$
$$y^2 = 16$$
$$\therefore y = \pm 4$$

Dit gee die punte $(2; 4)$ en $(2; -4)$

e) $x^2 + y^2 = 2{,}25$

Oplossing:

$$x^2 + y^2 = 2{,}25$$
$$\text{Skakel om na 'n breuk:} \quad 2{,}25 = \frac{225}{100} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}$$
$$\therefore x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$
$$r^2 = \frac{9}{4}$$
$$\therefore r = \frac{3}{2}$$



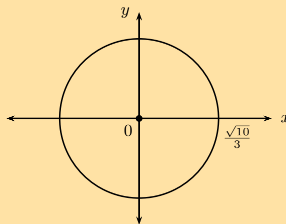
$$\text{As } x = 1$$
$$(1)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$
$$y^2 = \frac{5}{4}$$
$$\therefore y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Dit gee die punte $\left(1; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ en $\left(1; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

f) $y^2 = -x^2 + \frac{10}{9}$

Oplossing:

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{9}$$
$$r^2 = \frac{10}{9}$$
$$\therefore r = \frac{\sqrt{10}}{3}$$



$$\text{As } x = 1$$
$$(1)^2 + y^2 = \frac{10}{9}$$
$$y^2 = \frac{1}{9}$$
$$\therefore y = \pm\frac{1}{3}$$

Dit gee die punte $\left(1; \frac{1}{3}\right)$ en $\left(1; -\frac{1}{3}\right)$.

2. Bepaal die vergelyking van die sirkel:

a) met middelpunt by die oorsprong en 'n radius van 5 eenhede.
Oplossing: $x^2 + y^2 = 25$

b) met middelpunt by $(0; 0)$ en $r = \sqrt{11}$ eenhede.
Oplossing: $x^2 + y^2 = 11$

c) wat deur die punt $(3; 5)$ gaan en met middelpunt $(0; 0)$.
Oplossing:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(3)^2 + (5)^2 = r^2$$
$$34 = r^2$$
$$\therefore x^2 + y^2 = 34$$

d) gesentreer by die oorsprong en $r = 2{,}5$ eenhede.

Oplossing:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = (2{,}5)^2$$
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$$

e) met middelpunt by die oorsprong en 'n middellyn van 30 eenhede.

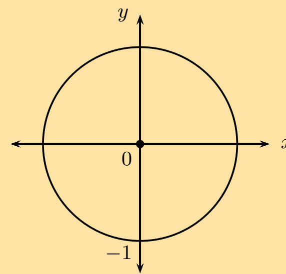
Oplossing:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$r = \frac{30}{2} = 15$$
$$x^2 + y^2 = (15)^2$$
$$x^2 + y^2 = 225$$

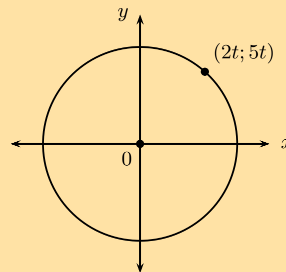
f) wat deur die punt $(p; 3q)$ gaan en met die middelpunt by die oorsprong.

Oplossing:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(p)^2 + (3q)^2 = r^2$$
$$p^2 + 9q^2 = r^2$$
$$\therefore x^2 + y^2 = p^2 + 9q^2$$

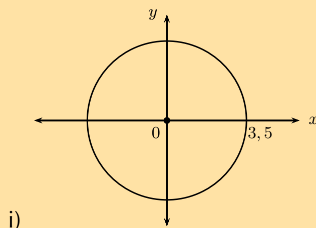
g) 

Oplossing: $x^2 + y^2 = 1$

h) 

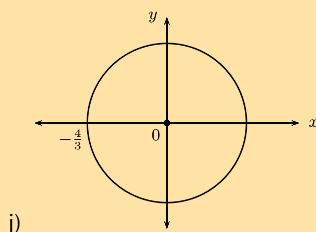
Oplossing:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(2t)^2 + (5t)^2 = r^2$$
$$4t^2 + 25t^2 = r^2$$
$$29t^2 = r^2$$
$$\therefore x^2 + y^2 = 29t^2$$

i) 

Oplossing:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = (3{,}5)^2$$
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$\therefore x^2 + y^2 = \frac{49}{4}$$

j) 

Oplossing:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2$$
$$\therefore x^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

3. Bepaal of die volgende vergelykings 'n sirkel verteenwoordig of nie:

   a) $x^2 + y^2 - 8 = 0$

      Oplossing: Ja: $x^2 + y^2 = 8$

   b) $y^2 - x^2 + 25 = 0$

      Oplossing: Nee, kan nie in die vorm geskryf word nie.

   c) $3x^2 + 6y^2 = 18$

      Oplossing: Nee, kan nie in die vorm $x^2 + y^2 = r^2$ geskryf word nie.

   d) $x^2 = \sqrt{6} - y^2$

      Oplossing: Ja: $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$

   e) $y(y + x) = -x(x - y) + 11$

      Oplossing: Ja: $x^2 + y^2 = 11$

   f) $\sqrt{80} + x^2 - y^2 = 0$

      Oplossing: Nee, kan nie in die vorm $x^2 + y^2 = r^2$ geskryf word nie.

   g) $\frac{y^2}{3} + \frac{x^2}{3} = 3$

      Oplossing: Ja: $x^2 + y^2 = 9$

4. Bepaal die waarde(s) van g as $\left(\sqrt{3}; g\right)$ 'n punt op die sirkel $x^2 + y^2 = 19$ is.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 19 \\
\left(\sqrt{3}\right)^2 + (g)^2 &= 19 \\
g^2 &= 19 - 3 \\
\therefore g^2 &= 16 \\
\therefore g &= \pm 4
\end{aligned}
$$

Dit gee die punte $\sqrt{3}; 4$ en $\sqrt{3}; -4$

5. $A(s;t)$ is 'n punt op die sirkel met middelpunt by die oorsprong en 'n middellyn van 40 cm.

   a) Bepaal die moontlike koördinate van A as die waarde van s drie maal die waarde van t is.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
d &= 40 \\
r &= \frac{d}{2} \\
&= \frac{40}{2} \\
&= 20
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s &= 3t \\
x^2 + y^2 &= r^2 \\
(3t)^2 + (t)^2 &= (20)^2 \\
9t^2 + t^2 &= 400 \\
10t^2 &= 400 \\
t^2 &= 40 \\
\therefore t &= \pm\sqrt{40} \\
&= \pm\sqrt{4\,.\,10} \\
&= \pm 2\sqrt{10} \\
\therefore s &= 3t \\
&= 3\left(\pm 2\sqrt{10}\right) \\
&= \pm 6\sqrt{10}
\end{aligned}
$$

   Daarom, $A(6\sqrt{10}; 2\sqrt{10})$ of $A(-6\sqrt{10}; -2\sqrt{10})$

   b) Bepaal die moontlike koördinate van A as die waarde van s helfte van die waarde van t is.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
d &= 40 \\
r &= \frac{d}{2} \\
&= \frac{40}{2} \\
&= 20
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{t}{2} \\
x^2 + y^2 &= r^2 \\
\left(\frac{t}{2}\right)^2 + (t)^2 &= (20)^2 \\
\frac{t^2}{4} + t^2 &= 400 \\
\frac{t^2}{4} + \frac{4t^2}{4} &= 400 \\
5t^2 &= 1600 \\
t^2 &= 320 \\
\therefore t &= \pm\sqrt{320} \\
&= \pm\sqrt{64\ .\ 5} \\
&= \pm 8\sqrt{5} \\
\therefore s &= \frac{t}{2} \\
&= \frac{\pm 8\sqrt{5}}{2} \\
&= \pm 4\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

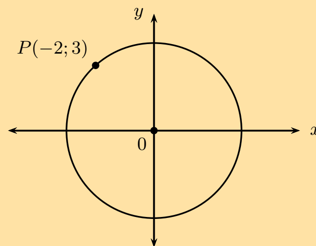
Daarom, $A(4\sqrt{5}; 8\sqrt{5})$ of $A(-4\sqrt{5}; -8\sqrt{5})$

6. $P(-2; 3)$ lê op 'n sirkel met middelpunt by $(0; 0)$.

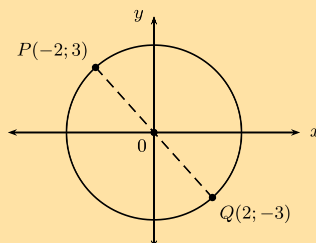
   a) Bepaal die vergelyking van die sirkel.
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 \\
(-2)^2 + (3)^2 &= r^2 \\
4 + 9 &= r^2 \\
13 &= r^2 \\
x^2 + y^2 &= 13
\end{aligned}
$$

   b) Skets die sirkel en benoem punt P.
   Oplossing:



   c) As PQ 'n middellyn van die sirkel is, bepaal die koördinate van Q.
   Oplossing:
   As PQ 'n middellyn van die sirkel is, dan moet punt Q aan die oorkant van punt P op die omtrek van die sirkel lê. Deur simmetrie om die oorsprong te, gebruik bepaal ons dat die koördinate van punt Q $(2; -3)$ is.



d) Bereken die lengte van PQ.

Oplossing:

$$\begin{aligned} r^2 &= 13 \\ \therefore r &= \sqrt{13} \\ \text{En } d &= 2 \times r \\ &= 2\sqrt{13} \text{ eenhede} \end{aligned}$$

Alternatief: gebruik die afstandformule

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-2-2)^2 + (3-(-3))^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (6)^2} \\ &= \sqrt{16 + 36} \\ &= \sqrt{52} \\ &= \sqrt{4\ .\ 13} \\ &= 2\sqrt{13} \text{ eenhede} \end{aligned}$$

e) Bepaal die vergelyking van die lyn PQ.

Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{PQ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{3-(-3)}{-2-2} \\ &= \frac{6}{-4} \\ &= -\frac{3}{2} \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - y_1 &= -\frac{3}{2}(x - x_1) \\ \text{Vervang } P(-2;3) \quad y - 3 &= -\frac{3}{2}(x-(-2)) \\ y - 3 &= -\frac{3}{2}x - 3 \\ \therefore y &= -\frac{3}{2}x \end{aligned}$$

PQ gaan deur die oorsprong, daarom $c = 0$.

f) Bepaal die vergelyking van die lyn loodreg op PQ wat deur die punt P gaan.

Oplossing:

Vir loodregte lyne:

$$m_{PQ} \times m_{\perp} = -1$$
$$-\frac{3}{2} \times m_{\perp} = -1$$
$$m_{\perp} = \frac{2}{3}$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - y_1 = \frac{2}{3}(x - x_1)$$
$$\text{Vervang } P(-2;3) \quad y - 3 = \frac{2}{3}(x - (-2))$$
$$y - 3 = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + \frac{9}{3}$$
$$= \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BK9	1b. 2BKB	1c. 2BKC	1d. 2BKD	1e. 2BKF	1f. 2BKG
2a. 2BKH	2b. 2BKJ	2c. 2BKK	2d. 2BKM	2e. 2BKN	2f. 2BKP
2g. 2BKQ	2h. 2BKR	2i. 2BKS	2j. 2BKT	3a. 2BKV	3b. 2BKW
3c. 2BKX	3d. 2BKY	3e. 2BKZ	3f. 2BM2	3g. 2BM3	4. 2BM4
5. 2BM5	6. 2BM6				

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by $(a; b)$

Oefening 8 – 4: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by $(a; b)$

1. Bepaal of elkeen van die volgende vergelykings 'n sirkel voorstel of nie. Indien nie, gee 'n rede.

   a) $x^2 + y^2 + 6y - 10 = 0$

      Oplossing: Ja

   b) $3x^2 - 35 + 3y^2 = 9y$

      Oplossing: Ja

   c) $40 = x^2 + 2x + 4y^2$

      Oplossing: Nee, koëffisiënte van x^2 term en y^2 is verskillend.

   d) $x^2 - 4x = \sqrt{21} + 5y + y^2$

      Oplossing: Nee, kan nie in die algemene vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ geskryf word nie

   e) $3\sqrt{7} - x^2 - y^2 + 6y - 8x = 0$

      Oplossing: Ja

   f) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 9 = 0$

      Oplossing: Nee, r^2 moet groter as nul wees.

2. Skryf die vergelyking vir die sirkel neer:

   a) met middelpunt $(0; 4)$ en 'n radius van 3 eenhede.

      Oplossing: $x^2 + (y - 4)^2 = 9$

   b) sodat $r = 5$ en die middelpunt die oorsprong is.

Oplossing: $x^2 + y^2 = 25$

c) met middelpunt $(-2; 3)$ en wat deur die punt $(4; 5)$ loop.

Oplossing:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\ (x-(-2))^2 + (y-3)^2 &= r^2 \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 &= r^2 \\ \text{Vervang } (4;5): \quad (4+2)^2 + (5-3)^2 &= r^2 \\ (6)^2 + (2)^2 &= r^2 \\ 36 + 4 &= r^2 \\ 40 &= r^2 \\ \therefore (x+2)^2 + (y-3)^2 &= 40 \end{aligned}$$

d) met middelpunt $(p; -q)$ en $r = \sqrt{6}$.

Oplossing: $(x-p)^2 + (y+q)^2 = 6$

e) met $r = \sqrt{10}$ en middelpunt $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Oplossing: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 10$

f) met middelpunt $(1; -5)$ wat deur die oorsprong gaan.

Oplossing:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\ (x-1)^2 + (y-(-5))^2 &= r^2 \\ (x-1)^2 + (y+5)^2 &= r^2 \\ \text{Vervang } (0;0): \quad (0-1)^2 + (0+5)^2 &= r^2 \\ 1 + 25 &= r^2 \\ 26 &= r^2 \\ \therefore (x-1)^2 + (y+5)^2 &= 26 \end{aligned}$$

3. Bepaal die middelpunt en die lengte van die radius vir die volgende sirkels:

a) $x^2 = 21 - y^2 + 4y$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 &= 21 - y^2 + 4y \\ x^2 + y^2 - 4y &= 21 \\ x^2 + (y^2 - 4y + 4) - 4 &= 21 \\ x^2 + (y-2)^2 &= 25 \end{aligned}$$

middelpunt: $(0; 2)$, $r = 5$ eenhede

b) $y^2 + x + x^2 - \frac{15}{4} = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y^2 + x + x^2 - \frac{15}{4} &= 0 \\ x^2 + x + y^2 &= \frac{15}{4} \\ \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + y^2 &= \frac{15}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{16}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

middelpunt: $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $r = 2$ eenhede

c) $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 5 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 2y - 5 &= 0 \\ (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 5 &= 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 - 10 &= 0 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 10 \end{aligned}$$

middelpunt: $(2; -1)$, $r = \sqrt{10}$ eenhede

d) $x^2 + y^2 - 6y + 2x - 15 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 - 6y &= 15 \\ (x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 - 6y + 9) - 9 &= 15 \\ (x+1)^2 + (y-3)^2 &= 25 \end{aligned}$$

middelpunt: $(-1; 3)$, $r = 5$ eenhede

e) $5 - x^2 - 6x - 8y - y^2 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 5 - x^2 - 6x - 8y - y^2 &= \\ x^2 + 6x + y^2 + 8y &= 5 \\ (x^2 + 6x + 9) - 9 + (y^2 + 8y + 16) - 16 &= 5 \\ (x+3)^2 + (y+4)^2 &= 30 \end{aligned}$$

middelpunt: $(-3; -4)$, $r = \sqrt{30}$ eenhede

f) $x^2 - \frac{2}{3}x + y^2 - 4y = \frac{35}{9}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{2}{3}x + y^2 - 4y &= \frac{35}{9} \\ \left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9} + (y^2 - 4y + 4) - 4 &= \frac{35}{9} \\ \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y-2)^2 &= \frac{35}{9} + \frac{1}{9} + 4 \\ \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y-2)^2 &= 8 \end{aligned}$$

middelpunt: $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$, $r = \sqrt{8}$ eenhede

g) $16x + 2y^2 - 20y + 2x^2 + 42 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 16x + 2y^2 - 20y + 2x^2 + 42 &= 0 \\ 2x^2 + 16x + 2y^2 - 20y &= -42 \\ x^2 + 8x + y^2 - 10y &= -21 \\ (x^2 + 8x + 16) - 16 + (y^2 - 10y + 25) - 25 &= -21 \\ (x+4)^2 + (y-5)^2 &= 20 \end{aligned}$$

middelpunt: $(-4; 5)$, $r = \sqrt{20}$ eenhede

h) $6x - 6y - x^2 - y^2 = 6$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
6x - 6y - x^2 - y^2 &= 6 \\
x^2 - 6x + y^2 + 6y &= -6 \\
(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 6y + 9) - 9 &= -6 \\
(x-3)^2 + (y+3)^2 &= 12
\end{aligned}$$

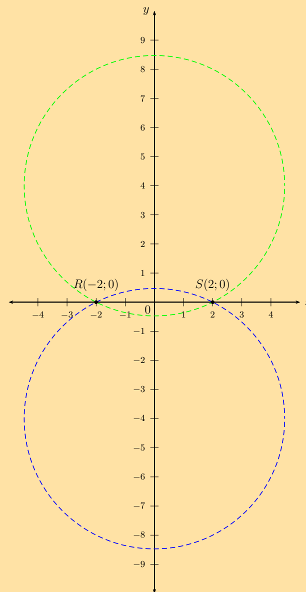
middelpunt: $(3;-3)$, $r = \sqrt{12}$ eenhede

4. 'n Sirkel sny die x-as by $R(-2;0)$ en $S(2;0)$. As $r = \sqrt{20}$ eenhede, bepaal die moontlike vergelyking(s) van die sirkel. Teken 'n skets.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\
(x-a)^2 + (y-b)^2 &= 20 \\
\text{Vervang } R(-2;0): \quad (-2-a)^2 + (0-b)^2 &= 20 \\
4 + 4a + a^2 + b^2 &= 20 \\
4a + a^2 + b^2 &= 16 \ldots (1) \\
\text{Vervang } S(2;0): \quad (2-a)^2 + (0-b)^2 &= 20 \\
4 - 4a + a^2 + b^2 &= 20 \\
-4a + a^2 + b^2 &= 16 \ldots (2) \\
(1) - (2): \quad 4a - (-4a) &= 0 \\
8a &= 0 \\
\therefore a &= 0 \\
\text{En } b^2 &= 16 \\
\therefore b &= \pm 4
\end{aligned}$$

Die vergelyking van die sirkel wat deur die punte R en S gaan is $x^2 + (y-4)^2 = 20$ of $x^2 + (y+4)^2 = 20$.



5. $P(1;2)$ en $Q(-5;-6)$ is punte op 'n sirkel sodat PQ 'n middellyn is. Bepaal die vergelyking van die sirkel.

Oplossing:

Gebruik die afstandformule om die lengte van die middellyn te bepaal.

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-5-1)^2 + (-6-2)^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36+64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \\ \text{En } r &= \frac{1}{2} \times \text{ middellyn} \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \\ &= 5 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 &= (5)^2 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Gegee PQ is 'n middellyn van die sirkel, dan is die middelpunt van die sirkel die middelpunt van PG:

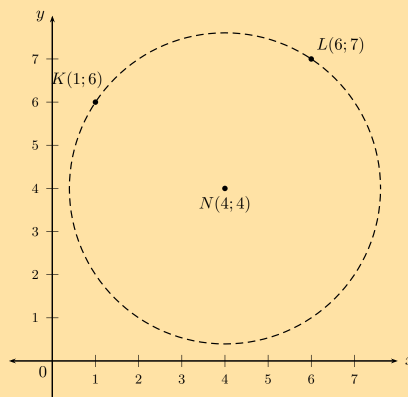
$$\begin{aligned} M(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1-5}{2}; \frac{2-6}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-4}{2}; \frac{-4}{2}\right) \\ &= (-2;-2) \end{aligned}$$

Daarom is die middelpunt $(-2;-2)$ en die vergelyking van die sirkel is $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$.

6. 'n Sirkel met middelpunt $N(4;4)$ loop deur die punte $K(1;6)$ en $L(6;7)$.

   a) Bepaal die vergelyking van die sirkel.

   Oplossing:



$$
\begin{aligned}
(x-a)^2+(y-b)^2 &= r^2 \\
(x-4)^2+(y-4)^2 &= r^2 \\
\text{Vervang } K(1;6): \quad (1-4)^2+(6-4)^2 &= r^2 \\
(-3)^2+(2)^2 &= r^2 \\
9+4 &= r^2 \\
13 &= r^2 \\
\therefore (x-4)^2+(y-4)^2 &= 13 \\
\text{Of vervang } L(6;7): \quad (6-4)^2+(7-4)^2 &= r^2 \\
(2)^2+(3)^2 &= r^2 \\
4+9 &= r^2 \\
13 &= r^2 \\
\therefore (x-4)^2+(y-4)^2 &= 13
\end{aligned}
$$

Die vergelyking van die sirkel is $(x-4)^2+(y-4)^2=13$.

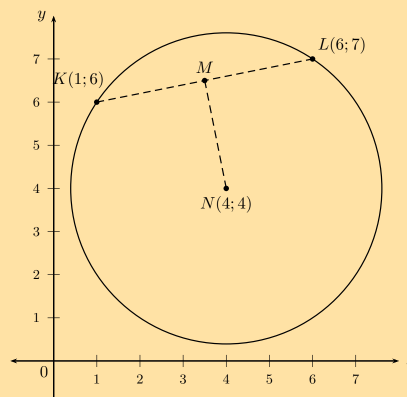
b) Bepaal die koördinate van M, die middelpunt van KL.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1+6}{2};\frac{6+7}{2}\right) \\
&= \left(\frac{7}{2};\frac{13}{2}\right)
\end{aligned}
$$

c) Wys dat $MN \perp KL$.

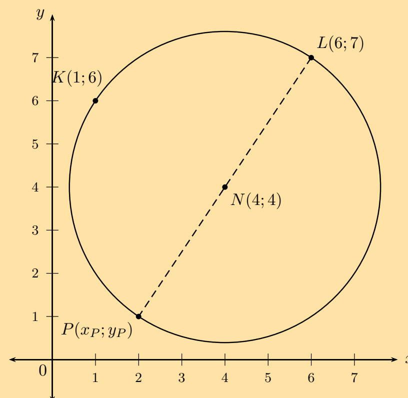
Oplossing:



$$
\begin{aligned}
m_{KL} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{7-6}{6-1} \\
&= \frac{1}{5} \\
m_{MN} &= \frac{\frac{13}{2} - 4}{\frac{7}{2} - 4} \\
&= \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{5}{2} \times \frac{2}{1} \\
&= -5 \\
\therefore m_{MN} \times m_{KL} &= -5 \times \frac{1}{5} \\
&= -1 \\
\therefore MN &\perp KL
\end{aligned}
$$

d) As P 'n punt op die sirkel is sodat LP 'n middellyn is, bepaal die koördinate van P.

Oplossing:



Gebruik die middelpuntformule om die koördinate van P te bereken:

$$
\begin{aligned}
(x; y) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\
N(4; 4) &= \left(\frac{x_P + 6}{2}; \frac{y_P + 7}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore 4 &= \frac{x_P + 6}{2} \\
8 &= x_P + 6 \\
x_P &= 2 \\
\text{En } 4 &= \frac{y_P + 7}{2} \\
8 &= y_P + 7 \\
y_P &= 1 \\
&\therefore P(2; 1)
\end{aligned}
$$

e) Bepaal die vergelyking van lyn LP.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m_{LP} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{7-1}{6-2} \\
&= \frac{6}{4} \\
&= \frac{3}{2} \\
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - y_1 &= \frac{3}{2}(x - x_1) \\
\text{Vervang } L(6;7) y - 7 &= \frac{3}{2}(x - 6) \\
y &= \frac{3}{2}x - 9 + 7 \\
y &= \frac{3}{2}x - 2
\end{aligned}
$$

7. 'n Sirkel gaan deur die punt $A(7;-4)$ en $B(-5;-2)$. As die middelpunt op die lyn $y + 5 = 2x$ lê, bepaal die vergelyking van die sirkel.

Oplossing:

Gegee dat die middelpunt van die sirkel op die lyn $y = 2x - 5$ lê. Ons kan die koördinate van die sirkel as $(p; 2p - 5)$ skryf en die vergelyking van die sirkel word:

$$
\begin{aligned}
(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\
(x-p)^2 + (y-(2p-5))^2 &= r^2 \\
(x-p)^2 + (y-2p+5)^2 &= r^2 \\
\text{Vervang } A(7;4): \quad (7-p)^2 + (-4-2p+5)^2 &= r^2 \\
(7-p)^2 + (1-2p)^2 &= r^2 \\
49 - 14p + p^2 + 1 - 4p + 4p^2 &= r^2 \\
5p^2 - 18p + 50 &= r^2 \ldots (1) \\
\text{Vervang } B(-5;-2): \quad (-5-p)^2 + (-2-2p+5)^2 &= r^2 \\
(-5-p)^2 + (3-2p)^2 &= r^2 \\
25 + 10p + p^2 + 9 - 12p + 4p^2 &= r^2 \\
5p^2 - 2p + 34 &= r^2 \ldots (2) \\
(1) - (2): \quad -16p + 16 &= 0 \\
-16p &= -16 \\
\therefore p = x &= 1 \\
\text{En } y &= 2(1) - 5 \\
&= -3 \\
\text{En } r^2 &= 5(1)^2 - 2(1) + 34 \\
&= 5 - 2 + 34 \\
\therefore r^2 &= 37
\end{aligned}
$$

Die vergelyking van die sirkel is $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 37$

8. 'n Sirkel met middelpunt $(0;0)$ gaan deur punt $T(3;5)$.

   a) Bepaal die vergelyking van die sirkel.

   Oplossing:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(3)^2 + (5)^2 = r^2$$
$$9 + 25 = r^2$$
$$34 = r^2$$
$$\therefore x^2 + y^2 = 34$$

b) As die sirkel 2 eenhede na regs en 3 eenhede afgeskuif word, bepaal die nuwe vergelyking vir die sirkel.

Oplossing:

$$x^2 + y^2 = 34$$

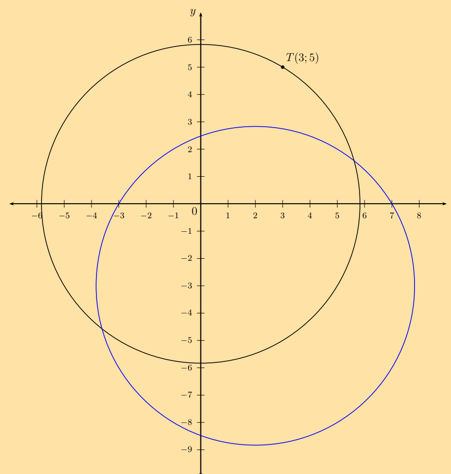
Horisontale skuif: x word vervang deur $x - 2$

Vertikale skuif: y word vervang deur $y + 3$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+3)^2 = 34$$

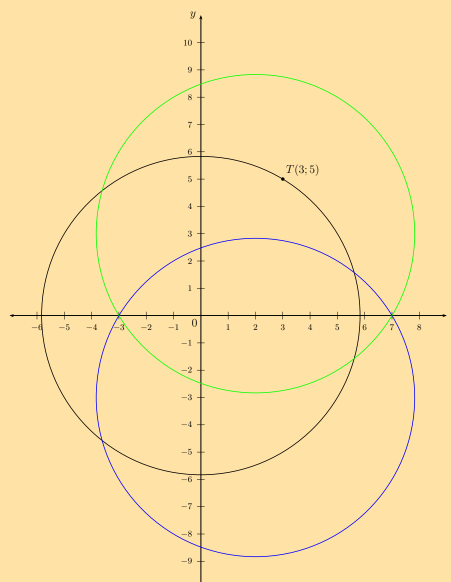
c) Teken 'n skets van die oorspronklike sirkel en die geskuifde sirkel op dieselfde stel asse.

Oplossing:



d) Op dieselfde stel asse as die vorige vraag, teken 'n skets van die geskuifde sirkel gereflekteer om die x-as. Skryf die koördinate van die middelpunt van die sirkel neer.

Oplossing:



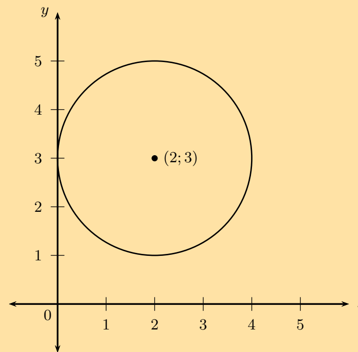
Middelpunt van die geskuifde sirkel: $(2;3)$

9. Bepaal of die sirkel $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$ die x-as en die y-as sny, raak of nie sny nie.

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 &= 0 \\ (x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 &= -9 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 4 \\ \therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 &= 4 \end{aligned}$$

Die radius van die sirkel is 2 eenhede. Die afstand van die middelpunt tot die y-as is 2 eenhede, daarom sal die sirkel die y-as raak. Die afstand van middelpunt tot die x-as is 3 eenhede, daarom sal die sirkel nie die x-as sny nie.



Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BM8	1b. 2BM9	1c. 2BMB	1d. 2BMC	1e. 2BMD	1f. 2BMF
2a. 2BMG	2b. 2BMH	2c. 2BMJ	2d. 2BMK	2e. 2BMM	2f. 2BMN
3a. 2BMP	3b. 2BMQ	3c. 2BMR	3d. 2BMS	3e. 2BMT	3f. 2BMV
3g. 2BMW	3h. 2BMX	4. 2BMY	5. 2BMZ	6. 2BN2	7. 2BN3
8. 2BN4	9. 2BN5				

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

8.3 Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel

Oefening 8 – 5: Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel

1. a) 'n Sirkel met middelpunt $(8;-7)$ en die punt $(5;-5)$ op die sirkel word gegee. Bepaal die gradiënt van die radius na hierdie punt.

   Oplossing:

   Gegee

   - die middelpunt van die sirkel is $(a;b) = (8;-7)$
   - 'n punt op die omtrek van die sirkel $(x_1;y_1) = (5;-5)$

   Gevra:

   - die gradiënt van die radius, m

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-5 + 7}{5 - 8} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Die gradiënt van die radius is $m = -\frac{2}{3}$.

b) Bepaal die gradiënt van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(5; -5)$.

Oplossing:

Die raaklyn aan die sirkel by die punt $(5; -5)$ is loodreg op die radius van die sirkel by dieselfde punt: $m \times m_{\perp} = -1$.

$$\begin{aligned} m_{\perp} &= -\frac{1}{m} \\ &= \frac{-1}{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Die gradiënt vir die raaklyn is $m_{\perp} = \frac{3}{2}$.

2. Gegee die vergelyking vir die sirkel: $(x + 4)^2 + (y + 8)^2 = 136$

a) Vind die gradiënt van die radius by die punt $(2; 2)$ op die sirkel.

Oplossing:

Gegee

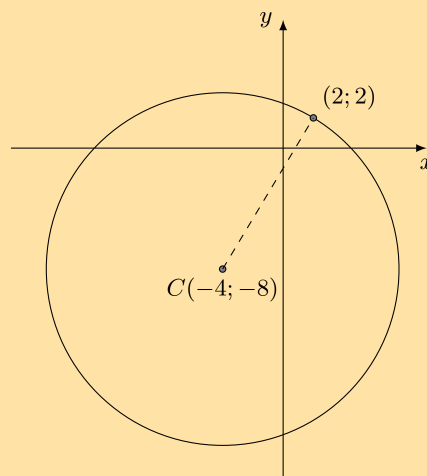
- die vergelyking van die sirkel $(x + 4)^2 + (y + 8)^2 = 136$
- 'n punt op die omtrek van die sirkel $(x_1; y_1) = (2; 2)$

Gevra:

- die gradiënt van die radius, m

Die koördinate van die middelpunt van die sirkel is $(-4; -8)$.

Teken 'n rowwe skets:



$$\begin{aligned} m &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{2 + 8}{2 + 4} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Die gradiënt van die radius is $m = \frac{5}{3}$.

b) Bepaal die gradiënt van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(2;2)$.

Oplossing:

Gegee:

Die raaklyn aan die sirkel by die punt $(2;2)$ is loodreg op die radius, dus is $m \times m_{\text{tangent}} = -1$

$$\begin{aligned} m_{\text{tangent}} &= -\frac{1}{m} \\ &= -\frac{1}{\frac{5}{3}} \\ &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Die gradiënt vir die raaklyn is $m_{\text{tangent}} = -\frac{3}{5}$.

3. Gegee 'n sirkel met die middelpuntkoördinate $(a;b) = (-9;6)$. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(-2;5)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{5-6}{-2-(-9)} \\ &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

Die raaklyn is loodreg op die radius dus is $m \times m_{\perp} = -1$.

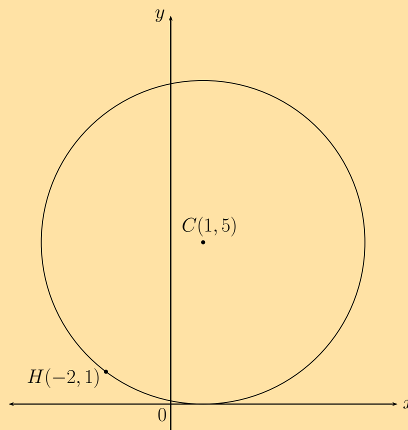
$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{m_r} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{7}} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Skryf die vergelyking vir 'n reguitlyn neer en vervang $m = 7$ en $(-2;5)$.

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + c \\ 5 &= 7(-2) + c \\ c &= 19 \end{aligned}$$

Die vergelyking vir die raaklyn aan die sirkel is $y = 7x + 19$.

4. Gegee die diagram hieronder:



Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel met middelpunt C by die punt H.

Oplossing:

Gegee

- die middelpunt van die sirkel is $C(a;b) = (1;5)$
- 'n punt op die omtrek van die sirkel is $H(-2;1)$

Gevra:

- die vergelyking vir die raaklyn aan die sirkel in die vorm $y = mx + c$

Bereken die gradiënt van die radius:

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{1-5}{-2-1} \\ &= \frac{-4}{-3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_r \times m &= -1 \\ m &= -\frac{1}{m_r} \\ &= -\frac{1}{\frac{4}{3}} \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Vergelyking van die raaklyn:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ 1 &= -\frac{3}{4}(-2) + c \\ 1 &= \frac{3}{2} + c \\ c &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by die punt H, is:

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

5. Gegee die punt $P(2;-4)$ op die sirkel $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 5$. Vind die vergelyking van die raaklyn by P.

Oplossing:

Gegee

- die vergelyking van die sirkel $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 5$
- 'n punt op die omtrek van die sirkel $P(2;-4)$

Gevra:

- die vergelyking in die vorm $y = mx + c$

Die koördinate van die middelpunt van die sirkel is $(a;b) = (4;-5)$.
Die gradiënt van die radius:

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{-4-(-5)}{2-4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \times m_{\perp} &= -1 \\ \therefore m_{\perp} &= -\frac{1}{m_r} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

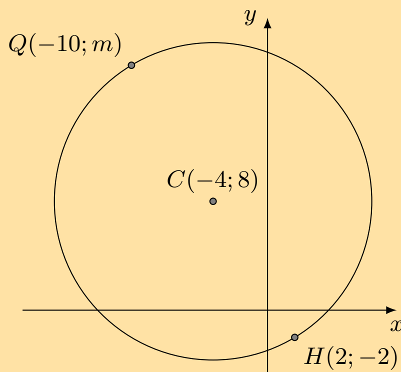
Vergelyking van die raaklyn:

$$\begin{aligned} y &= m_{\perp}x + c \\ -4 &= 2(2) + c \\ c &= -8 \end{aligned}$$

Die vergelyking van die raaklyn is

$$y = 2x - 8$$

6. $C(-4;8)$ is die middelpunt van die sirkel wat deur $H(2;-2)$ en $Q(-10;m)$ gaan.



a) Bepaal die vergelyking van die sirkel.
Oplossing:
Gebruik die afstandformule om die lengte van die radius te bepaal:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \\ &= \sqrt{(2+4)^2 + (-2-8)^2} \\ &= \sqrt{(6)^2 + (-10)^2} \\ &= \sqrt{136} \end{aligned}$$

Skryf die algemene vergelyking van 'n sirkel en vervang r en $H(2;-2)$:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\ (x-(-4))^2 + (y-(8))^2 &= (\sqrt{136})^2 \\ (x+4)^2 + (y-8)^2 &= 136 \end{aligned}$$

Die vergelyking van die sirkel is $(x+4)^2 + (y-8)^2 = 136$.

b) Bepaal die waarde van m.

Oplossing:

Vervang die $Q(-10;m)$ en los op vir die m waarde.

$$\begin{aligned}(x+4)^2+(y-8)^2&=136\\(-10+4)^2+(m-8)^2&=136\\36+(m-8)^2&=136\\m^2-16m+100&=136\\m^2-16m-36&=0\\(m+2)(m-18)&=0\end{aligned}$$

Die oplossing wys dat $y=-2$ of $y=18$. Vanuit die grafiek sien ons dat die y-koördinaat van Q positief moet wees, daarom is $Q(-10;18)$.

c) Bepaal die vergelyking vir die raaklyn aan die sirkel by punt Q.

Oplossing:

Bereken die gradiënt van die radius:

$$\begin{aligned}m_r&=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}\\&=\frac{18-8}{-10+4}\\&=-\frac{10}{6}\\&=-\frac{5}{3}\end{aligned}$$

Die radius is loodreg op die raaklyn, dus $m\times m_{\perp}=-1$.

$$\begin{aligned}m_{\perp}&=-\frac{1}{m_r}\\&=\frac{1}{\frac{5}{3}}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

Die vergelyking van die raaklyn aan 'n sirkel by die punt Q, is:

$$\begin{aligned}y&=m_{\perp}x+c\\18&=\frac{3}{5}(-10)+c\\18&=-6+c\\c&=24\end{aligned}$$

$$y=\frac{3}{5}x+24$$

7. Die reguitlyn $y=x+2$ sny die sirkel $x^2+y^2=20$ by P en Q.

a) Bereken die koördinate van P en Q.

Oplossing:

Vervang die reguitlyn $y=x+2$ in die vergelyking van die sirkel en los op vir x:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 20 \\
x^2 + (x+2)^2 &= 20 \\
x^2 + x^2 + 4x + 4 &= 20 \\
2x^2 + 4x - 16 &= 0 \\
x^2 + 2x - 8 &= 0 \\
(x-2)(x+4) &= 0 \\
\therefore x = 2 &\text{ of } x = -4 \\
\text{As } x = 2 \quad & y = 2 + 2 = 4 \\
\text{As } x = -4 \quad & y = -4 + 2 = -2
\end{aligned}
$$

Dit gee die punte $P(-4;-2)$ en $Q(2;4)$.

b) Bepaal die lengte van PQ.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(-4-2)^2 + (-2-4)^2} \\
&= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} \\
&= \sqrt{36 + 36} \\
&= \sqrt{36 \,.\, 2} \\
&= 6\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

c) Bepaal die koördinate van M, die middelpunt van koord PQ.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-4+2}{2}; \frac{-2+4}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-2}{2}; \frac{2}{2}\right) \\
&= (-1; 1)
\end{aligned}
$$

d) As O die middelpunt van die sirkel is, wys dat $PQ \perp OM$.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m_{PQ} &= \frac{4-(-2)}{2-(-4)} \\
&= \frac{6}{6} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{OM} &= \frac{1-0}{-1-0} \\
&= -1 \\
m_{PQ} \times m_{OM} &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\therefore PQ \perp OM
$$

e) Bepaal die vergelykings van die raaklyne aan die sirkel by P en Q.

Oplossing:

Raaklyn by P:

Bepaal die gradiënt van die radius OP.

$$\begin{aligned} m_{OP} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-2 - 0}{-4 - 0} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Laat die gradiënt van die raaklyn P by m_P wees. Die raaklyn aan 'n sirkel is loodreg op die radius, daarom kan ons skryf:

$$\begin{aligned} m_{OP} \times m_P &= -1 \\ \frac{1}{2} \times m_P &= -1 \\ \therefore m_P &= -2 \end{aligned}$$

Vervang $m_P = -2$ en $P(-4; -2)$ in die vergelyking vir 'n reguitlyn.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - y_1 &= -2(x - x_1) \\ \text{Vervang } P(-4; -2): \quad y + 2 &= -2(x + 4) \\ y &= -2x - 8 - 2 \\ &= -2x - 10 \end{aligned}$$

Raaklyn by Q:
Bepaal die gradiënt van die radius OQ.

$$\begin{aligned} m_{OQ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{4 - 0}{2 - 0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Laat die gradiënt van die raaklyn Q by m_Q wees. Die raaklyn aan 'n sirkel is loodreg op die radius, daarom kan ons skryf:

$$\begin{aligned} m_{OQ} \times m_Q &= -1 \\ 2 \times m_Q &= -1 \\ \therefore m_Q &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vervang $m_Q = -\frac{1}{2}$ en $Q(2; 4)$ in die vergelyking vir 'n reguitlyn.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - y_1 &= -\frac{1}{2}(x - x_1) \\ \text{Vervang } Q(2; 4): \quad y - 4 &= -\frac{1}{2}(x - 2) \\ y &= -\frac{1}{2}x + 1 + 4 \\ &= -\frac{1}{2}x + 5 \end{aligned}$$

Daarom is die vergelykings vir die raaklyn aan die sirkels $y = -2x - 10$ en $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

f) Bepaal die koördinate van S, die punt waar die twee raaklyne kruis.

Oplossing:
Stel die twee lineêre vergelykings gelyk en los op vir x:

$$\begin{aligned} -2x-10 &= -\frac{1}{2}x+5 \\ -4x-20 &= -x+10 \\ -3x &= 30 \\ x &= -10 \\ \text{As } x=-10 \quad y &= -2(-10)-10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $S(-10;10)$.

g) Wys dat $PS = QS$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} PS &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-4-(-10))^2+(-2-10)^2} \\ &= \sqrt{(6)^2+(-12)^2} \\ &= \sqrt{36+144} \\ &= \sqrt{180} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QS &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(2-(-10))^2+(4-10)^2} \\ &= \sqrt{(12)^2+(-6)^2} \\ &= \sqrt{144+36} \\ &= \sqrt{180} \end{aligned}$$

h) Bepaal die vergelykings van die twee raaklyne aan die sirkel, beide ewewydig aan die lyn $y+2x=4$.

Oplossing:
Die raaklyn by P, $y=-2x-10$, is ewewydig aan $y=-2x+4$. Om die vergelyking van die tweede ewewydige raaklyn te vind:

$$\begin{aligned} y &= -2x+4 \\ \therefore m &= -2 \\ \therefore m_{\text{radius}} &= \frac{1}{2} \\ \text{Verg. van radius: } y &= \frac{1}{2}x \ldots (1) \\ \text{Vervang } (1): \quad x^2+y^2 &= 20 \\ x^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2 &= 20 \\ x^2+\frac{1}{4}x^2 &= 20 \\ \frac{5}{4}x^2 &= 20 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm 4 \\ \text{As } x=4, y &= 2 \\ \text{Vervang } (4;2): \quad y &= -2x+c \\ 2 &= -2(4)+c \\ 10 &= c \\ y &= -2x+10 \end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BN7 2. 2BN8 3. 2BN9 4. 2BNB 5. 2BNC 6. 2BND
7. 2BNF

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

8.4 Opsomming

Oefening 8 – 6: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Vind die vergelyking van die sirkel:

   a) met middelpunt $(0; 5)$ en radius 5

   Oplossing:

$$\begin{aligned}(x)^2 + (y-5)^2 &= 5^2 \\ (x)^2 + (y-5)^2 &= 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Uitgebrei: } x^2 + y^2 - 10y + 25 &= 25 \\ x^2 + y^2 - 10y &= 0\end{aligned}$$

   b) met middelpunt $(2; 0)$ en radius 4

   Oplossing:

$$(x-2)^2 + y^2 = 16$$

$$\begin{aligned}\text{Uitgebrei: } x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 16 \\ x^2 - 4x + y^2 - 12 &= 0\end{aligned}$$

   c) met middelpunt $(-5; 7)$ en radius 18

   Oplossing:

$$\begin{aligned}(x+5)^2 + (y-7)^2 &= 18^2 \\ (x+5)^2 + (y-7)^2 &= 324\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Uitgebrei: } x^2 + 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 &= 324 \\ x^2 + 10x + y^2 - 14y - 250 &= 0\end{aligned}$$

   d) met middelpunt $(-2; 0)$ en middellyn 6

   Oplossing:

$$(x+2)^2 + y^2 = 9$$

$$\begin{aligned}\text{Uitgebrei: } x^2 + 4x + 4 + y^2 - 9 &= 0 \\ x^2 + 4x + y^2 - 5 &= 0\end{aligned}$$

   e) met middelpunt $(-5; -3)$ en radius $\sqrt{3}$

Oplossing:

$$(x+5)^2+(y+3)^2=3$$

$$\text{Uitgebrei: } x^2+10x+25+y^2+6y+9=3$$
$$x^2+10x+y^2+6y+31=0$$

2. a) Vind die vergelyking van die sirkel met middelpunt $(2;1)$ wat deur $(4;1)$ gaan.
Oplossing:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=r^2$$
$$(4-2)^2+(1-1)^2=r^2$$
$$(2)^2+(0)^2=r^2$$
$$4=r^2$$
$$\therefore r=2$$
$$(x-2)^2+(y-1)^2=4$$

$$\text{Uitgebrei: } x^2-4x+y^2-2y+1=0$$

b) Waar sny dit die lyn $y=x+1$?
Oplossing:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=4$$
$$(x-2)^2+(x+1-1)^2=4$$
$$(x-2)^2+(x)^2=4$$
$$x^2-4x+4+x^2=4$$
$$2x^2-4x=0$$
$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$\therefore x=0 \text{ of } x=2$$
$$\text{As } x=0, y=1 \quad (0;1)$$
$$\text{As } x=2, y=3 \quad (2;3)$$

3. a) Vind die vergelyking van die sirkel met middelpunt $(-3;-2)$ wat deur $(1;-4)$ gaan.
Oplossing:

$$(x+3)^2+(y+2)^2=r^2$$
$$(1+3)^2+(-4+2)^2=r^2$$
$$(4)^2+(-2)^2=r^2$$
$$16+4=r^2$$
$$20=r^2$$
$$(x+3)^2+(y+2)^2=20$$

b) Vind die vergelyking van die sirkel met middelpunt $(3;1)$ wat deur $(2;5)$ gaan.
Oplossing:

$$(x-3)^2+(y-1)^2=r^2$$
$$(2-3)^2+(5-1)^2=r^2$$
$$(-1)^2+(4)^2=r^2$$
$$1+16=r^2$$
$$17=r^2$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2=17$$

4. Vind die middelpunt en radius van die volgende sirkels:

a) $(x+9)^2 + (y-6)^2 = 36$
Oplossing:
$(-9;6)$, $r = 6$ eenhede

b) $\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}(y-9)^2 = 1$
Oplossing:
$(2;9)$, $r = \sqrt{2}$ eenhede

c) $(x+5)^2 + (y+7)^2 = 12$
Oplossing:
$(-5;-7)$, $r = \sqrt{12}$ eenhede

d) $x^2 + (y+4)^2 = 23$
Oplossing:
$(0;-4)$, $r = \sqrt{23}$ eenhede

e) $3(x-2)^2 + 3(y+3)^2 = 12$
Oplossing:
$(2;-3)$, $r = 2$ eenhede

5. Vind die x en y afsnitte van die volgende grafieke:

a) $x^2 + (y-6)^2 = 100$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
x^2 + (y-6)^2 &= 100 \\
\text{Laat } x = 0: \quad (y-6)^2 &= 100 \\
y^2 - 12y + 36 &= 100 \\
y^2 - 12y - 64 &= 0 \\
(y-16)(y+4) &= 0 \\
\therefore y = 16 &\text{ of } y = -4 \\
(0;16) &\text{ en } (0;-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 + (y-6)^2 &= 100 \\
\text{Laat } y = 0: \quad x^2 + (-6)^2 &= 100 \\
x^2 + 36 &= 100 \\
x^2 &= 64 \\
\therefore x = -8 &\text{ of } x = 8 \\
(-8;0) &\text{ en } (8;0)
\end{aligned}$$

b) $(x+4)^2 + y^2 = 16$
Oplossing:

$$\begin{aligned}
(x+4)^2 + y^2 &= 16 \\
\text{Laat } x = 0: \quad (x+4)^2 + y^2 &= 16 \\
4^2 + y^2 &= 16 \\
y^2 &= 0 \\
&\therefore (0;0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x+4)^2 + y^2 &= 16 \\
\text{Laat } y = 0: \quad (x+4)^2 &= 16 \\
x^2 + 8x + 16 &= 16 \\
x^2 + 8x &= 0 \\
x(x+8) &= 0 \\
\therefore x = 0 &\text{ of } x = -8 \\
(0;0) &\text{ en } (-8;0)
\end{aligned}$$

6. Vind die middelpunt en radius van die volgende sirkels:

a) $x^2 + 6x + y^2 - 12y = -20$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + y^2 - 12y &= -20 \\ (x+3)^2 - 9 + (y-6)^2 - 36 &= -20 \\ (x+3)^2 + (y-6)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Die middelpunt van die sirkel is $(-3;6)$ en $r = 5$ eenhede.

b) $x^2 + 4x + y^2 - 8y = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + y^2 - 8y &= 0 \\ (x+2)^2 - 4 + (y-4)^2 - 16 &= 0 \\ (x+2)^2 + (y-4)^2 &= 20 \end{aligned}$$

Die middelpunt van die sirkel is $(-2;4)$ en $r = \sqrt{20}$ eenhede.

c) $x^2 + y^2 + 8y = 7$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 8y &= 7 \\ x^2 + (y+4)^2 - 16 &= 7 \\ x^2 + (y+4)^2 &= 23 \end{aligned}$$

Die middelpunt van die sirkel is $(0;-4)$ en $r = \sqrt{23}$ eenhede.

d) $x^2 - 6x + y^2 = 16$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 &= 16 \\ (x-3)^2 - 9 + y^2 &= 16 \\ (x-3)^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Die middelpunt van die sirkel is $(3;0)$ en $r = 5$ eenhede.

e) $x^2 - 5x + y^2 + 3y = -\frac{3}{4}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + y^2 + 3y &= -\frac{3}{4} \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} &= -\frac{3}{4} \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{31}{4} \end{aligned}$$

Die middelpunt van die sirkel is $(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2})$ en $r = \frac{\sqrt{31}}{2}$ eenhede.

f) $x^2 - 6nx + y^2 + 10ny = 9n^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 6nx + y^2 + 10ny &= 9n^2 \\ (x-3n)^2 - 9n^2 + (y+5n)^2 - 25n^2 &= 9n^2 \\ (x-3n)^2 + (y+5n)^2 &= 43n^2 \end{aligned}$$

Die middelpunt van die sirkel is $(3n; -5n)$ en $r = \sqrt{43}n$ eenhede.

7. a) Vind die gradiënt van die radius tussen die punt $(4; 5)$ op die sirkel en die middelpunt $(-8; 4)$.

Oplossing:

Gegee

- die middelpunt van die sirkel is $(a; b) = (-8; 4)$
- 'n punt op die omtrek van die sirkel $(4; 5)$

Gevra:

- die gradiënt m van die radius

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{5 - 4}{4 + 8} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Die gradiënt van die radius is $m = \frac{1}{12}$.

b) Vind die gradiënt van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(4; 5)$.

Oplossing:

Die raaklyn aan die sirkel by die punt $(4; 5)$ is loodreg op die radius van die sirkel by dieselfde punt:

$$\begin{aligned} m_{\perp} &= -\frac{1}{m} \\ &= \frac{-1}{\frac{1}{12}} \\ &= -12 \end{aligned}$$

Die gradiënt vir die raaklyn is $m_{\perp} = -12$.

8. a) Gegee $(x - 1)^2 + (y - 7)^2 = 10$, bepaal die waarde(s) van x as $(x; 4)$ op die sirkel lê.

Oplossing:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (4 - 7)^2 &= 10 \\ x^2 - 2x + 1 + 9 &= 10 \\ x(x - 2) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

Die punte $(0; 4)$ en $(2; 4)$ lê op die sirkel.

$(0; 4), (2; 4)$

b) Vind die gradiënt van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(2; 4)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{4 - 7}{2 - 1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{\text{tangent}} &= -\frac{1}{m} \\ &= -\frac{1}{-3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die gradiënt van die raaklyn is $m_{\text{tangent}} = \frac{1}{3}$.

$m = \frac{1}{3}$

9. Gegee 'n sirkel met middelpuntkoördinate $(a; b) = (-2; -2)$. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(-1; 3)$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{3 - (-2)}{-1 - (-2)} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Die radius is loodreg op die raaklyn, daarom $m_r \times m_\perp = -1$:

$$m_\perp = -\frac{1}{5}$$

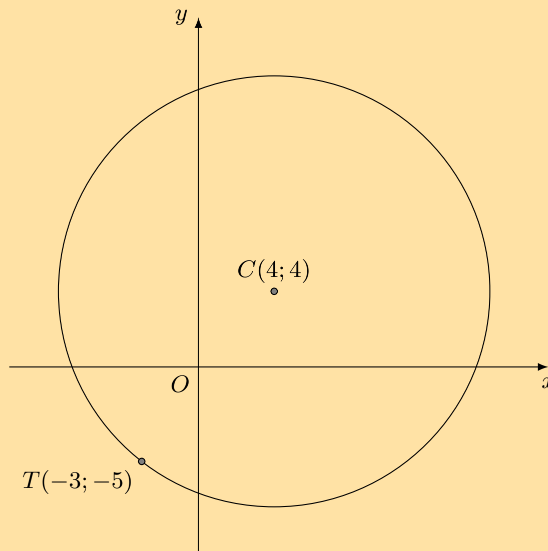
Vervang $m = -\frac{1}{5}$ en $(-1; 3)$ om c te bepaal:

$$\begin{aligned} y &= m_\perp x + c \\ 3 &= -\frac{1}{5}(-1) + c \\ c &= \frac{14}{5} \end{aligned}$$

Die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(-1; 3)$ is $y = -\frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$.

$y = -\frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$

10. Beskou die diagram hieronder:



Vind die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by die punt T.

Oplossing:

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{4 + 5}{4 + 3} \\ &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

$$m_r \times m = -1$$
$$\therefore m = -\frac{1}{m_r}$$
$$= -\frac{1}{\frac{9}{7}}$$
$$= -\frac{7}{9}$$

Bepaal die y-afsnit (c) van die lyn deur die punt $T(-3;-5)$ te vervang.

$$y = mx + c$$
$$-5 = -\frac{7}{9}(-3) + c$$
$$c = -\frac{22}{3}$$

Die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by T is

$$y = -\frac{7}{9}x - \frac{22}{3}$$

$y = -\frac{7}{9}x - \frac{22}{3}$

11. $M(-2;-5)$ is 'n punt op die sirkel $x^2 + y^2 + 18y + 61 = 0$. Bepaal die vergelyking van die raaklyn by M.

Oplossing:

Voltooi die kwadraat:

$$x^2 + y^2 + 18y + 61 = 0$$
$$x^2 + (y^2 + 18y) = -61$$
$$x^2 + (y+9)^2 - 81 = -61$$
$$x^2 + (y+9)^2 = 20$$

Daarom is die middelpunt van die sirkel $(0;-9)$ en $r = \sqrt{20}$ eenhede.

Bereken die gradiënt van die radius:

$$m_r = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
$$= \frac{-5-(-9)}{-2-0}$$
$$= \frac{4}{-2}$$
$$= -2$$

$$m_\perp = -\frac{1}{m_r}$$
$$= -\frac{1}{-2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

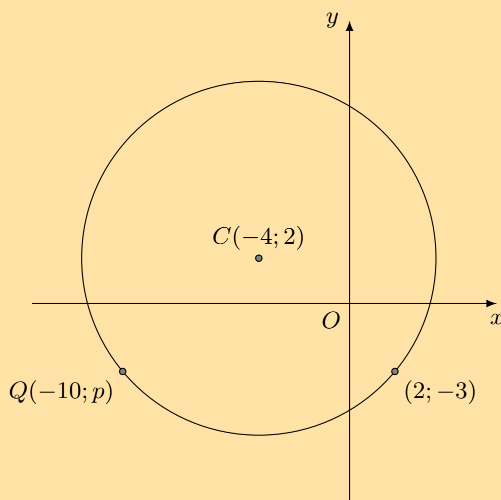
Bepaal die y-afsnit c van die lyn deur die punt $M(-2;-5)$ te vervang.

$$y = m_\perp x + c$$
$$-5 = \frac{1}{2}(-2) + c$$
$$c = -4$$

Die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by die punt $M(-2;-5)$ is

$$y = \frac{1}{2}x - 4$$

12. $C(-4;2)$ is die middelpunt van die sirkel wat deur $(2;-3)$ en $Q(-10;p)$ gaan.



a) Vind die vergelyking vir die sirkel wat gegee is.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\
&= \sqrt{(2+4)^2 + (-3-2)^2} \\
&= \sqrt{(6)^2 + (-5)^2} \\
&= \sqrt{61}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\
(x-(-4))^2 + (y-(2))^2 &= (\sqrt{61})^2 \\
(x+4)^2 + (y-2)^2 &= 61
\end{aligned}
$$

Die vergelyking van die sirkel is $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 61$.
$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 61$

b) Bepaal die waarde van p.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(x+4)^2 + (y-2)^2 &= 61 \\
(-10+4)^2 + (p-2)^2 &= 61 \\
(-10+4)^2 + p^2 - 4p + 4 &= 61 \\
36 + p^2 - 4p + 4 &= 61 \\
p^2 - 4p - 21 &= 0 \\
(p+3)(p-7) &= 0 \\
\therefore p = -3 &\text{ of } p = 7
\end{aligned}
$$

Vanaf die grafiek kan ons sien dat die regte y-waarde -3 is.
Die koördinate vir punt Q is $Q(-10;-3)$.

c) Bepaal die vergelyking vir die raaklyn aan die sirkel by punt Q.
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
m_r &= \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{-3-2}{-10-(-4)} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

$m_r \times m_\perp = -1$.

$$\begin{aligned} m_\perp &= -\frac{1}{m_r} \\ &= -\frac{1}{\frac{5}{6}} \\ &= -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

Bepaal die y-afsnit c van die lyn deur die punt $Q(x_2; y_2) = (-10; -3)$ te vervang.

$$\begin{aligned} y_2 &= m_\perp x_2 + c \\ -3 &= -\frac{6}{5}(-10) + c \\ c &= -15 \end{aligned}$$

Die vergelyking vir die raaklyn aan die sirkel by Q is $y = -\frac{6}{5}x - 15$.

13. Vind die vergelyking van die raaklyn aan elke sirkel:

a) $x^2 + y^2 = 17$ by die punt $(1; 4)$

Oplossing:

Die middelpunt van die sirkel is $(0; 0)$ en $r = \sqrt{17}$ eenhede.

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{4 - 0}{1 - 0} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_r \times m_\perp &= -1 \\ m_\perp &= -\frac{1}{m_r} \\ &= -\frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= m_\perp x_2 + c \\ 4 &= -\frac{1}{4}(1) + c \\ c &= \frac{17}{4} \end{aligned}$$

Die vergelyking vir die raaklyn aan die sirkel is $y = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$.

b) $x^2 + y^2 = 25$ by die punt $(3; 4)$

Oplossing:

Die middelpunt van die sirkel is $(0; 0)$ en $r = 5$ eenhede.

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{4 - 0}{3 - 0} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$m_r \times m_\perp = -1$$
$$m_\perp = -\frac{1}{m_r}$$
$$= -\frac{1}{\frac{4}{3}}$$
$$= -\frac{3}{4}$$

$$y_2 = m_\perp x_2 + c$$
$$4 = -\frac{3}{4}(3) + c$$
$$c = \frac{25}{4}$$

Die vergelyking vir die raaklyn aan die sirkel is $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

c) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ by die punt $(3; 5)$

Oplossing:

Die middelpunt van die sirkel is $(-1; 2)$ en $r = 5$ eenhede.

$$m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{5-2}{3-(-1)}$$
$$= \frac{3}{4}$$

$$m_r \times m_\perp = -1$$
$$m_\perp = -\frac{1}{m_r}$$
$$= -\frac{1}{\frac{3}{4}}$$
$$= -\frac{4}{3}$$

$$y_2 = m_\perp x_2 + c$$
$$5 = -\frac{4}{3}(3) + c$$
$$c = 9$$

Die vergelyking vir die raaklyn aan die sirkel is $y = -\frac{4}{3}x + 9$.

d) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$ by die punt $(5; 3)$

Oplossing:

Die middelpunt van die sirkel is $(2; 1)$ en $r = \sqrt{13}$ eenhede.

$$m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{3-1}{5-2}$$
$$= \frac{2}{3}$$

$$m_r \times m_\perp = -1$$
$$m_\perp = -\frac{1}{m_r}$$
$$= -\frac{1}{\frac{2}{3}}$$
$$= -\frac{3}{2}$$

$$y_2 = m_\perp x_2 + c$$
$$3 = -\frac{3}{2}(5) + c$$
$$c = \frac{21}{2}$$

Die vergelyking vir die raaklyn aan die sirkel is $y = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{2}$.

14. Bepaal die vergelykings van die raaklyne aan die sirkel $x^2 + y^2 = 50$, as beide lyne 'n inklinasiehoek van $45°$ het.

Oplossing:

Die middelpunt van die sirkel is $(0;0)$ en $r = \sqrt{50}$ eenhede.

Gradiënt van die raaklyne:

$$\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ &= \tan 45° \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \times m_\perp &= -1 \\ m &= -1 \end{aligned}$$

Die lyn loodreg op die raaklyne wat deur die middelpunt van die sirkel gaan is $y = -x$. Vervang $y = -x$ in die vergelyking van die sirkel en los op vir x:

$$\begin{aligned} x^2 + (-x)^2 &= 50 \\ 2x^2 &= 50 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $P(-5;5)$ en $Q(5;-5)$

Raaklyn by $P(-5;5)$

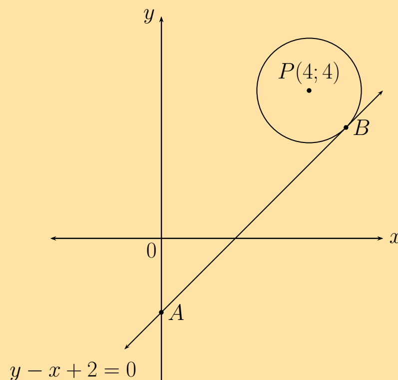
$$\begin{aligned} y - 5 &= (1)(x - (-5)) \\ y &= x + 10 \end{aligned}$$

Raaklyn by $Q(5;-5)$

$$\begin{aligned} y - (-5) &= (1)(x - 5) \\ y &= x - 10 \end{aligned}$$

Die vergelykings van die raaklyne aan die sirkel is $y = x - 10$ en $y = x + 10$.

15. Die sirkel met middelpunt $P(4;4)$ het 'n raaklyn AB by punt B. Die vergelyking van AB is $y - x + 2 = 0$ en A lê op die y-as.



a) Bepaal die vergelyking van PB.

Oplossing:

$$\begin{aligned} m_{AB} &= 1 \\ \therefore m_{PB} &= -1 \\ y &= mx + c \\ \text{Vervang } P(4;4): \quad 4 &= -(4) + c \\ \therefore c &= 8 \\ y &= -x + 8 \end{aligned}$$

$y = -x + 8$

b) Bepaal die koördinate van B.

Oplossing:

Stel die twee vergelykings gelyk en los op vir x:

$$\begin{aligned} x - 2 &= -x + 8 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \\ y &= -5 + 8 \\ \therefore y &= 3 \end{aligned}$$

$B(5;3)$

c) Bepaal die vergelyking van die sirkel.

Oplossing:

$$\begin{aligned} PB^2 &= (5-4)^2 + (3-4)^2 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 &= 2 \end{aligned}$$

d) Beskryf in woorde hoe die sirkel geskuif moet word sodat P by die oorsprong is.

Oplossing:

Die sirkel moet 4 eenhede af en 4 eenhede na links geskuif word.

e) As die lengte van PB verdriedubbel word en die sirkel 2 eenhede na regs en 1 eenheid opgeskuif word, bepaal die vergelyking van die nuwe sirkel.

Oplossing:

$$\begin{aligned} PB &= \sqrt{2} \\ 3 \times PB &= 3\sqrt{2} \\ \text{Horisontale skuif: } (x-4-2)^2 + (y-4)^2 &= \left(3\sqrt{2}\right)^2 \\ (x-6)^2 + (y-4)^2 &= 9(2) \\ \text{Vertikale skuif: } (x-6)^2 + (y-4-1)^2 &= 18 \\ (x-6)^2 + (y-5)^2 &= 18 \end{aligned}$$

f) Die vergelyking van 'n sirkel met middelpunt A is $x^2 + y^2 + 5 = 16x + 8y - 30$ en die vergelyking vir 'n sirkel met middelpunt B is $5x^2 + 5y^2 = 25$. Bewys dat die twee sirkels aan mekaar raak.

Oplossing:

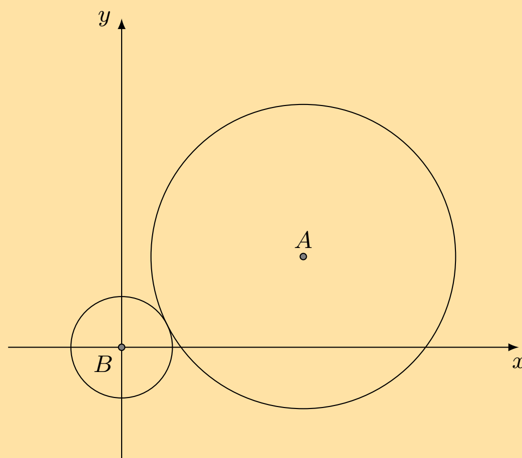
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 5 &= 16x + 8y - 30 \\ x^2 - 16x + y^2 - 8y &= -35 \\ (x-8)^2 - 64 + (y-4)^2 - 16 &= -35 \\ (x-8)^2 + (y-4)^2 &= 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x^2 + 5y^2 &= 25 \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB^2 &= (8-0)^2 + (4-0)^2 \\ &= 64 + 16 \\ &= 80 \\ \therefore AB &= \sqrt{80} \\ AB &= 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En radius}_A + \text{radius}_B &= \sqrt{45} + \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} + \sqrt{5} \\ &= 4\sqrt{5} \\ &= AB \end{aligned}$$

Daarom raak die twee sirkels aan mekaar.



Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BNH	1b. 2BNJ	1c. 2BNK	1d. 2BNM	1e. 2BNN	2. 2BNP
3. 2BNQ	4a. 2BNR	4b. 2BNS	4c. 2BNT	4d. 2BNV	4e. 2BNW
5a. 2BNX	5b. 2BNY	6a. 2BNZ	6b. 2BP2	6c. 2BP3	6d. 2BP4
6e. 2BP5	6f. 2BP6	7. 2BP7	8. 2BP8	9. 2BP9	10. 2BPB
11. 2BPC	12. 2BPD	13a. 2BPF	13b. 2BPG	13c. 2BPH	13d. 2BPJ
14. 2BPK	15. 2BPM				

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK



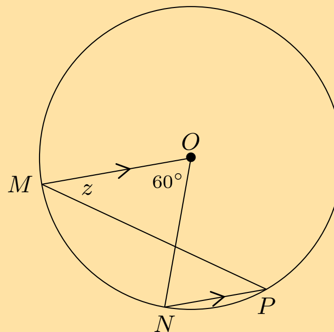
Euklidiese Meetkunde

- Sketse is waardevolle en belangrike hulpmiddels. Moedig leerders aan om akkurate diagramme te teken om te help om probleme op te los.
- Dit is belangrik om te beklemtoon dat verhouding van sye geen aanduiding is van werklike lengte nie. Dit dui slegs die verhouding tussen lengtes aan.
- Om te bewys dat driehoeke gelykvormig is, moet ons aantoon dat twee pare hoeke (HHH) gelyk is OF dat drie pare sye in verhouding is (SSS).
- Stellings is eksamineerbaar en word altyd gevra in eksamens. Dit is ook belangrik dat leerders die regte konstruksie, wat benodig word by elke bewys, sal onthou.
- Notasie: beklemtoon die belangrikheid van die korrekte volgorde van die letters, aangesien dit aandui watter hoeke gelyk is en watter sye in verhouding is.
- As 'n lengte bereken moet word vanaf 'n verhouding, help dit om die verhouding te herskryf met die onbekende lengte in die linker boonste posisie in die verhouding.

9.1 Hersiening

Oefening 9 – 1: Hersiening

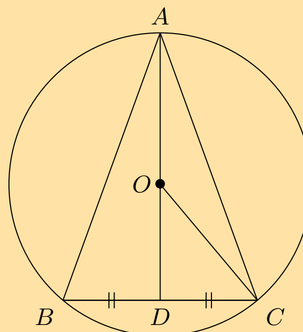
1. $MO \parallel NP$ in 'n sirkel met middelpunt O. $M\hat{O}N = 60°$ en $O\hat{M}P = z$. Bereken die waarde van z, met opgaaf van redes.



Oplossing:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \tfrac{1}{2} M\hat{O}N \quad &&(\angle \text{ by middelpunt } = 2 \angle \text{ op omtrek}) \\ &= 30° \\ \therefore z &= 30° &&(\text{verw.}\angle\text{e, } MO \parallel NP) \end{aligned}$$

2. O is die middelpunt van die sirkel met $OC = 5$ cm en koord $BC = 8$ cm.



Bepaal die lengtes van:

a) OD

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle ODC, \quad OC^2 &= OD^2 + DC^2 \quad \text{(Pythagoras)} \\ 5^2 &= OD^2 + 4^2 \\ \therefore OD &= 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

b) AD

Oplossing:

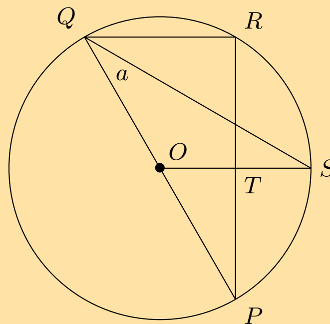
$$\begin{aligned} AO &= 5 \text{ cm} \quad \text{(radius)} \\ AD &= AO + OD \\ &= 5 + 3 \\ \therefore AD &= 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

c) AB

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle ABD, \quad AB^2 &= BD^2 + AD^2 \quad \text{(Pythagoras)} \\ AB^2 &= 4^2 + 8^2 \\ AB &= \sqrt{80} \\ \therefore AB &= 4\sqrt{5}\text{cm} \end{aligned}$$

3. PQ is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O. SQ halveer $P\hat{Q}R$ en $P\hat{Q}S = a$.



a) Skryf nog twee hoeke neer wat ook gelyk is aan a.

Oplossing:

$$\begin{aligned} R\hat{Q}S &= a && \text{(gegee } SQ \text{ halveer } P\hat{Q}R) \\ OQ &= OS && \text{(gelyke radiusse)} \\ \therefore O\hat{Q}S = O\hat{S}Q &= a && \text{(gelykbenige } \triangle OQS) \end{aligned}$$

b) Bereken $P\hat{O}S$ in terme van a en gee redes.

Oplossing:

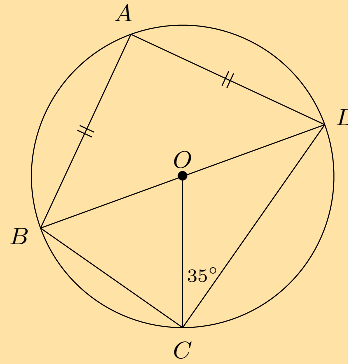
$$\begin{aligned} P\hat{O}S &= 2 \times P\hat{Q}S && (\angle\text{e by middelpunt en omtrek op dieselfde koord}) \\ &= 2a \end{aligned}$$

c) Bewys dat OS 'n middelloodlyn is van PR.

Oplossing:

$$\begin{aligned} & R\hat{Q}S = Q\hat{S}O = a && \text{(bewys)} \\ & \therefore QR \parallel OS && (\text{verw.}\angle\text{e gelyk}) \\ & \therefore \hat{R} = R\hat{T}S && (\text{verw.}\angle\text{e, } QR \parallel OS) \\ & \quad = 90^\circ && (\hat{R} = \angle \text{ in semi-sirkel}) \\ & \therefore PT = TR && (\perp \text{ van middelpunt halveer koord}) \\ & \therefore OS \text{ middelloodlyn van } PR \end{aligned}$$

4. BD is 'n middellyn van die sirkel met die middelpunt O. $AB = AD$ en $O\hat{C}D = 35°$.



Bereken die waardes van die volgende hoeke, met redes:

a) $O\hat{D}C$

Oplossing:

$$\begin{aligned} OC &= OD && \text{(gelyke radiusse)} \\ \therefore O\hat{D}C &= 35^\circ && \text{(gelykbenige } \triangle OCD) \end{aligned}$$

b) $C\hat{O}D$

Oplossing:

$$\begin{aligned} C\hat{O}D &= 180^\circ - (35^\circ + 35^\circ) && \text{(som } \angle\text{e } \triangle = 180^\circ) \\ &= 110^\circ \end{aligned}$$

c) $C\hat{B}D$

Oplossing:

$$\begin{aligned} C\hat{B}D &= \tfrac{1}{2} C\hat{O}D && (\angle \text{ by middelpunt } = 2\angle \text{ by omtrek)} \\ &= 55^\circ \end{aligned}$$

d) $B\hat{A}D$

Oplossing:

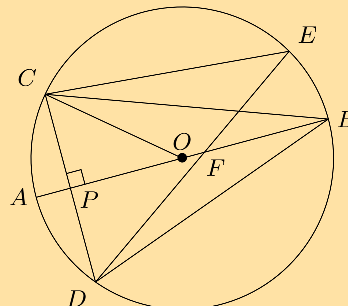
$$B\hat{A}D = 90^\circ \qquad (\angle \text{ in semi-sirkel})$$

e) $A\hat{D}B$

Oplossing:

$$\begin{aligned} A\hat{D}B &= A\hat{B}D && \text{(gelykbenige } \triangle ABD) \\ \therefore A\hat{D}B &= \tfrac{180^\circ - 90^\circ}{2} && \text{(som } \angle\text{e in } \triangle = 180^\circ) \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

5. O is die middelpunt van die sirkel met middellyn AB. $CD \perp AB$ by P en koord DE halveer AB by F.



Bewys die volgende:

a) $C\hat{B}P = D\hat{B}P$

Oplossing:

In $\triangle CBP$ en $\triangle DBP$:

$CP = DP$	$(OP \perp CD)$
$C\hat{P}B = D\hat{P}B = 90°$	(gegee)
$BP = BP$	(gemeen)
$\therefore \triangle CBP \equiv \triangle DBP$	(SHS)
$\therefore C\hat{B}P = D\hat{B}P$	$(\triangle CBP \equiv \triangle DBP)$

b) $C\hat{E}D = 2C\hat{B}A$

Oplossing:

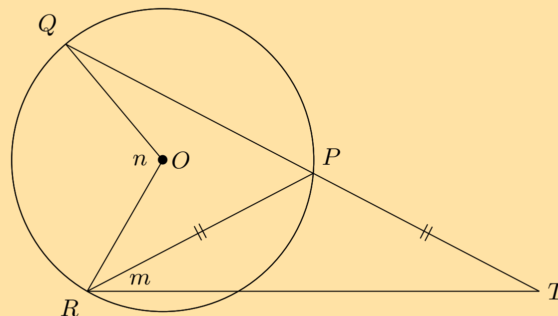
$C\hat{E}D = C\hat{B}D$	($\angle$e op koord CD)
Maar $C\hat{B}A = D\hat{B}A$	$(\triangle CBP \equiv \triangle DBP)$
$\therefore C\hat{E}D = 2C\hat{B}A$	

c) $A\hat{B}D = \frac{1}{2}C\hat{O}A$

Oplossing:

$D\hat{B}A = C\hat{B}A$	$(\triangle CBP \equiv \triangle DBP)$
$C\hat{B}A = \frac{1}{2}C\hat{O}A$	($\angle$ by middelpunt $= 2\angle$ by omtrek)
$\therefore A\hat{B}D = \frac{1}{2}C\hat{O}A$	

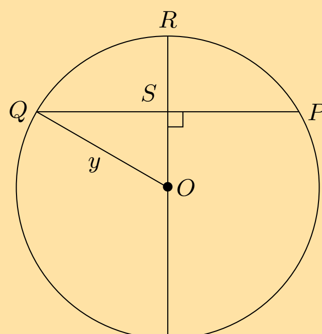
6. QP in die sirkel met middelpunt O word verleng na T sodat $PR = PT$. Druk m uit in terme van n.



Oplossing:

$\hat{T} = m$	$(PT = PR)$
$\therefore Q\hat{P}R = 2m$	(buite $\angle\triangle =$ som binne $\angle$e)
$\therefore n = 2(2m)$	($\angle$e by middelpunt en omtrek op QR)
$n = 4m$	
$\therefore m = \frac{1}{4}n$	

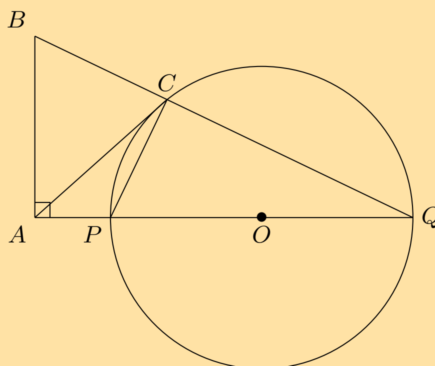
7. In die sirkel met middelpunt O, $OR \perp QP$, $QP = 30$ mm en $RS = 9$ mm. Bepaal die lengte van y.



Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\text{In } \triangle QOS, && \\
&QP = 30 && \text{(gegee)} \\
&QS = \tfrac{1}{2}QP && (\perp \text{ van middelpunt halveer koord}) \\
&\therefore QS = 15 && \\
&QO^2 = OS^2 + QS^2 && \text{(Pythagoras)} \\
&y^2 = (y-9)^2 + 15^2 && \\
&y^2 = y^2 - 18y + 81 + 225 && \\
&\therefore 18y = 306 && \\
&\therefore y = 17 \text{ mm} &&
\end{aligned}$$

8. PQ is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O. QP word verleng na A en AC is 'n raaklyn aan die sirkel. $BA \perp AQ$ en BCQ is 'n reguitlyn.



Bewys die volgende:

a) $P\hat{C}Q = B\hat{A}P$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&P\hat{C}Q = 90^\circ && (\angle \text{ in semi-sirkel}) \\
&B\hat{A}Q = 90^\circ && (\text{gegee } BA \perp AQ) \\
&\therefore P\hat{C}Q = B\hat{A}Q &&
\end{aligned}$$

b) $BAPC$ is 'n koordevierhoek

Oplossing:

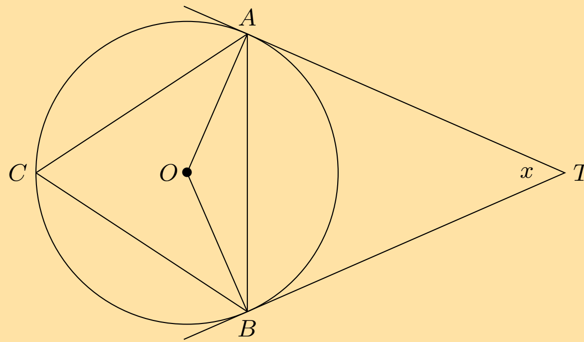
$$\begin{aligned}
&P\hat{C}Q = B\hat{A}Q && \text{(bewys)} \\
&\therefore BAPC \text{ is 'n koordev..} && (\text{buitehoek } = \text{ teenoorst binne } \angle)
\end{aligned}$$

c) $AB = AC$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&C\hat{P}Q = A\hat{B}C && (\text{buite } \angle \text{ van koordevierh.}) \\
&B\hat{C}P = C\hat{P}Q + C\hat{Q}P && (\text{buite } \angle \text{ van } \triangle) \\
&A\hat{C}P = C\hat{Q}P && \text{(raaklyn-koord)} \\
&\therefore B\hat{C}A = C\hat{P}Q && \\
&\qquad = A\hat{B}C && \\
&\therefore AB = AC && (\angle\text{e teenoor gelyke sye})
\end{aligned}$$

9. TA en TB is raaklyne aan die sirkel met middelpunt O. C is 'n punt op die omtrek en $A\hat{T}B = x$.



Druk die volgende uit in terme van x en gee redes:

a) $A\hat{B}T$

Oplossing:

$$\begin{aligned} A\hat{B}T &= B\hat{A}T && (TA = TB) \\ &= \frac{180^\circ - x}{2} && \text{(som } \angle\text{e van } \triangle TAB) \\ &= 90^\circ - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

b) $O\hat{B}A$

Oplossing:

$$\begin{aligned} O\hat{B}T &= 90^\circ && \text{(raaklyn } \perp \text{ radius)} \\ \therefore O\hat{B}A &= 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

c) $\hat{C}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \hat{C} &= A\hat{B}T && \text{(raaklyn-koord)} \\ &= 90^\circ - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BPN 2. 2BPP 3. 2BPQ 4. 2BPR 5. 2BPS 6. 2BPT
7. 2BPV 8. 2BPW 9. 2BPX

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

9.2 Verhouding en eweredigheid

Oefening 9 – 2: Verhouding en eweredigheid

1. Los op vir p:

a) $\frac{8}{40} = \frac{p}{25}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{8}{40} &= \frac{p}{25}\\ \frac{8\times 25}{40} &= p\\ \frac{200}{40} &= p\\ \therefore 5 &= p\end{aligned}$$

b) $\frac{6}{9} = \frac{29+p}{54}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{6}{9} &= \frac{29+p}{54}\\ \frac{6\times 54}{9} &= 29+p\\ 36 &= 29+p\\ \therefore 7 &= p\end{aligned}$$

c) $\frac{3}{1+\frac{p}{4}} = \frac{4}{p+1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3}{1+\frac{p}{4}} &= \frac{4}{p+1}\\ 3(p+1) &= 4\left(1+\frac{p}{4}\right)\\ 3p+3 &= 4+p\\ 2p &= 1\\ \therefore p &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

d) $\frac{14}{100-p} = \frac{49}{343}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{14}{100-p} &= \frac{49}{343}\\ 14\times 343 &= 49(100-p)\\ \frac{4802}{49} &= 100-p\\ 98 &= 100-p\\ \therefore p &= 2\end{aligned}$$

2. 'n Pak met 160 lekkers bevat rooi, blou en geel lekkers in die verhouding 3 : 2 : 3 onderskeidelik. Bepaal hoeveel lekkers van elke kleur daar in die pak is.

   Oplossing:

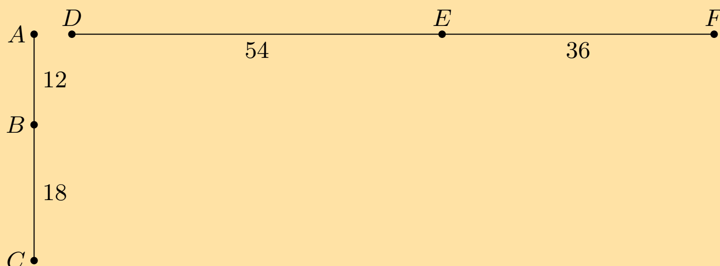
$$\begin{aligned}3+2+3 &= 8\\ \text{Rooi } &= \frac{3}{8}\times 160\\ &= 60\\ \text{Blou } &= \frac{2}{8}\times 160\\ &= 40\\ \text{Geel } &= \frac{3}{8}\times 160\\ &= 60\end{aligned}$$

3. 'n Mengsel bevat 2 dele van substans A vir elke 5 dele van substans B. As die totale massa van die mengsel 50 kg is, bepaal hoeveel van substans B is in die mengsel (korrek tot 2 desimale plekke).

Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{Verhouding substans } A \text{ tot substans B} &= 2:5 \\ 2+5 &= 7 \\ \text{Substans } B &= \frac{5}{7}\times 50 \\ &= 35{,}71 \text{ kg}\end{aligned}$$

4. Gegee die diagram hieronder.



Wys dat:

a) $\frac{AB}{BC} = \frac{FE}{ED}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{BC} &= \frac{12}{18} \\ &= \frac{2}{3} \\ \frac{FE}{ED} &= \frac{36}{54} \\ &= \frac{2}{3} \\ \therefore \frac{AB}{BC} &= \frac{FE}{ED}\end{aligned}$$

b) $\frac{AC}{BC} = \frac{FD}{EF}$

Oplossing:

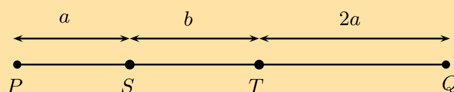
$$\begin{aligned}\frac{AC}{BC} &= \frac{12+18}{18} \\ &= \frac{30}{18} \\ &= \frac{5}{3} \\ \frac{FD}{EF} &= \frac{36+54}{54} \\ &= \frac{90}{54} \\ &= \frac{5}{3} \\ \therefore \frac{AC}{BC} &= \frac{FD}{EF}\end{aligned}$$

c) $AB \,.\, DF = AC \,.\, FE$

Oplossing:

$$\begin{aligned} AB \cdot DF &= 12 \times (36 + 54) \\ &= 12 \times 90 \\ &= 1080 \\ AC \cdot FE &= (12 + 18) \times 36 \\ &= 30 \times 36 \\ &= 1080 \\ \therefore AB \cdot DF &= AC \cdot FE \end{aligned}$$

5. Beskou die lynsegment hieronder getoon.



Druk die volgende uit in terme van a en b:

a) $PT : ST$

Oplossing:

$(a + b) : b$

b) $\frac{PS}{TQ}$

Oplossing:

$\frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{SQ}{PQ}$

Oplossing:

$\frac{2a+b}{3a+b}$

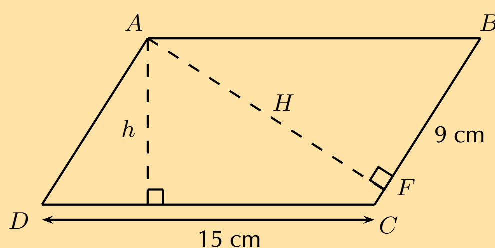
d) $QT : TS$

Oplossing:

$2a : b$

6. $ABCD$ is 'n parallelogram met $DC = 15$ cm, $h = 8$ cm en $BF = 9$ cm.

Bereken die verhouding $\frac{\text{area } ABF}{\text{area } ABCD}$.



Oplossing:

Die area van 'n parallelogram $ABCD$ = basis × hoogte:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= 15 \times 8 \\ &= 120 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

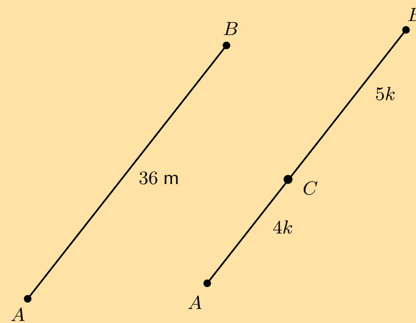
Die omtrek van 'n parallelogram $ABCD = 2DC + 2BC$.

Om die lengte van BC te vind, gebruik ons $AF \perp BC$ en die stelling van Pythagoras.

$$\begin{aligned}\text{In } \triangle ABF\text{:}\quad AF^2 &= AB^2 - BF^2\\ &= 15^2 - 9^2\\ &= 144\\ \therefore AF &= 12 \text{ cm}\\ \therefore \text{area } ABF &= \frac{1}{2}AF\ .\ BF\\ &= \frac{1}{2}(12)(9)\\ &= 54 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\text{area } ABF}{\text{area } ABCD} &= \frac{54}{150}\\ &= \frac{9}{25}\end{aligned}$$

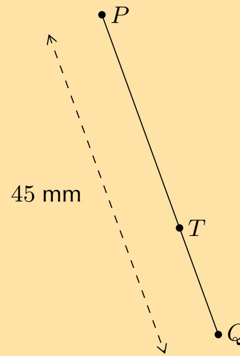
7. $AB = 36$ m en C verdeel AB in die verhouding $4 : 5$. Bepaal AC en CB.



Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{AC}{AB} &= \frac{4k}{(4k + 5k)}\\ \therefore AC &= 36 \times \frac{4}{9}\\ &= 16 \text{ m}\\ CB &= 36 - 16\\ &= 20 \text{ m}\\ \text{Of } \frac{CB}{AC} &= \frac{5k}{(4k + 5k)}\\ \therefore CB &= 36 \times \frac{5}{9}\\ &= 20 \text{ m}\end{aligned}$$

8. As $PQ = 45$ mm en die verhouding van $TQ : PQ$ is $2 : 3$, bereken PT en TQ.



Oplossing:

$$\frac{TQ}{PQ} = \frac{2}{3}$$
$$\therefore TQ = PQ \times \frac{2}{3}$$
$$= 45 \times \frac{2}{3}$$
$$= 30 \text{ mm}$$
$$PT = 45 - 30$$
$$= 15 \text{ mm}$$
$$\text{Of} \quad \frac{PT}{PQ} = \frac{1}{3}$$
$$\therefore PT = 45 \times \frac{1}{3}$$
$$= 15 \text{ mm}$$

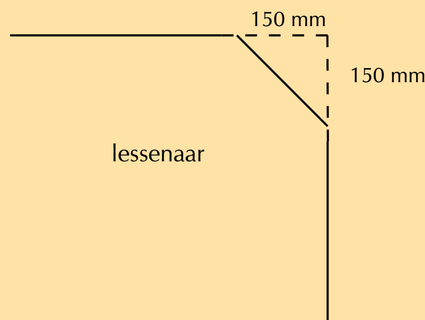
9. Luke se biologie aantekeningboek is 30 cm lank en 20 cm breed. Die afmetings van sy lessenaar is in dieselfde verhouding as die afmetings van sy aantekeningboek.

   a) As die lessenaar 90 cm breed is, bereken die bo-oppervlakte van sy lessenaar.

   Oplossing:

$$\text{Verhouding} = \frac{\text{breedte van tafel}}{\text{breedte van boek}}$$
$$= \frac{90}{20}$$
$$= 4{,}5$$
$$\therefore \text{Lengte van tafel} = 30 \times 4{,}5\text{cm}$$
$$= 135 \text{ cm}$$
$$\text{Area van tafel} = 135 \times 90$$
$$= 12\ 150 \text{ cm}^2$$
$$= 1{,}2 \text{ m}^2$$

   b) Luke bedek elke hoek van sy lessenaar met 'n gelykbenige driehoek van karton, soos getoon in die diagram:



Bereken die nuwe omtrek en die oppervlakte van die sigbare gedeelte van die lessenaar.

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 &= 15^2 + 15^2 \\ x &= 21{,}2 \text{ cm} \\ \text{Nuwe lengte } &= 135 - 2(15) \\ &= 105 \text{ cm} \\ \text{Nuwe breedte } &= 90 - 2(15) \\ &= 60 \text{ cm} \\ \text{Nuwe omtrek } &= 2(105) + 2(60) + 4(21{,}2) \\ &= 414{,}8 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Oppervlakte afgesny } &= 2 \times (15^2) \\ &= 450 \text{ m}^2 \\ \text{Nuwe oppervlakte } &= 12\ 150 \text{ cm}^2 - 450 \text{ m}^2 \\ &= 11\ 700 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

c) Gebruik hierdie nuwe oppervlakte en bereken die afmetings van 'n vierkantige lessenaar wat hierdie oppervlakte sou hê.

Oplossing:

$$\begin{aligned} s^2 &= 11\ 700 \text{ cm}^2 \\ \therefore s &= 108{,}2 \text{ cm} \\ \text{Lengte van vierkantige lessenaar } &\approx 108 \text{ cm} \end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

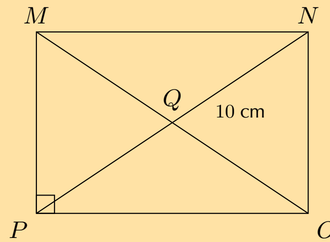
1a. 2BPY	1b. 2BPZ	1c. 2BQ2	1d. 2BQ3	2. 2BQ4	3. 2BQ5
4a. 2BQ6	4b. 2BQ7	4c. 2BQ8	5a. 2BQ9	5b. 2BQB	5c. 2BQC
5d. 2BQD	6. 2BQF	7. 2BQG	8. 2BQH	9. 2BQJ	

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

9.3 Poligone

Oefening 9 – 3: Eweredigheid van poligone

1. $MNOP$ is 'n reghoek met $MN : NO = 5 : 3$ en $QN = 10$ cm.



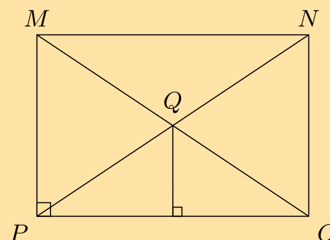
a) Bereken (korrek tot twee desimale plekke) .

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
QN &= 10 \\
\therefore NP &= 2 \times QN && \text{(hoeklyne halveer mekaar)} \\
&= 20 \\
\text{In } \triangle NOP, \quad \hat{O} &= 90^\circ && (MNOP \text{ reghoek}) \\
\text{Laat } MN &= 5x \\
\text{And } NO &= 3x \\
NP^2 &= NO^2 + OP^2 && \text{(Pythagoras)} \\
(20)^2 &= (3x)^2 + (5x)^2 \\
400 &= 9x^2 + 25x^2 \\
400 &= 34x^2 \\
\therefore x &= \sqrt{\tfrac{400}{34}} \\
&= 3{,}43\ldots \\
\therefore MN &= 5x = 17{,}15 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

b) Bereken die area van $\triangle OPQ$ (korrek tot 2 desimale plekke).

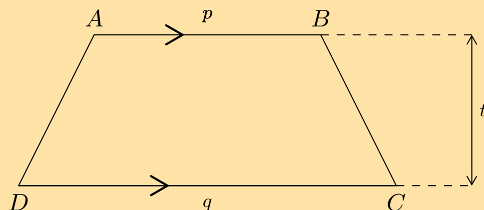
Oplossing:



$$
\begin{aligned}
NO &= 3x = 10{,}29 \\
\text{Area } \triangle OPQ &= \frac{1}{2} \text{ basis} \times \text{ hoogte} \\
&= \frac{1}{2} MN \times \left(\frac{1}{2} NO\right) \\
&= \frac{1}{2}(17{,}15)\left(\frac{1}{2} \times 10{,}29\right) \\
&= 44{,}12 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Of} \quad \text{Area } MNOP &= \text{basis} \times \text{ hoogte} \\
&= 17{,}15 \times 10{,}29 \\
&= 176{,}43 \text{ cm}^2 \\
\therefore \text{Area } \triangle OPQ &= \frac{1}{4} \times 176{,}43 \\
&= 44{,}12 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

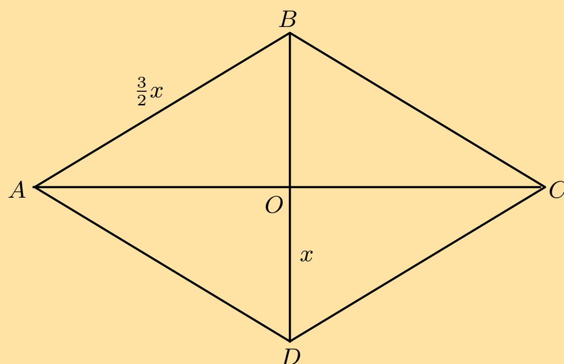
2. Beskou trapesium $ABCD$ hieronder. As $t : p : q = 2 : 3 : 5$ en die area van $ABCD = 288$ cm^2, bereken t, p en q.



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Laat } t &= 2x \\
\text{En } p &= 3x \\
\text{En } q &= 5x \\
\text{Area } ABCD &= \frac{1}{2}(p+q) \times t \\
288 &= \frac{1}{2}(3x+5x) \times 2x \\
288 &= 8x^2 \\
36 &= x^2 \\
\therefore 6 &= x \quad \text{(lengte is altyd positief)} \\
\therefore t &= 2(6) = 12 \text{ cm} \\
p &= 3(6) = 18 \text{ cm} \\
q &= 5(6) = 30 \text{ cm}
\end{aligned}$$

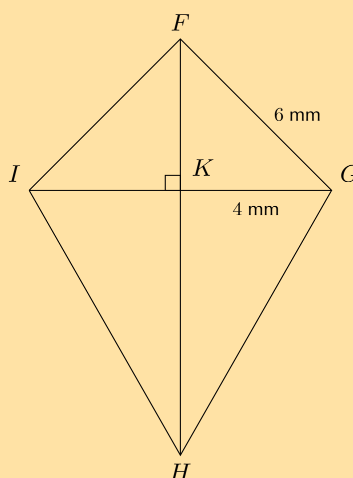
3. $ABCD$ is 'n rombus met sylengtes van $\frac{3}{2}x$ millimeters. Die hoeklyne halveer mekaar by O en die lengte van $DO = x$ millimeters. Druk die area van $ABCD$ uit in terme van x.



Oplossing:

$$\begin{aligned}
AD &= \frac{3}{2}x \\
DO &= x \\
AO^2 &= \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - x^2 \quad (\text{ Pythagoras}) \\
&= \frac{9}{4}x^2 - x^2 \\
&= \frac{5}{4}x^2 \\
\therefore AO &= \frac{x\sqrt{5}}{2} \\
\therefore AC &= x\sqrt{5} \\
\text{Area } &= \frac{1}{2}AC \times BD \\
&= \frac{1}{2} \times x\sqrt{5} \times 2x \\
&= \sqrt{5}x^2
\end{aligned}$$

4. In die diagram hieronder is $FGHI$ 'n vlieër met $FG = 6$ mm, $GK = 4$ mm en $\frac{GH}{FI} = \frac{5}{2}$.



a) Bepaal FH (korrek tot die naaste heelgetal).

Oplossing:

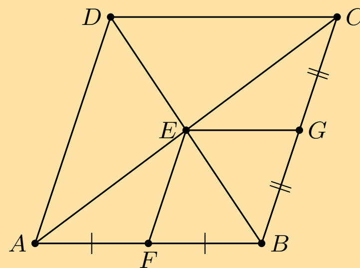
$$\begin{aligned}
\frac{GH}{FI} &= \frac{5}{2} \\
\text{En } FG &= FI \quad \text{(aanliggende sye van vlieër gelyk)} \\
\frac{GH}{FG} &= \frac{5}{2} \\
\frac{GH}{6} &= \frac{5}{2} \\
\therefore GH &= 15 \text{ mm} \\
\text{In } \triangle FGK, \quad FG^2 &= GK^2 + FK^2 \\
FK^2 &= 6^2 - 4^2 \\
&= 36 - 16 \\
\therefore FK &= \sqrt{20} \\
\text{In } \triangle GKH, \quad GH^2 &= GK^2 + FH^2 \\
15^2 &= 4^2 + KH^2 \\
225 - 16 &= KH^2 \\
\therefore KH &= \sqrt{209} \\
FH &= FK + KH \\
&= \sqrt{20} + \sqrt{209} \\
&= 19 \text{ mm}
\end{aligned}$$

b) Bereken area $FGHI$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Area } FGHI &= \frac{1}{2} GI \times FH \\
&= \frac{1}{2}(4+4)(19) \\
&= 76 \text{ mm}^2
\end{aligned}$$

5. $ABCD$ is 'n rombus. F is die middelpunt van AB en G is die middelpunt van CB. Bewys dat $EFBG$ ook 'n rombus is.



Oplossing:

$AF = FB$	(gegee)
$AE = EC$	(hoeklyne halveer)
$\therefore FE \parallel BC$	
$\therefore FE \parallel BG$	
$\therefore FE = \frac{1}{2}BG$	(middelpt stelling)
$FE = BG$	
$\therefore EFBG$ is a parallelogram	(een paar teenoorst sye = en $\parallel$)
$\therefore FB \parallel EG$	(teenoorst sye van parm.)
En $AB = BC$	(aanliggende sye van ruit)
$\therefore \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC$	
$\therefore FB = BG = GE = EF$	
$\therefore EFBG$ (is 'n ruit)	(parm. met 4 gelyke sye)

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BQK 2. 2BQM 3. 2BQN 4. 2BQP 5. 2BQQ

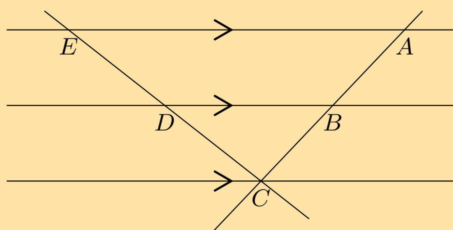
 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

9.4 Driehoeke

Eweredigheid van driehoeke

Oefening 9 – 4: Eweredigheid van driehoeke

1. Die diagram hieronder toon drie ewewydige lyne wat gesny word deur twee snylyne EC en AC sodat $ED : DC = 4 : 6$.



Bepaal:

a) $\frac{BC}{AB}$

Oplossing:

Ons word gegee dat $ED : DC = 4 : 6$, wat ons as 'n breuk kan skryf en vereenvoudig:

$$\begin{aligned} \frac{ED}{DC} &= \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En } \frac{ED}{DC} &= \frac{AB}{BC} \\ \frac{AB}{BC} &= \frac{2}{3} \\ \therefore \frac{BC}{AB} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) $AB : AC$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \frac{ED}{EC} \\ &= \frac{2}{2+3} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

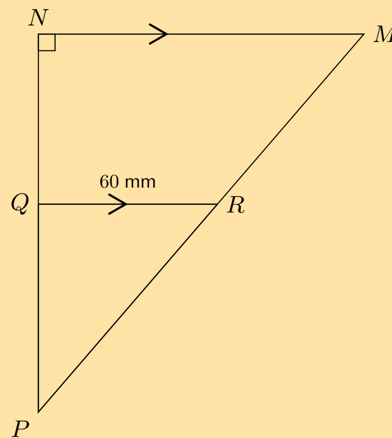
c) Die lengtes van AC en ED, as dit gegee is dat $AB = 12$ mm.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{AC} &= \frac{ED}{EC} \\
&= \frac{2}{2+3} \\
&= \frac{2}{5} \\
\text{En ons weet dat } AB &= 12 \text{ mm} \\
\frac{AB}{AC} &= \frac{2}{5} \times \frac{6}{6} \\
&= \frac{12}{30} \\
\therefore AC &= 30 \text{ mm}
\end{aligned}$$

Ons kan nie die lengte van ED bepaal nie aangesien ons nie weet wat die lengte is van DC of EC nie. Ons weet slegs dat $\frac{ED}{EC} = \frac{2}{5}$.

2. In reghoekige $\triangle MNP$, word QR ewewydig aan NM getrek met R die middelpunt van MP. $NP = 16$ cm en $RQ = 60$ mm. Bepaal QP en RP.



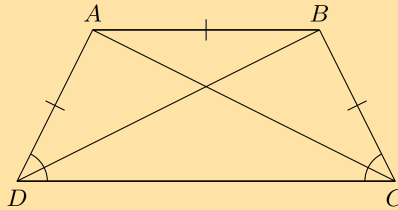
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{RP}{MP} &= \frac{QP}{NP} \\
&= \frac{1}{2} \\
\therefore \frac{QP}{16} &= \frac{1}{2} \\
\therefore QP &= 8 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Gebruik die stelling van Pythagoras om RP te bepaal.

$$\begin{aligned}
\text{In } \triangle RQP: \quad PR^2 &= QR^2 + QP^2 \\
&= (8)^2 + (6)^2 \\
&= 64 + 36 \\
&= 100 \\
\therefore PR &= 10 \text{ cm}
\end{aligned}$$

3. Gegee trapesium $ABCD$ met $DA = AB = BC$ en $A\hat{D}C = B\hat{C}D$.



a) Bewys dat BD vir $\hat{D}$ halveer.

Oplossing:

$$\begin{aligned} A\hat{D}B &= A\hat{B}D && (AD = AB) \\ A\hat{B}D &= B\hat{D}C && (AB \parallel DC, \text{ verw.}\angle\text{e}) \\ \therefore A\hat{D}B &= B\hat{D}C \\ \therefore BD &\text{ halveer } \hat{D} \end{aligned}$$

b) Bewys dat die twee hoeklyne ewe lank is.

Oplossing:

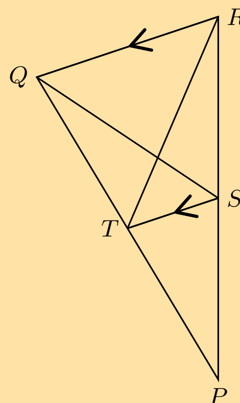
$$\begin{aligned} AD &= BC && \text{(gegee)} \\ A\hat{D}C &= B\hat{C}D && \text{(gegee)} \\ DC &= DC \\ \therefore \triangle ADC &\equiv \triangle BCD && \text{(SHS)} \\ \therefore AC &= BD \end{aligned}$$

c) As $DC : AB = 5 : 4$, toon dat die oppervlakte $ABCD = 2{,}25 \times$ area $\triangle ABC$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{DC}{AB} &= \frac{5}{4} && \text{(gegee)} \\ \therefore \frac{\text{Area } \triangle BDC}{\text{Area } \triangle BDA} &= \frac{5}{4} && \text{(dieselfde hoogte, } DC \parallel AB) \\ \therefore \frac{\text{Area } ABCD}{\text{Area } \triangle BDA} &= \frac{9}{4} \\ \text{En } \triangle BDA &= \triangle ABC && \text{(dieselfde hoogte, dieselfde basis} AB) \\ \therefore \frac{\text{Area } ABCD}{\text{Area } \triangle ABC} &= 2{,}25 \\ \text{Area } ABCD &= 2{,}25\,(\text{Area } \triangle ABC) \end{aligned}$$

4. In die diagram hieronder, word $\triangle PQR$ gegee met $QR \parallel TS$.
   Toon dat die area $\triangle PQS =$ area $\triangle PRT$.



Oplossing:

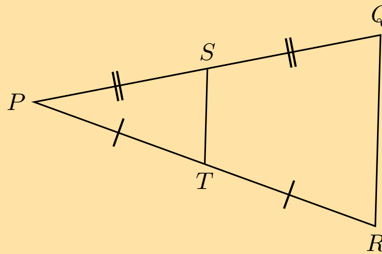
$$\begin{aligned} \text{Area } \triangle PQS &= \text{Area } \triangle PTS + \text{Area } \triangle SQT \\ \text{Area } \triangle PRT &= \text{Area } \triangle PTS + \text{Area } \triangle SRT \\ \text{Beskou } \triangle SQT & \text{ en } \triangle SRT \\ ST & \text{ is 'n gemene basis} \\ QR \parallel TS, & \text{ dus is hoogte dieselfde} \\ \therefore \text{Area } \triangle SQT &= \text{Area } \triangle SRT \\ \therefore \text{Area } \triangle PQS &= \text{Area } \triangle PRT \end{aligned}$$

5. In Graad 10 het ons die middelpuntstelling bewys deur gebruik te maak van kongruente driehoeke.

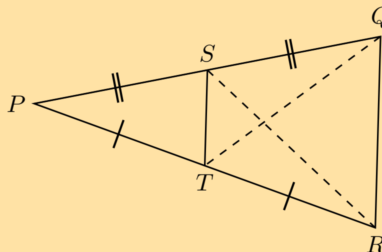
   a) Voltooi die volgende bewoording van die middelpuntstelling:
   "Die lyn wat . . . . . . van 'n driehoek verbind, is . . . . . . aan die derde sy en gelyk aan . . . . . ."

   Oplossing:
   "Die lyn wat die **die middelpunte van twee sye** van 'n driehoek verbind, is **ewewydig** aan die derde sy en gelyk aan **helfte van die lengte van die derde sy.**"

   b) In $\triangle PQR$, is T en S die middelpunte van PR en PQ onderskeidelik. Bewys $TS \parallel RQ$.



   Oplossing:
   Wenk: maak 'n konstruksie deur SR en TQ te trek.



$$\begin{aligned} \text{Area } \triangle SPT &= \text{Area } \triangle SRT && (PT = TR, \text{ en dieselfde hoogte}) \\ \text{Area } \triangle SPT &= \text{Area } \triangle SQT && (PS = SQ, \text{ en dieselfde hoogte}) \\ \therefore \text{Area } \triangle SRT &= \text{Area } \triangle TQS && (\text{gelyke opp. } \triangle SPT) \\ \therefore TS &\parallel RQ && (2\triangle\text{e met dieselfde basis } ST \\ &&& \text{moet dieselfde hoogte hê}) \end{aligned}$$

   c) Skryf die omgekeerde van die middelpuntstelling neer.

   Oplossing:
   Omgekeerde: 'n lyn deur die middelpunt van een sy van 'n driehoek, ewewydig aan die tweede sy, halveer die derde sy.

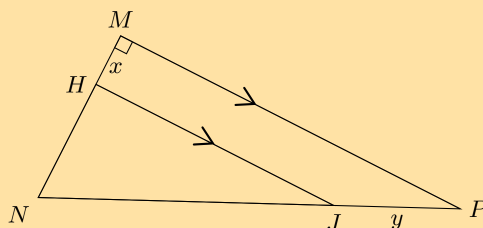
Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BQR 2. 2BQS 3. 2BQT 4. 2BQV 5. 2BQW

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 9 – 5: Eweredigheidstelling

1. In $\triangle MNP$, $\hat{M} = 90°$ en $HJ \parallel MP$.
   $HN : MH = 3 : 1$, $HM = x$ en $JP = y$.



   a) Bereken $JP : NP$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{JP}{NP} &= \frac{HM}{NM} \qquad (HJ \parallel MP) \\ &= \frac{x}{x+3x} \\ &= \frac{x}{4x} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   b) Bereken $\frac{\text{area } \triangle HNJ}{\text{area } \triangle MNP}$.

   Oplossing:

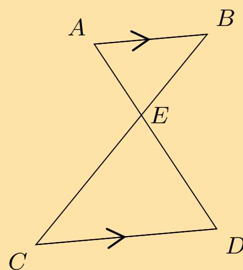
$$\begin{aligned} \frac{HN}{MH} &= \frac{3}{1} \\ \therefore HN &= 3x \\ NJ &= 3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle HNJ: \quad H &= 90° \qquad (HJ \parallel MP) \\ \therefore HJ^2 &= NJ^2 - NH^2 \\ &= (3y)^2 - (3x)^2 \\ &= 9y^2 - 9x^2 \\ HJ &= \sqrt{9(y^2 - x^2)} \\ &= 3\sqrt{y^2 - x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle MNP: \quad \hat{M} &= 90° \\ MP^2 &= (4y)^2 - (4x)^2 \\ MP &= \sqrt{16(y^2 - x^2)} \\ MP &= 4\sqrt{y^2 - x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{area } \triangle HNJ}{\text{area } \triangle MNP} &= \frac{\frac{1}{2}HJ \times HN}{\frac{1}{2}MP \times MN} \\ &= \frac{3\sqrt{y^2 - x^2} \times 3x}{4\sqrt{y^2 - x^2} \times 4x} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

2. Gebruik die gegewe diagram en bewys die eweredigheidstelling.

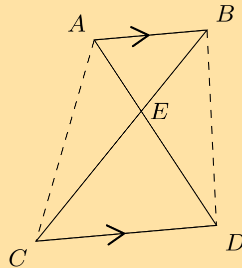


Oplossing:

Gegee: $AB \parallel CD$

Gevra om te bewys: $AE : ED = BE : EC$

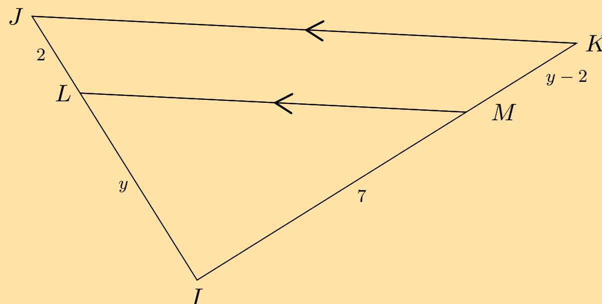
Konstruksie: Trek AC en BD



Bewys: gebruik area van $\triangle$'s

$$\frac{\triangle AEB}{\triangle ACB} = \frac{EB}{CB} \quad \text{(dieselfde hoogte)}$$
$$\frac{\triangle AEB}{\triangle ADB} = \frac{AE}{AD} \quad \text{(dieselfde hoogte)}$$
$$\text{Maar} \quad \triangle ACB = \triangle ADB \quad (AB \parallel CD \ \therefore \text{ dieselfde hoogte})$$
$$\therefore \frac{EB}{CB} = \frac{EA}{DA}$$
$$\therefore \frac{EB}{CE} = \frac{EA}{DE}$$

3. In die diagram hieronder, $JL = 2, LI = y, IM = 7$ en $MK = y - 2$.
   As $LM \parallel JK$, bereken y (korrek tot twee desimale plekke).



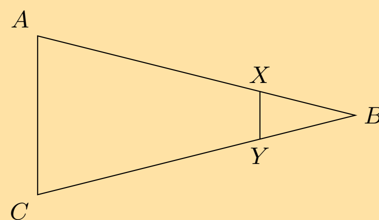
Oplossing:

$$\frac{LI}{JL} = \frac{MI}{KM} \quad (LM \parallel JK)$$
$$\frac{y}{2} = \frac{7}{y-2}$$
$$y(y-2) = 14$$
$$y^2 - 2y - 14 = 0$$
$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(-14)}}{2}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{60}}{2}$$
$$y = 4{,}87 \text{ or } -2{,}87$$
$$\text{Maar } y > 0$$
$$\therefore y = 4{,}87$$

4. Skryf die omgekeerde van die eweredigheidstelling neer en illustreer met 'n diagram.

   Oplossing:

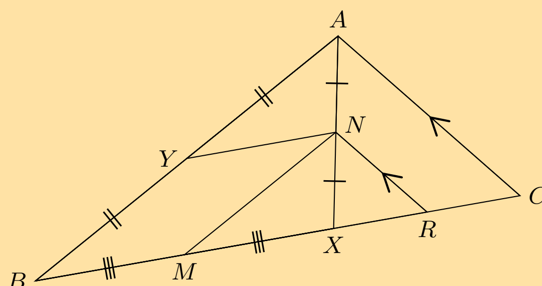
   Omgekeerde van die eweredigheidstelling: 'n lyn wat twee sye van 'n driehoek eweredig verdeel, sal ewewydig wees aan die derde sy.



$$\text{As } \frac{AX}{XB} = \frac{CY}{YB}$$

dan sal $XY \parallel AC$

5. In $\triangle ABC$, is X 'n punt op BC. N is die middelpunt van AX, Y is die middelpunt van AB en M is die middelpunt van BX.



a) Bewys dat $YBMN$ 'n parallelogram is.

Oplossing:

Beskou $\triangle ABX$:

$YN \parallel BX$	(Y en N middelpunte van AB en AX)
$MN \parallel BA$	(M en N middelpunte van BX en XA)
$\therefore YBMN$ is 'n parallelogram	(beide teenoorst. sye $\parallel$)

b) Bewys dat $MR = \frac{1}{2}BC$.

Oplossing:

Beskou $\triangle AXC$:

$RN \parallel CA$	(gegee)
En $XN = NA$	(N middelpunt van AB)
$\therefore XR = RC$	
M is die middelpunt van BX	(gegee)
$\therefore MX + XR = \frac{1}{2}BX + \frac{1}{2}XC$	
$\therefore MR = \frac{1}{2}(BX + XC)$	
$MR = \frac{1}{2}(BC)$	

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

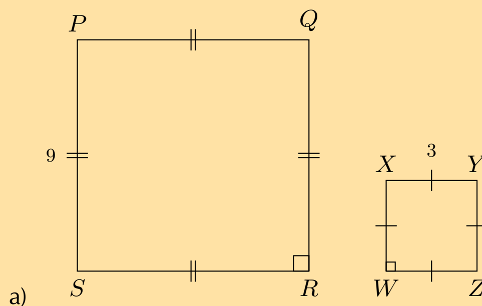
1. 2BQX 2. 2BQY 3. 2BQZ 4. 2BR2 5. 2BR3

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

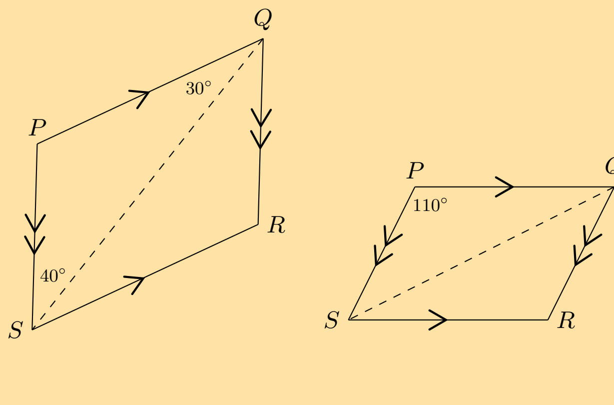
Gelykvormige poligone

Oefening 9 – 6: Gelykvormige poligone

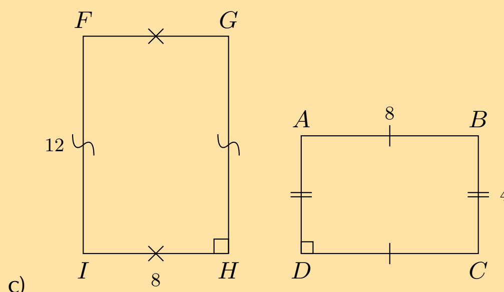
1. Bepaal of die volgende poligone gelykvormig is of nie en gee redes.

   a) 

   Oplossing:
   Soortgelyk, al die hoeke $= 90^\circ$ en die sye is in dieselfde verhouding.

   b) 

   Oplossing:
   Nie genoeg inligting word gegee nie. Ooreenkomstige hoeke is gelyk.

   c) 

   Oplossing:
   Nie gelykvormig nie, sye is nie in dieselfde verhouding nie.

2. Is die volgende bewerings waar of onwaar? Indien onwaar, gee redes of trek 'n toepaslike diagram.

   a) Alle vierkante is gelykvormig.

   Oplossing:
   Waar

b) Alle reghoeke is gelykvormig.

Oplossing:

Onwaar. Pare oorkomstige sye is nie noodwendig in dieselfde verhouding nie.

c) Alle ruite is gelykvormig.

Oplossing:

Onwaar. Ooreenkomstige hoeke is nie noodwendig ewe groot nie.

d) Alle kongruente poligone is gelykvormig.

Oplossing:

Waar

e) Alle gelykvormige poligone is kongruent.

Oplossing:

Onwaar. Ooreenkomstige hoeke is ewe groot maar dit is nie noodwendig waar dat ooreenkomstige sye ewe lank is nie.

f) Alle kongruente driehoeke is gelykvormig.

Oplossing:

Waar

g) Gelykbenige driehoeke is gelykvormig.

Oplossing:

Onwaar. Ooreenkomstige hoeke is nie noodwendig ewe groot nie en pare ooreenkomstige sye is nie noodwendig in dieselfde verhouding nie.

h) Gelyksydige driehoeke is gelykvormig.

Oplossing:

Waar

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

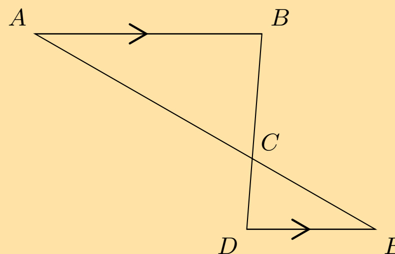
1a. 2BR4	1b. 2BR5	1c. 2BR6	2a. 2BR7	2b. 2BR8	2c. 2BR9
2d. 2BRB	2e. 2BRC	2f. 2BRD	2g. 2BRF	2h. 2BRG	

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Gelykvormigheid van driehoeke

Oefening 9 – 7: Gelykvormigheid van driehoeke

1. In die diagram hieronder is $AB \parallel DE$.



a) Bewys dat $\triangle ABC \ ||| \ \triangle EDC$.

Oplossing:

In $\triangle ABC$ en $\triangle EDC$:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{E} && (\text{verw.}\angle\text{e}, AB \parallel DE) \\ \hat{B} &= \hat{D} && (\text{verw.}\angle\text{e}, AB \parallel DE) \\ \therefore \triangle ABC &\ ||| \ \triangle EDC && (\text{HHH}) \end{aligned}$$

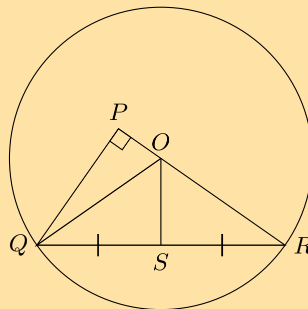
b) As $\frac{AC}{AE} = \frac{5}{7}$ en $AB = 4$ cm, bereken die lengte van DE (korrek tot een desimale plek).

Oplossing:

In $\triangle ABC$ en $\triangle EDC$:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{5}{7} \qquad \text{(gegee)}$$
$$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{5}{2}$$
$$\frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC} \qquad (\triangle ABC \; ||| \; \triangle EDC)$$
$$\frac{DE}{4} = \frac{2}{5}$$
$$\therefore DE = \frac{8}{5}$$
$$= 1{,}6 \text{ cm}$$

2. In sirkel O, $RP \perp PQ$.



a) Bewys dat $\triangle PRQ \; ||| \; \triangle SRO$.

Oplossing:

In $\triangle PRQ$ en $\triangle SRO$:

$$\hat{P} = 90^\circ \qquad \text{(gegee)}$$
$$\hat{S} = 90^\circ \qquad (QS = SR)$$
$$\therefore \hat{P} = \hat{S}$$
$$\hat{R} = \hat{R} \qquad \text{(gemene } \angle\text{)}$$
$$\therefore \triangle PRQ \; ||| \; \triangle SRO \qquad \text{(HHH)}$$

b) Bewys dat $\frac{OR}{SR} = \frac{QR}{PR}$.

Oplossing:

$$\frac{PR}{SR} = \frac{RQ}{RO} = \frac{PQ}{SO} \qquad (\triangle SRO \; ||| \; \triangle PRQ)$$
$$\text{Dus} \quad \frac{RQ}{RO} = \frac{PR}{SR}$$
$$\frac{QR}{OR} = \frac{PR}{SR}$$
$$QR \,.\, SR = PR \,.\, OR$$
$$\therefore \frac{QR}{PR} = \frac{OR}{SR}$$

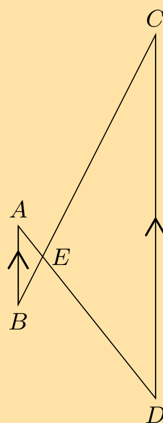
c) As $SR = 18$ mm en $QP = 20$ mm, bereken die radius van sirkel O (korrek tot een desimale plek).

Oplossing:

$$\frac{OR}{SR} = \frac{QR}{PR} \qquad \text{(bewys)}$$

$$\begin{aligned}
\text{In } \triangle PQR: \quad PR^2 &= QR^2 - QP^2 && \text{(Pythagoras)}\\
&= (36)^2 - (20)^2\\
\therefore PR &= \sqrt{896}\\
&= 8\sqrt{14}\\
\therefore \frac{OR}{18} &= \frac{36}{8\sqrt{14}}\\
\therefore OR &= 18 \times \frac{36}{8\sqrt{14}}\\
\therefore \text{radius} &= 21{,}6 \text{ mm}
\end{aligned}$$

3. Gegewe die figuur met die volgende sylengtes, vind AE, EC en BE.
   $BC = 15$ cm, $AB = 4$ cm, $CD = 18$ cm en $ED = 9$ cm.



Oplossing:

$$\begin{aligned}
B\hat{A}E &= C\hat{D}E && \text{(verw.}\angle\text{e, } AB \parallel CD)\\
A\hat{B}E &= D\hat{C}E && \text{(verw.}\angle\text{e, } AB \parallel CD)\\
A\hat{E}B &= D\hat{E}C && \text{(regoorst. }\angle\text{e)}\\
\therefore \triangle AEB \; &||| \; \triangle DEC && \text{(HHH)}
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DC} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} \qquad (\triangle AEB \; ||| \; \triangle DEC)$$

$$\begin{aligned}
AE &= \tfrac{2}{9} DE\\
&= \tfrac{2}{9}(9)\\
&= 2 \text{ cm}
\end{aligned}$$

$$\frac{EC}{BC} = \frac{ED}{AD} = \frac{9}{11} \qquad (AB \parallel CD)$$

$$\begin{aligned}
EC &= \frac{ED}{AD}(BC)\\
&= \tfrac{9}{11}(15) = 12{,}3 \text{ cm}
\end{aligned}$$

$$\frac{BE}{BC} = \frac{AE}{AD} = \frac{2}{11} \qquad (AB \parallel CD)$$

$$\begin{aligned}
BE &= \frac{AE}{AD}(BC)\\
&= \tfrac{2}{11}(15) = 2{,}7 \text{ cm}
\end{aligned}$$

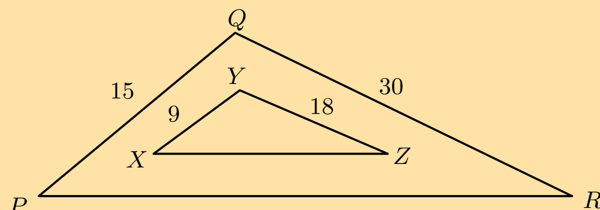
Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BRH 2. 2BRJ 3. 2BRK

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 9 – 8: Gelykvormigheid van driehoeke

1. Oorweeg die diagram hieronder. $PR = 20$ eenhede en $XZ = 12$ eenhede. Is $\triangle XYZ \ ||| \ \triangle PQR$? Gee redes.



Oplossing:

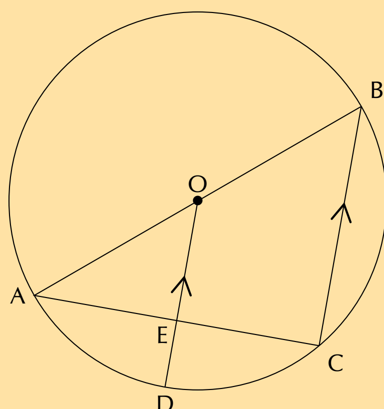
$$\frac{XY}{PQ} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{YZ}{QR} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{ZX}{RP} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Ja, $\triangle XYZ \ ||| \ \triangle PQR$.

2. AB is 'n middellyn van die sirkel $ABCD$. OD word ewewydig aan BC getrek en ontmoet AC by E.

As die radius 10 cm is en $AC = 16$ cm, bereken die lengte van ED.

[NCS, Vraestel 3, November 2011]



Oplossing:

$\hat{C} = 90°$	($\angle$e in semi-sirkel)
$O\hat{E}A = 90°$	(ooreenk. $\angle$e; $OD \parallel BC$)
$AE = 8$ cm	(lyn vanaf middelpunt $\perp$ koord)
$OE = 6$ cm	(Pythagoras)
$ED = 10 - 6 = 4$ cm	

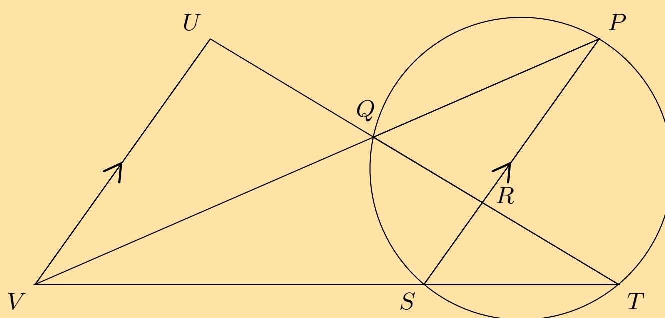
OF

$$\begin{aligned} \hat{C} &= 90^\circ && (\angle\text{e in semi-sirkel}) \\ O\hat{E}A &= 90^\circ && (\text{ooreenk. } \angle\text{e; } OD \parallel BC) \\ OE &\parallel BC && (\text{gegee}) \\ OA &= OB && (\text{radiusse}) \\ AE &= EC = 8 \text{ cm} && (\text{middelpunt st.}) \\ OE &= 6 \text{ cm} && (\text{Pythagoras}) \\ ED &= 10 - 6 = 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

OF

$$\begin{aligned} \hat{C} &= 90^\circ && (\angle\text{e in semi-sirkel}) \\ BC^2 &= (20)^2 - (16)^2 \\ BC^2 &= 144 \\ BC &= 12 \\ OE &= \tfrac{1}{2}BC && (\text{middelpunt st.}) \\ OE &= 6 \text{ cm} \\ OD &= 10 \text{ cm} \\ ED &= 10 - 6 = 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

3. P, Q, S en T is op die omtrek van die sirkel.
   TS is verleng na V sodat $SV = 2TS$.
   TRQ is verleng na U sodat $VU \parallel SRP$.



Bewys, met redes, dat:

a) $\dfrac{TR}{RU} = \dfrac{1}{3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{TR}{TU} &= \frac{TS}{TV} && (SR \parallel VU) \\ &= \frac{1}{3} && (SV = 2TS) \end{aligned}$$

b) $\triangle TQV \;|||\; \triangle PSV$

Oplossing:

In $\triangle TQV$ en $\triangle PSV$:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{T} && (\angle\text{e onderspan deur koord } QS) \\ P\hat{V}T &= P\hat{V}T && (\text{gemene } \angle) \\ \therefore \triangle TQV &\;|||\; \triangle PSV && (\text{HHH}) \end{aligned}$$

c) $QV \,.\, PV = 6TS^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{QV}{TV} &= \frac{SV}{PV} && (\triangle TQV \;|||\; \triangle PSV) \\ \therefore QV \,.\, PV &= TV.SV \\ \text{Maar } SV &= 2TS && (\text{gegee}) \\ \therefore TV &= 3TS \\ \therefore QV.PV &= 3TS.2TS \\ QV.PV &= 6TS^2 \end{aligned}$$

d) $\triangle UQV \;|||\; \triangle RQP \;|||\; \triangle RST$

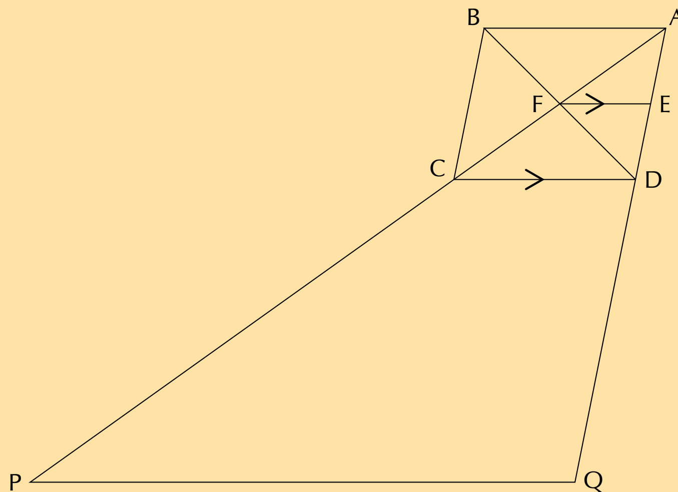
Oplossing:

In $\triangle UQV$ en $\triangle RQP$ en $\triangle RST$:

$$\begin{aligned}
\hat{U} &= Q\hat{R}P && \text{(verw.}\angle\text{e, } VU \parallel RP\text{)}\\
&= S\hat{R}T && \text{(reegoorstaandef } \angle\text{e)}\\
U\hat{V}Q &= \hat{P} && \text{(verw.}\angle\text{e, } VU \parallel RP\text{)}\\
&= \hat{T} && \text{(}\angle\text{e op koord } QS\text{)}\\
\triangle UQV \ ||| \ \triangle RQP \ ||| \ \triangle RST & && \text{(HHH)}
\end{aligned}$$

4. $ABCD$ 'n parallelogram is met diagonale wat sny by F. FE word ewewydig aan CD getrek. AC word verleng na P sodat $PC = 2AC$ en AD word verleng na Q sodat $DQ = 2AD$.

[NCS, Vraestel 3, November 2011]



a) Toon dat E die middelpunt is van AD.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
AF &= FC && \text{(hoeklyne parm. halveer mekaar)}\\
FE &\parallel CD\\
AE &= ED && \text{(eweredigheidst. } FE \parallel CD\text{)}
\end{aligned}$$

b) Bewys dat $PQ \parallel FE$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{AC}{CB} &= \frac{1}{2} && \text{(gegee)}\\
\frac{AD}{DQ} &= \frac{1}{2} && \text{(gegee)}\\
\frac{AC}{CP} &= \frac{AD}{DQ}\\
CD &\parallel PQ && \text{(omgekeerde eweredigheidst.)}\\
CD &\parallel FE && \text{(gegee)}\\
\therefore PQ &\parallel FE
\end{aligned}$$

OF

$$\begin{aligned}
\frac{AC}{AP} &= \frac{1}{3}\\
\frac{AD}{AQ} &= \frac{1}{3}\\
\frac{AC}{AP} &= \frac{AD}{AQ}\\
CD &\parallel PQ && \text{(omgekeerde eweredigheidst.)}\\
CD &\parallel FE && \text{(gegee)}\\
\therefore PQ &\parallel FE
\end{aligned}$$

OF

$$\frac{AF}{AP} = \frac{1}{6}$$
$$\frac{AE}{AQ} = \frac{1}{6}$$
$$\frac{AF}{AP} = \frac{AE}{AQ}$$
$$\therefore PQ \parallel FE \quad \text{(omgekeerde eweredigheidst.)}$$

c) As PQ 60 cm is, bereken die lengte van FE.

Oplossing:

In $\triangle AEF$ en $\triangle APQ$:

i. $\hat{A}$ (is gemeen)

ii. $A\hat{E}F = A\hat{Q}P$ (ooreenk. $\angle$e, $FE \parallel PQ$)

iii. $A\hat{F}E = A\hat{P}Q$ (ooreenk. $\angle$e, $FE \parallel PQ$)

$\therefore \triangle BHD \; ||| \; \triangle FED \quad (\angle\angle\angle)$

$$\frac{FE}{PQ} = \frac{AF}{AP} \quad (|||\ \triangle\text{e})$$
$$\frac{FE}{60} = \frac{1}{6}$$
$$FE = 10 \text{ cm}$$

OF

In $\triangle ADC$ en $\triangle APQ$:

i. $\hat{A}$ (is gemeen)

ii. $A\hat{D}C = A\hat{Q}P$ (ooreenk. $\angle$e, $CD \parallel PQ$)

iii. $A\hat{C}D = A\hat{P}Q$ (ooreenk. $\angle$e, $CD \parallel PQ$)

$\therefore \triangle ADC \; ||| \; \triangle APQ \quad (\angle\angle\angle)$

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AD}{AQ} = \frac{1}{3} \quad (|||\triangle\text{e})$$
$$CD = \frac{1}{3}PQ$$
$$CD = 20 \text{ cm}$$
$$\text{Maar } AF = FC$$
$$AE = ED \quad \text{(middelpuntst.)}$$
$$FE = \frac{1}{2}CD$$
$$FE = 20 \text{ cm}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BRM 2. 2BRN 3. 2BRP 4. 2BRQ

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

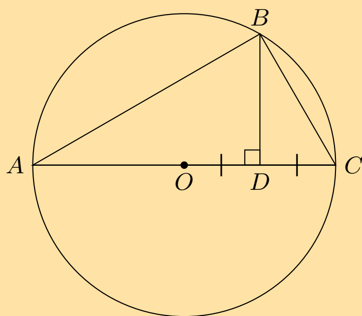
9.6 Stelling van Pythagoras

Oefening 9 – 9: Stelling van Pythagoras

1. B is 'n punt op 'n sirkel met middelpunt O. $BD \perp AC$ en D is die middelpunt van radius OC.

   As die middellyn van die sirkel 24 cm is, vind BD.

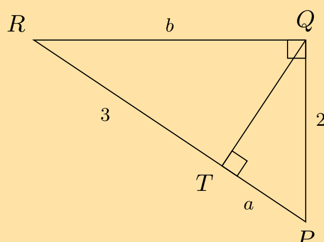
   Los die antwoord in vereenvoudigde wortelvorm.



Oplossing:

$$\begin{aligned}
ABC &= 90^\circ && (\angle \text{ in semi-sirkel})\\
BD &\perp AC\\
\therefore BD^2 &= AC.DC\\
AO &= OC && (\text{gelyke radiusse})\\
&= \tfrac{1}{2}AC\\
&= 12 \text{ cm}\\
\therefore DC &= 6 \text{ cm}\\
\therefore AD &= 18 \text{ cm}\\
BD^2 &= AD \;.\; DC && (\text{reghoekige } \triangle\text{e})\\
BD^2 &= 18 \times 6\\
BD &= \sqrt{108}\\
&= \sqrt{36 \times 3}\\
&= 6\sqrt{3}\text{cm}
\end{aligned}$$

2. In $\triangle PQR$, $RQ \perp QP$ en $QT \perp RP$. $PQ = 2$ eenhede, $QR = b$ eenhede, $RT = 3$ eenhede en $TP = a$ eenhede. Bepaal a en b, en gee redes.



Oplossing:

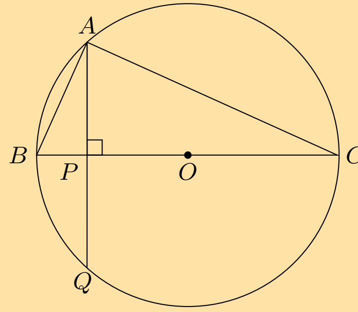
$$\begin{aligned}
QP^2 &= PT \;.\; PR && (\text{reghoekige } \triangle\text{e})\\
2^2 &= a(a+3)\\
4 &= a^2 + 3a\\
0 &= a^2 + 3a - 4\\
0 &= (a-1)(a+4)\\
\therefore a &= 1 \text{ or } a = -4
\end{aligned}$$

Lengte moet positief wees $\therefore a = 1$ eenheid

$$\begin{aligned}
QR^2 &= RT \;.\; RP && (\text{reghoekige } \triangle\text{e})\\
b^2 &= 3(3+1)\\
&= 3(4)\\
&= 12\\
\therefore b &= \pm\sqrt{12}
\end{aligned}$$

Lengte moet positief wees $\therefore b = 2\sqrt{3}$ eenhede

3. Koord AQ van die sirkel met middelpunt O sny BC reghoekig by punt P.



a) Waarom is $\triangle ABP \ ||| \ \triangle CBA$?

Oplossing:

$$B\hat{A}C = 90^\circ \qquad (BC \text{ middellyn van sirkel } O)$$

In $\triangle ABP$ en $\triangle CBA$:

$$\begin{aligned} B\hat{P}A = B\hat{A}C &= 90^\circ && \text{(gegee)} \\ \hat{B} &= \hat{B} && \text{(gemene } \angle\text{)} \\ \therefore \triangle ABP \ &||| \ \triangle CBA && \text{(HHH)} \end{aligned}$$

b) As $AB = \sqrt{6}$ eenhede en $PO = 2$ eenhede, bereken die radius van die sirkel.

Oplossing:

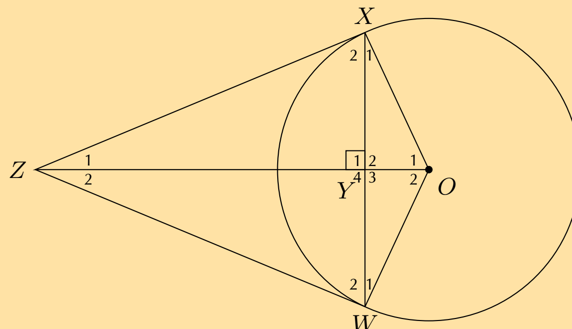
In $\triangle ABP$:

$$\begin{aligned} AP^2 &= BA^2 - BP^2 && \text{(Pythagoras)} \\ BP &= BO - PO \\ &= r - 2 && (BO = r, \text{ gegee } PO = 2) \\ AP^2 &= \left(\sqrt{6}\right)^2 - (r-2)^2 \\ &= 6 - (r-2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AP^2 &= BP.PC && (B\hat{A}C = 90^\circ, AP \perp BC) \\ &= (r-2).PC \\ \text{En } PC &= PO + OC \\ &= 2 + r \\ \therefore AP^2 &= (r-2)(2+r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 - (r-2)^2 &= (r-2)(2+r) \\ 6 - r^2 + 4r - 4 &= r^2 - 4 \\ 2r^2 - 4r - 6 &= 0 \\ r^2 - 2r - 3 &= 0 \\ (r-3)(r+1) &= 0 \\ r &= 3 \text{ or } r = -1 \\ \therefore r &= 3 \text{ eenhede} \end{aligned}$$

4. In die diagram hieronder, is XZ en WZ raaklyne aan die sirkel met middelpunt O en $X\hat{Y}Z = 90^\circ$.



a) Bewys dat $XY^2 = OY\ .\ YZ$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\text{In } \triangle OXZ: \\
&X\hat{Y}Z = 90^\circ && \text{(gegee)} \\
&O\hat{X}Z = 90^\circ && \text{(raaklyn } \perp \text{ radius)} \\
&\therefore XY^2 = OY\ .\ YZ && \text{(reghoekige } \triangle\text{e)}
\end{aligned}$$

b) Bewys dat $\frac{OY}{YZ} = \frac{OW^2}{WZ^2}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\text{In } \triangle OWZ: \\
&W\hat{Y}Z = 90^\circ && \text{(gegee)} \\
&O\hat{W}Z = 90^\circ && \text{(raaklyn } \perp \text{ radius)} \\
&\therefore WZ^2 = ZY\ .\ ZO && \text{(reghoekige } \triangle\text{e)} \\
&\text{En } WO^2 = OY\ .\ ZO && \text{(reghoekige } \triangle\text{e)} \\
&\therefore \frac{WO^2}{WZ^2} = \frac{OY\ .\ ZO}{ZY\ .\ ZO} \\
&\frac{WO^2}{WZ^2} = \frac{OY}{ZY} \\
&\therefore \frac{OY}{YZ} = \frac{OW^2}{WZ^2}
\end{aligned}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

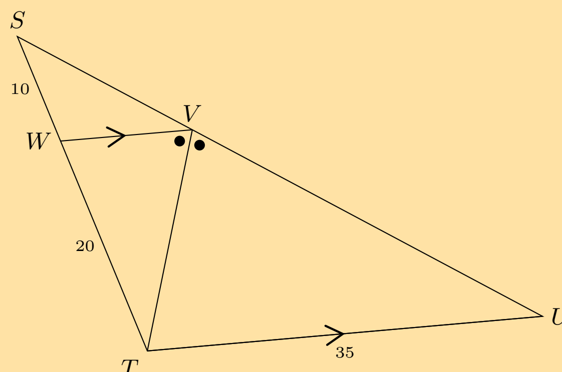
1. 2BRR 2. 2BRS 3. 2BRT 4. 2BRV

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

9.7 Opsomming

Oefening 9 – 10: Einde van hoofstuk oefeninge

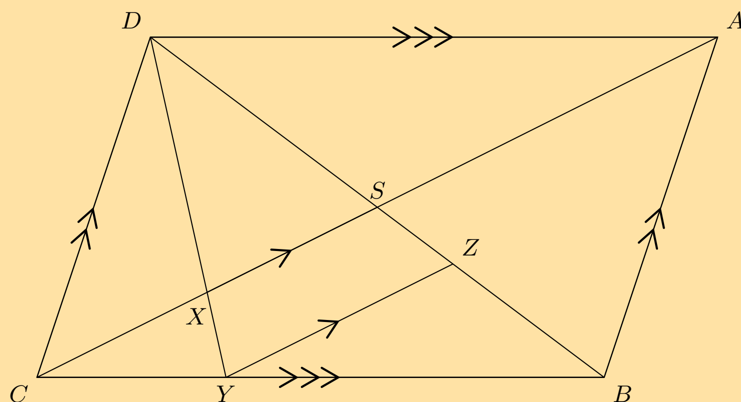
1. Bereken SV



Oplossing:

$$\begin{aligned}
&V\hat{T}U = W\hat{V}T && \text{(verw. } \angle\text{e}, WV \parallel TU) \\
&\therefore TU = VU = 35 && \text{(gelykbenige } \triangle) \\
&\frac{SW}{WT} = \frac{SV}{VU} && \text{(eweredigheidst.)} \\
&\therefore SV = \frac{SW.VU}{WT} = \frac{(10)(35)}{20} = 17{,}5 \text{ eenhede}
\end{aligned}$$

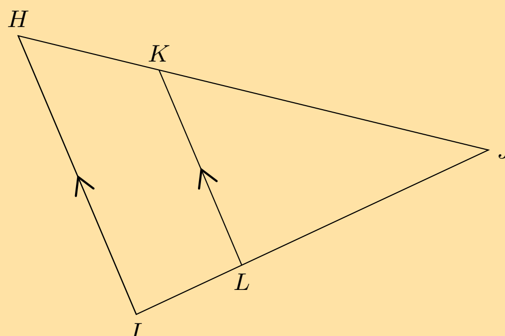
2. $\frac{CB}{YB} = \frac{3}{2}$. Vind $\frac{DS}{SZ}$.



Oplossing:

$DABC$ is 'n parallelogram	($DA \parallel CB$ en $DC \parallel AB$)
$DS = SB$	(hoeklyne halveer)
$\frac{SZ}{ZB} = \frac{CY}{YB} = \frac{3}{2}$	($CS \parallel YZ$)
$\frac{SZ}{SB} = \frac{CY}{CB} = \frac{3}{5}$	($CS \parallel YZ$)
$\therefore SZ = \frac{3}{5}SB$	
$\therefore \frac{DS}{SZ} = \frac{DS}{\frac{3}{5}SB}$	($DS = SB$)
$= \frac{5}{3}$	

3. Deur die volgende figure en lengtes te gebruik, vind IJ en KJ (korrek tot een desimale plek).
   $HI = 20$ m, $KL = 14$ m, $JL = 18$ m en $HJ = 32$ m.



Oplossing:

$$\frac{IJ}{LJ} = \frac{HI}{KL} \qquad \text{(eweredigheidst.)}$$

$$IJ = \frac{HI}{KL}(LJ)$$

$$= \frac{20}{14}(18)$$

$$= \frac{180}{7}$$

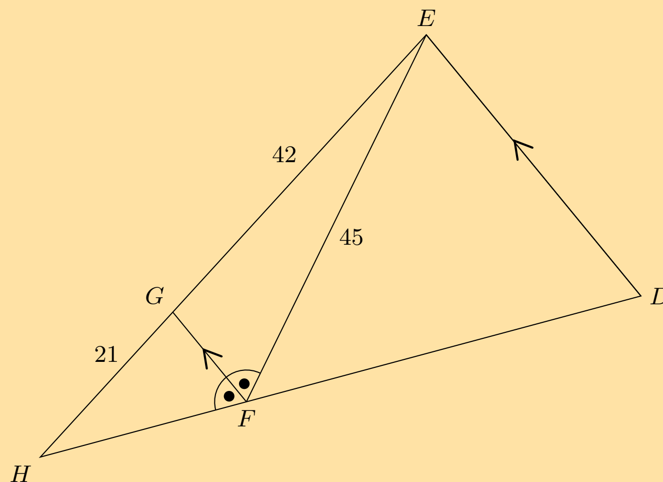
$$= 25{,}7 \text{ m}$$

$$KJ = \frac{LJ}{IJ}(HJ)$$

$$= \frac{18}{25{,}7}(32)$$

$$= 22{,}4 \text{ m}$$

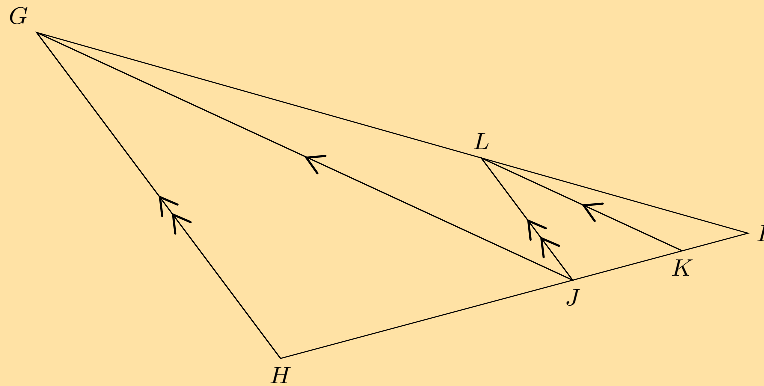
4. Vind FH in die volgende figure.



Oplossing:

$$G\hat{F}H = \hat{D} \qquad \text{(ooreenk. } \angle\text{e}, GF \parallel ED)$$
$$G\hat{F}E = F\hat{E}D \qquad \text{(verw. } \angle\text{e}, GF \parallel ED)$$
$$\therefore F\hat{E}D = \hat{D}$$
$$\therefore EF = FD = 45 \text{ cm}$$
$$\frac{HF}{FD} = \frac{21}{42}$$
$$= \frac{1}{2}$$
$$\therefore HF = \frac{1}{2}(45)$$
$$= 23{,}5 \text{ cm}$$

5. In $\triangle GHI$, $GH \parallel LJ$, $GJ \parallel LK$ en $\frac{JK}{KI} = \frac{5}{3}$. Bepaal $\frac{HJ}{KI}$.



Oplossing:

$$\begin{aligned} L\hat{I}J &= G\hat{I}H \\ J\hat{L}I &= H\hat{G}I && \text{(ooreenk. } \angle\text{e, } HG \parallel JL) \\ \therefore \triangle LIJ &\ ||| \ \triangle GIH && \text{(gelykhoekige } \triangle\text{e)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{HJ}{JI} &= \tfrac{GL}{LI} && (\triangle LIJ \ ||| \ \triangle GIH) \\ \text{en } \tfrac{GL}{LI} &= \tfrac{JK}{KI} && (\triangle LIK \ ||| \ \triangle GIJ) \\ &= \tfrac{5}{3} \\ \therefore \tfrac{HJ}{JI} &= \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

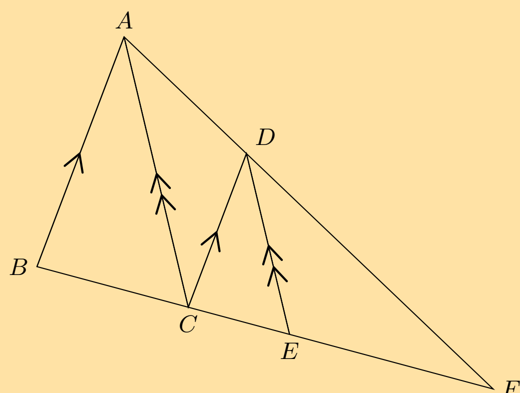
$$\frac{HJ}{KI} = \frac{HJ}{JI} \times \frac{JI}{KI}$$

$$\begin{aligned} JI &= JK + KI \\ &= \frac{5}{3}KI + KI \\ &= \frac{8}{3}KI \\ \frac{JI}{KI} &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{HJ}{KI} &= \frac{HJ}{JI} \times \frac{JI}{KI} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{8}{3} \\ &= \frac{40}{9} \end{aligned}$$

6. $BF = 25$ m, $AB = 13$ m, $AD = 9$ m, $DF = 18$ m.

   Bereken die lengtes van BC, CF, CD, CE en EF, en vind die verhouding $\frac{DE}{AC}$.



Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{BC}{BF} &= \frac{AD}{AF} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} && (CD \parallel BA) \\ \therefore BC &= \frac{1}{3} \times 25 \\ &= 8{,}3 \text{ m} \end{aligned}$$

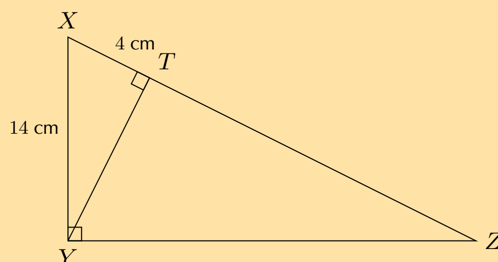
$$\begin{aligned} CF &= BF - BC \\ &= 25 - 8{,}3 \\ &= 16{,}7 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{CD}{AB} &= \frac{DF}{AF} && (CD \parallel BA) \\ CD &= \frac{DF}{AF} \times AB \\ &= \frac{18}{27} \times 13 \\ &= 8{,}7 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{CE}{CF} &= \frac{AD}{AF} && (DE \parallel AC) \\ CE &= \frac{AD}{AF} \times CF \\ &= \frac{9}{27} \times 16{,}7 \\ &= 5{,}6 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EF &= BF - (BC + CE) \\ &= 25 - (8{,}3 - 5{,}6) \\ &= 11{,}1 \text{ m} \end{aligned}$$

7. In $\triangle XYZ$, $X\hat{Y}Z = 90°$ en $YT \perp XZ$. As $XY = 14$ cm en $XT = 4$ cm, bepaal XZ en YZ (korrek tot twee desimale plekke).



Oplossing:

Gebruik die stelling van Pythagoras om YT te bepaal:

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle XTY, \quad YT^2 &= XY^2 - XT^2 && \text{(Pythagoras)} \\ &= 14^2 - 4^2 \\ &= 196 - 16 \\ \therefore YT &= \sqrt{180} \\ &= \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5} \text{ cm} \end{aligned}$$

Gebruik eweredigheid om XZ en YZ te bepaal:

$$\begin{aligned} X\hat{Y}Z &= 90^\circ && \text{(gegee)} \\ YT &\perp XZ && \text{(gegee)} \\ \therefore \quad \triangle XYT &\ ||| \ \triangle YZT \ ||| \ \triangle XZY && \text{(reghoekige } \triangle\text{e)} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{YT}{TZ} = \frac{XT}{YT} \qquad (\triangle YZT \ ||| \ \triangle XYT)$$

$$\therefore YT^2 = TZ \ . \ XT$$

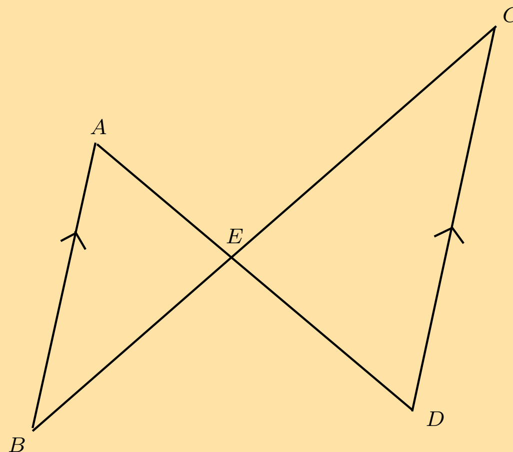
$$\left(6\sqrt{5}\right)^2 = TZ \ . \ 4$$

$$\therefore TZ = 45$$

$$\begin{aligned} \text{En } XZ &= XT + TZ \\ &= 4 + 45 \\ &= 49 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle XYZ, \quad YZ^2 &= XZ^2 - XY^2 && \text{(Pythagoras)} \\ &= 49^2 - 14^2 \\ \therefore YZ &= \sqrt{2205} \\ &= 46{,}96 \text{ cm} \end{aligned}$$

8. Gegewe die figuur met die volgende sylengtes, vind AE, EC en BE.
$BC = 15$ cm, $AB = 4$ cm, $CD = 18$ cm, en $ED = 9$ cm.



Oplossing:

$$\begin{aligned} B\hat{A}E &= C\hat{D}E && \text{(verw. } \angle\text{e, } AB \parallel CD) \\ A\hat{B}E &= D\hat{C}E && \text{(verw. } \angle\text{e, } AB \parallel CD) \\ A\hat{E}B &= D\hat{E}C && \text{(regoorst. } \angle\text{e)} \\ \therefore \triangle AEB &\ ||| \ \triangle DEC && \text{(HHH)} \\ \therefore \tfrac{AE}{DE} &= \tfrac{AB}{DC} = \tfrac{4}{18} = \tfrac{2}{9} && (\triangle AEB \ ||| \ \triangle DEC) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AE &= \frac{2}{9} DE \\ &= \frac{2}{9}(9) \\ &= 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\tfrac{EC}{BC} = \frac{ED}{AD} = \frac{9}{11} \qquad (AB \parallel CD)$$

$$\begin{aligned} EC &= \frac{ED}{AD}(BC) \\ &= \frac{9}{11}(15) \end{aligned}$$

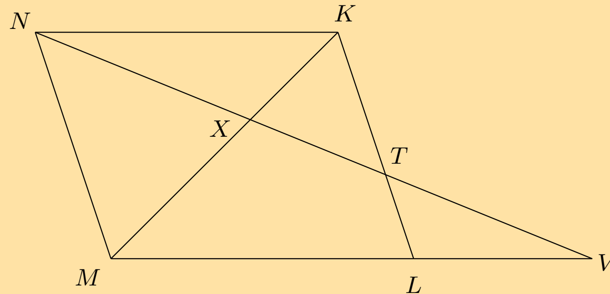
$$\tfrac{BE}{BC} = \frac{AE}{AD} = \frac{2}{11} \qquad (AB \parallel CD)$$

$$BE = \frac{AE}{AD}(BC)$$

$$= \frac{2}{11}(15)$$

$$= 2{,}7 \text{ cm}$$

9. $NKLM$ is 'n parallelogram met T op KL.
   NT verleng ontmoet ML verleng by V. NT sny MK by X.



a) Bewys dat $\frac{XT}{NX} = \frac{XK}{MX}$.

Oplossing:
In $\triangle TXK$ en $\triangle NXM$:

$$X\hat{T}K = X\hat{N}M \qquad \text{(verw.}\angle\text{e, } NK \parallel MV)$$
$$N\hat{X}M = T\hat{X}K \qquad \text{(regoorst. }\angle\text{e)}$$
$$\therefore \triangle TXK \ ||| \ \triangle NXM \qquad \text{(HHH)}$$
$$\therefore \frac{TX}{NX} = \frac{XK}{XM}$$

b) Bewys dat $\triangle VXM \ ||| \ \triangle NXK$.

Oplossing:
In $\triangle VXM$ en $\triangle NXK$:

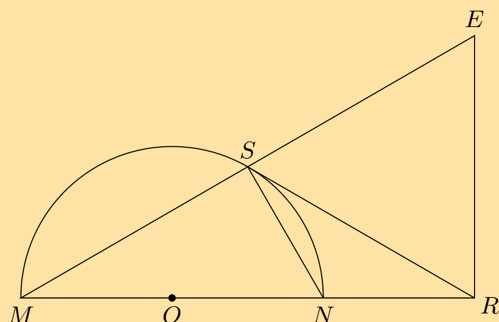
$$\hat{V} = X\hat{N}K \qquad \text{(verw.}\angle\text{e, } NK \parallel MV)$$
$$M\hat{X}V = K\hat{X}N \qquad \text{(regoorst. }\angle\text{e)}$$
$$\therefore \triangle VXM \ ||| \ \triangle NXK \qquad \text{(HHH)}$$

c) As $XT = 3$ cm en $TV = 4$ cm, bereken NX.

Oplossing:

$$\frac{VX}{NX} = \frac{XM}{XK} \qquad (\triangle VXM \ ||| \ \triangle NXK\text{, bewys in (b))}$$
$$\text{Maar } \frac{XM}{XK} = \frac{NX}{TX} \qquad \text{(bewys in (a))}$$
$$\therefore \frac{VX}{NX} = \frac{NX}{TX}$$
$$NX^2 = VX.TX$$
$$NX^2 = 3 \times 4$$
$$NX = \sqrt{12}$$
$$= 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

10. MN is 'n middellyn van sirkel O. MN word verleng na R sodat $MN = 2NR$.
    RS is 'n raaklyn aan die sirkel en $ER \perp MR$. MS verleng ontmoet RE by E.



Bewys dat

a) $SNRE$ is 'n koordevierhoek

Oplossing:

$$\begin{array}{ll} M\hat{S}N = 90^\circ & (\angle \text{ in semi-sirkel}) \\ N\hat{R}E = 90^\circ & (\text{gegee}) \\ \therefore SNRE \text{ is 'n koordev..} & (\text{buite } \angle = \text{ teenoorst. binne } \angle) \end{array}$$

b) $RS = RE$

Oplossing:

$$\begin{array}{ll} N\hat{S}R = \hat{M} = x & (\text{raaklyn/koord}) \\ \therefore E\hat{S}R = 90^\circ - x & \\ \hat{E} = 90^\circ - x & (M\hat{R}E = 90^\circ,\ \ \hat{M} = x) \\ \therefore E\hat{S}R = \hat{E} & \\ \therefore RS = RE & (\text{gelykb. } \triangle) \end{array}$$

c) $\triangle MSN\ |||\ \triangle MRE$

Oplossing:

In $\triangle MSN$ en $\triangle MRE$:

$$\begin{array}{ll} \hat{M} = \hat{M} & \\ M\hat{S}N = 90^\circ & (\angle \text{ in semi-sirkel}) \\ M\hat{R}E = 90^\circ & (\text{gegee}) \\ \therefore M\hat{S}N = M\hat{R}E & \\ \therefore \triangle MSN\ |||\ \triangle MRE & (\text{HHH}) \end{array}$$

d) $\triangle RSN\ |||\ \triangle RMS$

Oplossing:

In $\triangle RSN$ en $\triangle RMS$:

$$\begin{array}{ll} \hat{R} = \hat{R} & (\text{gemene } \angle) \\ R\hat{S}N = \hat{M} & (\text{raaklyn/koord}) \\ \therefore \triangle RSN\ |||\ \triangle RMS & (\text{HHH}) \end{array}$$

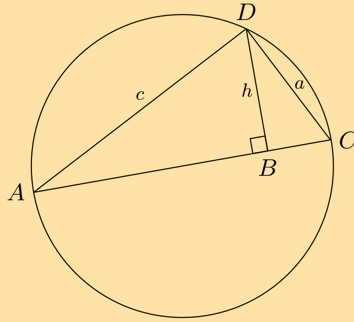
e) $RE^2 = RN.RM$

Oplossing:

$$\frac{RS}{RN} = \frac{RM}{RS}$$
$$RS^2 = RN.RM$$
$$\text{Maar } RS = RE$$
$$RE^2 = RN.RM$$

11. AC 'n middellyn is van sirkel ADC. $DB \perp AC$.

$AC = d$, $AD = c$, $DC = a$ en $DB = h$.



a) Bewys dat $h = \frac{ac}{d}$.

Oplossing:

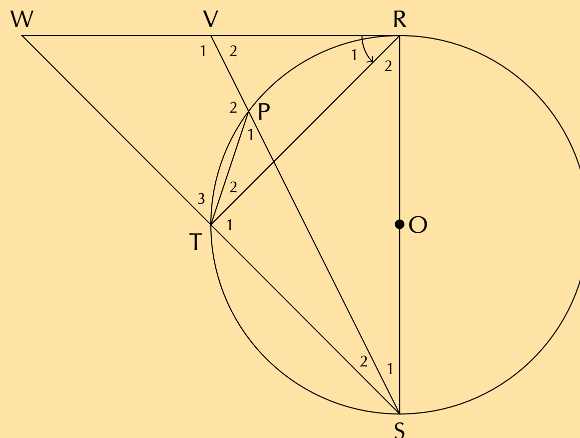
$$\begin{aligned}
\triangle ADB \quad ||| \quad \triangle DCB \quad ||| \quad \triangle ACD \qquad & (A\hat{D}C = 90°, DB \perp AC) \\
\therefore \frac{DB}{AD} = \frac{CD}{AC} & \\
\therefore \frac{h}{c} = \frac{a}{d} & \\
\therefore h = \frac{ac}{d} &
\end{aligned}$$

b) Lei vervolgens af dat $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
h^2 &= \frac{a^2c^2}{d^2} \\
\text{Maar } d^2 &= a^2 + c^2 \qquad (\text{In } \triangle ADC, \hat{D} = 90°, \text{ Pythagoras}) \\
\therefore h^2 &= \frac{a^2c^2}{a^2 + c^2} \\
\therefore \frac{1}{h^2} &= \frac{a^2 + c^2}{a^2c^2} \\
\frac{1}{h^2} &= \frac{a^2}{a^2c^2} + \frac{c^2}{a^2c^2} \\
\frac{1}{h^2} &= \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}
\end{aligned}$$

12. RS is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O. Koord ST word verleng na W. Koord SP verleng, ontmoet raaklyn RW by V. $\hat{R}_1 = 50°$.
[NCS, Vraestel 3, November 2011]



a) Bereken die grootte van $W\hat{R}S$.

Oplossing:

$W\hat{R}S = 90°$ (raaklyn $\perp$ radius)

b) Vind $\hat{W}$.

Oplossing:

$$R\hat{S}T = 50° \quad \text{(raaklyn-koord)}$$
$$\hat{W} = 40° \quad (\angle \text{ som } \triangle)$$

OF

$$\hat{T}_1 = 90° \quad (\angle\text{e in semi-sirkel})$$
$$\hat{W} + \hat{R}_1 = \hat{T}_1 \quad (\text{ buite } \angle\triangle)$$
$$\hat{W} = 40°$$

c) Bepaal die grootte van $\hat{P}_1$.

Oplossing:

$$\hat{R}_2 = 40° \quad \text{(raaklyn } \perp \text{ radius)}$$
$$\hat{P}_1 = 40° \quad (\angle\text{e in dieselfde segment})$$

d) Bewys dat $\hat{V}_1 = P\hat{T}S$.

Oplossing:

$$\hat{P}_1 = \hat{W} \quad (= 40°)$$
WVPT is 'n koordevierhoek (buite $\angle =$ teenoorst binnehoek)
$$\hat{V}_1 = P\hat{T}S \quad (\text{buite } \angle \text{ koordev.})$$

OF

$$\hat{T}_1 = 90° \quad (\angle\text{e in semi-sirkel})$$
$$P\hat{T}S = 90° + \hat{T}_2$$
$$\hat{T}_2 = \hat{S}_1 \quad (\angle\text{e in dieselfde segment})$$
$$P\hat{T}S = 90° + \hat{S}_1 \quad (\text{buite } \angle\triangle)$$
$$\hat{V}_1 = P\hat{T}S$$

OF

$$\hat{P}_2 = 140° \quad (\angle\text{e op reguit lyn})$$
$$\hat{W} + \hat{P}_2 = 180°$$
WVPT is 'n 'n koordevierhoek (teenoorst $\angle$e suppl)
$$\hat{V}_1 = P\hat{T}S \quad (\text{buite } \angle \text{ koordev})$$

OF

$$\hat{V}_1 = \hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \hat{S}_1 \quad (\text{buite } \angle\triangle)$$
$$\hat{V}_1 = 90° + \hat{S}_1$$
$$P\hat{T}S = 90° + \hat{T}_2$$
maar $\hat{T}_2 = \hat{S}_1$ ($\angle$e in dieselfde segment)
$$\hat{V}_1 = P\hat{T}S$$

OF

In $\triangle PTS$ en $\triangle WVS$

$$\hat{P}_1 = \hat{W} \quad (40°)$$
$\hat{S}_2$ is gemeen
$$\hat{V}_1 = P\hat{T}S \quad (\angle \text{ som } \triangle)$$

13. $ABCD$ is 'n koordevierhoek en $BC = CD$.
ECF is 'n raaklyn aan die sirkel by C. ABE en ADF is reguitlyne.

Bewys:

a) AC halveer $E\hat{A}F$

Oplossing:

$$\begin{aligned} BC &= CD && \text{(gegee)} \\ \therefore B\hat{A}C &= D\hat{A}C && (\angle\text{e op gelyke koorde)} \end{aligned}$$

b) $BD \parallel EF$

Oplossing:

$$\begin{aligned} D\hat{C}F &= \hat{A}_2 && \text{(raaklyn/koord)} \\ B\hat{D}C &= \hat{A}_1 && (\angle\text{e op dieselfde koord)} \\ \hat{A}_1 &= \hat{A}_2 && \text{(bewys in (a))} \\ \therefore B\hat{D}C &= D\hat{C}F && \\ \therefore BD &\parallel EF && (\text{verw.}\angle\text{e is gelyk)} \end{aligned}$$

c) $\triangle ADC \ ||| \ \triangle CBE$

Oplossing:

In $\triangle ADC$ en $\triangle CBE$:

$$\begin{aligned} \hat{A}_2 &= D\hat{B}C && (\angle\text{e op koord } CD) \\ &= B\hat{C}E && (\text{verw.}\angle\text{e, } BD \parallel EF) \\ A\hat{D}C &= E\hat{B}C && (\text{buite } \angle \text{ van koordev.)} \\ \therefore \triangle ADC &\ ||| \ \triangle CBE && \text{(HHH)} \end{aligned}$$

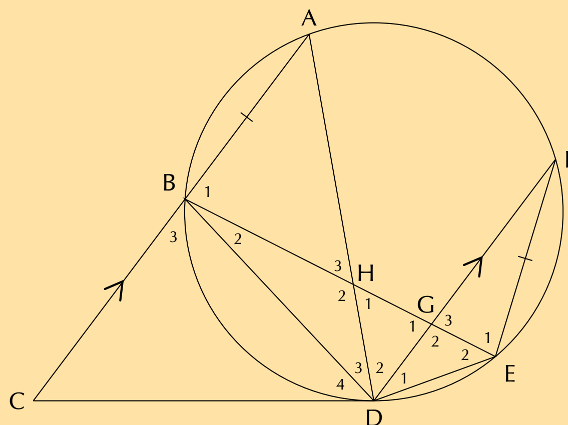
d) $DC^2 = AD.BE$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{DC}{AD} &= \frac{BE}{BC} && (\triangle ADC \ ||| \ \triangle CBE) \\ \text{Maar } DC &= BC && \text{(gegee)} \\ \therefore \frac{DC}{AD} &= \frac{BE}{DC} && \\ \therefore DC^2 &= AD.BE && \end{aligned}$$

14. CD is 'n raaklyn aan sirkel $ABDEF$ by D. Koord AB word verleng na C. Koord BE sny koord AD by H en koord FD by G. $AC \parallel FD$ en $E = AB$. Laat $D_4 = x$ en $D_1 = y$.

[NCS, Vraestel 3, November 2011]



a) Vind DRIE ander hoeke wat ook gelyk is aan x.

Oplossing:

$$\hat{A} = \hat{D}_4 = x \quad \text{(raaklyn-koord)}$$
$$\hat{E}_2 = x \quad \text{(raaklyn-koord)}$$
$$\hat{D}_2 = \hat{A} = x \quad (\text{verw.}\angle\text{e}, CA \parallel DF)$$

b) Bewys dat △BHD ||| △FED.

Oplossing:

In $\triangle BHD$ en $\triangle FED$

i. $\hat{B}_2 = \hat{F}$ ($\angle$e in dieselfde segment)

ii. $\hat{D}_3 = \hat{D}_1$ (koord onderspan $= \angle$e)

$\triangle BHD \,|||\, \triangle FED$ $(\angle\angle\angle)$

c) Vervolgens, of andersins, bewys dat $AB \,.\, BD = FD \,.\, BH$.

Oplossing:

$$\frac{FE}{BH} = \frac{FD}{BD} \quad (|||\ \triangle\text{e})$$
$$\text{Maar } FE = AB \quad \text{(gegee)}$$
$$\frac{AB}{BH} = \frac{FD}{BD}$$
$$AB \,.\, BD = FD \,.\, BH$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BRW 2. 2BRX 3. 2BRY 4. 2BRZ 5. 2BS2 6. 2BS3
7. 2BS4 8. 2BS5 9. 2BS6 10. 2BS7 11. 2BS8 12. 2BS9
13. 2BSB 14. 2BSC

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK



Statistiek

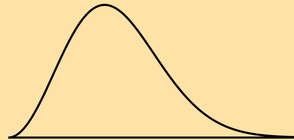
- Leerders kan baie maklik deurmekaar raak met die formules in hierdie hoofstuk. Verduidelik deeglik wat die betekenis van elke simbool in die formule is en maak seker die leerders is bekend met die optellings-notasie.
- Doen berekenings eers per hand sodat die leerders al die sleutel konsepte goed verstaan.
- Vaardigheid in die gebruik van sakrekenaars is noodsaaklik in hierdie hoofstuk. Die stappe vir die gebruik van SHARP en CASIO sakrekenaars word gewys, maar 'n praktiese demonstrasie is dalk nodig.
- Die formule vir 'n populasie variansie en populasie standaardafwyking word gebruik en nie die formules vir 'n steekproef nie.
- Berekening van die korrelasiekoëffisiënt vereis die gebruik van die steekproef standaardafwyking, maar die konsepte steekproef en populasie word nie gedek in die CAPS dokument nie. Die formule om die korrelasiekoëffisiënt in hierdie hoofstuk te bereken, is dus $r = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ en sal dus nie leerders verwar nie. Die regte formule is egter $r = b\frac{S_x}{S_y}$, omdat dit egter 'n ratio (verhouding) is, sal die verskil in noemers tussen die populasie standaardafwyking en die steekproef standaardafwyking mekaar uitkanselleer. Neem kennis dat daar ook ander formules vir die korrelasiekoëffisiënt is, maar dit moet vermy word aangesien die gebruik van die populasie standaardafwyking sal lei tot foutiewe resultate.
- Bespreek die verkeerde gebuik van statistiek in die wêreld en moedig hulle aan om daarop te let.

10.1 Hersiening

Oefening 10 – 1: Hersiening

1. Sê of die volgende data versamelings simmetries, skeef na regs of skeef na links is.

   a) 'n Data versameling met die volgende verspreiding:

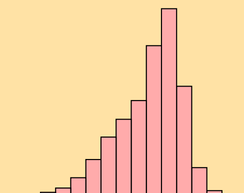
   Oplossing: skeef na regs

   b) 'n Data versameling met die volgende mond-en-snordiagram:

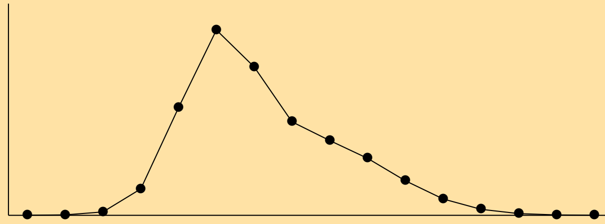
   Oplossing: simmetries

   c) 'n Data versameling met die volgende histogram:

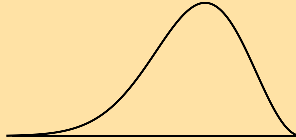
   Oplossing: skeef na links

   d) 'n Data versameling met die volgende frekwensie veelhoek:



Oplossing: skeef na regs

e) 'n Data versameling met die volgende verspreiding:



Oplossing: skeef na links

f) Die volgende data versameling:
105 ; 44 ; 94 ; 149 ; 83 ; 178 ; -4 ; 112 ; 50 ; 188

Oplossing:

Die statistiek van die data versameling is

- gemiddeld: $99{,}9$;
- eerste kwartiel: $66{,}5$;
- mediaan: $99{,}5$;
- derde kwartiel: $130{,}5$.

Let op dat ons teenstrydige aanduidings kry van die verskillende maniere waarop ons moet besluit of data skeef na links of regs is.

- Die gemiddeld is 'n klein bietjie groter as die mediaan. Dit is 'n aanduiding dat die data skeef na regs is.
- Die mediaan is bietjie nader aan die derde kwartiel as aan die eerste kwartiel. Dit is 'n aanduiding dat die data skeef na links is.

Omdat hierdie verskille so klein is en omdat dit mekaar weerspreek, kom ons tot die gevolgtrekking dat die data simmetries is.

2. Vir die volgende data versamelings:

- Bepaal die gemiddelde en die vyfgetal opsomming.
- Trek die mond-en-snordiagram.
- Bepaal die skeefheid van die data.

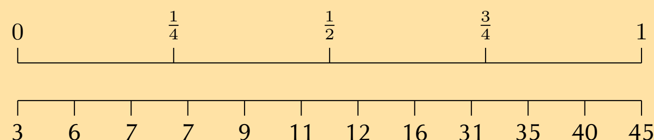
a) 40 ; 45 ; 12 ; 6 ; 9 ; 16 ; 11 ; 7 ; 35 ; 7 ; 31 ; 3

Oplossing:

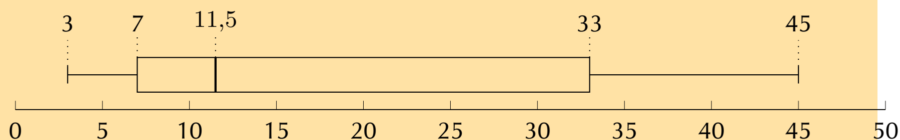
Die gemiddelde is $\bar{x} = \frac{222}{12} = 18{,}5$.
Om die vyfgetal opsomming te bepaal, moet ons die data orden:

$$3\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 7\ ;\ 9\ ;\ 11\ ;\ 12\ ;\ 16\ ;\ 31\ ;\ 35\ ;\ 40\ ;\ 45$$

Ons gebruik die diagram hieronder (of die formules) om te bepaal by watter waardes, of tussen watter waardes, die kwartiele lê.



Die minimum waarde is 3 en die maksimum waarde is 45.
Vir die eerste kwartiel is die posisie tussen die derde en vierde waardes. Omdat beide hierdie waardes gelyk is aan 7, is die eerste kwartiel 7.
Die mediaan (tweede kwartiel) se posisie is halfpad tussen die sesde en die sewende waardes. Die sesde waarde is 11 en die sewende waarde is 12, en dit beteken dat die mediaan $\frac{11+12}{2} = 11{,}5$ is.
Die derde kwartiel se posisie is tussen die negende en die tiende waardes. Dus is die derde kwartiel $\frac{31+35}{2} = 33$.
Dus is die vyfgetal opsomming (3; 7; $11{,}5$; 33; 45).



$$\text{gemiddeld} - \text{mediaan} = 18{,}5 - 11{,}5 = 7$$

Gemiddeld > mediaan, dus is die data skeef na regs.

b) $65 ; 100 ; 99 ; 21 ; 8 ; 27 ; 21 ; 31 ; 33 ; 31 ; 38 ; 16$

Oplossing:

Die gemiddelde is $\bar{x} = \frac{490}{12} = 40{,}83$.

Om die vyfgetal opsomming te bepaal, moet ons die data orden:

$$8\ ;\ 16\ ;\ 21\ ;\ 21\ ;\ 27\ ;\ 31\ ;\ 31\ ;\ 33\ ;\ 38\ ;\ 65\ ;\ 99\ ;\ 100$$

Ons gebruik die formules (of die diagram) om te bepaal by watter waarde, of tussen watter waardes, die kwartiele lê.

$$\text{Posisie van } Q_1 = \frac{1}{4}(n-1)+1 = \frac{1}{4}(12-1)+1 = 3{,}75$$
$$\text{Posisie van } Q_2 = \frac{1}{2}(n-1)+1 = \frac{1}{2}(12-1)+1 = 6{,}5$$
$$\text{Posisie van } Q_3 = \frac{3}{4}(n-1)+1 = \frac{3}{4}(12-1)+1 = 9{,}25$$

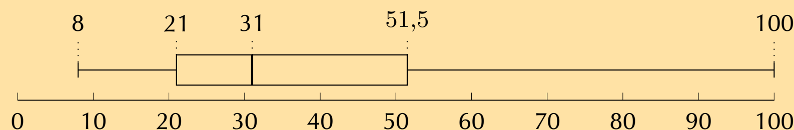
Die minimum is 8 en die maksimum is 100.

Vir die eerste kwartiel is die posisie tussen die derde en vierde waardes. Omdat beide hierdie waardes gelyk is aan 21, is die eerste kwartiel 21.

Die mediaan (tweede kwartiel) se posisie is halfpad tussen die sesde en die sewende waardes. Die sesde waarde en sewende waarde is 31, en dit beteken dat die mediaan 31 is.

Die derde kwartiel se posisie is tussen die negende en die tiende waardes. Dus is die derde kwartiel $\frac{38+65}{2} = 51{,}5$.

Dus is die vyfgetal opsomming (8; 21; 31; 51,5; 100).



$$\text{gemiddeld} - \text{mediaan} = 40{,}83 - 31 = 9{,}83$$

Gemiddeld > mediaan, dus is die data skeef na regs.

c) $65 ; 57 ; 77 ; 92 ; 77 ; 58 ; 90 ; 46 ; 11 ; 81$

Oplossing:

Die gemiddelde is $\bar{x} = \frac{654}{10} = 65{,}4$.

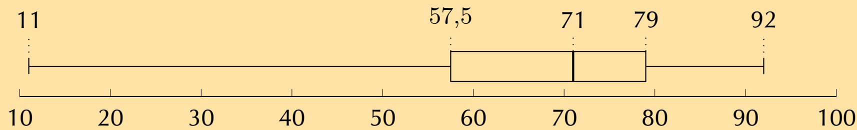
Om die vyfgetal opsomming te bepaal, moet ons die data orden:

$$11\ ;\ 46\ ;\ 57\ ;\ 58\ ;\ 65\ ;\ 77\ ;\ 77\ ;\ 81\ ;\ 90\ ;\ 92$$

Ons gebruik die formules (of die diagram) om te bepaal by watter waarde, of tussen watter waardes, die kwartiele lê.

$$\text{Posisie van } Q_1 = \frac{1}{4}(n-1)+1 = \frac{1}{4}(10-1)+1 = 3{,}25$$
$$\text{Posisie van } Q_2 = \frac{1}{2}(n-1)+1 = \frac{1}{2}(10-1)+1 = 5{,}5$$
$$\text{Posisie van } Q_3 = \frac{3}{4}(n-1)+1 = \frac{3}{4}(10-1)+1 = 7{,}75$$

Die minimum is 11 en die maksimum is 92.
Die eerste kwartiel se posisie lê tussen die derde en die vierde waardes. Omdat die derde 57 is en die vierde 58, is die eerste kwartiel $\frac{57+58}{2} = 57{,}5$.
Die mediaan (tweede kwartiel) se posisie is halfpad tussen die vyfde en die sesde waardes. Die sesde waarde is 65 en die sewende waarde is 77, dus is die mediaan $\frac{65+77}{2} = 71$.
Die derde kwartiel se posisie is tussen die sewende en die agtste waardes. Dus is die derde kwartiel $\frac{77+81}{2} = 79$.
Dis die vyfgetal opsomming (11; 57,5; 77; 79; 92).



$$\text{gemiddeld} - \text{mediaan} = 65{,}4 - 71 = -5{,}6$$

Gemiddeld < mediaan, dus is die data skeef na links.

d) $1 ; 99 ; 76 ; 76 ; 50 ; 74 ; 83 ; 91 ; 41 ; 17 ; 33$

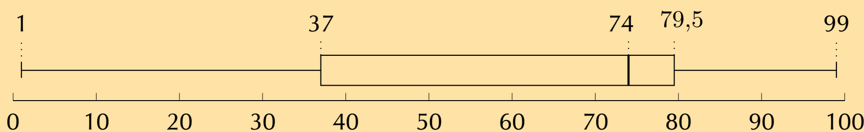
Oplossing:
Die gemiddelde is $\bar{x} = \frac{641}{11} = 58{,}27$.
Om die vyfgetal opsomming te bepaal, moet ons die data orden:

$$1 \ ; \ 17 \ ; \ 33 \ ; \ 41 \ ; \ 50 \ ; \ 74 \ ; \ 76 \ ; \ 76 \ ; \ 83 \ ; \ 91 \ ; \ 99$$

Ons gebruik die formules (of die diagram) om te bepaal by watter waarde, of tussen watter waardes, die kwartiele lê.

$$\begin{aligned}
\text{Posisie van } Q_1 &= \frac{1}{4}(n-1)+1 = \frac{1}{4}(11-1)+1 = 3{,}5 \\
\text{Posisie van } Q_2 &= \frac{1}{2}(n-1)+1 = \frac{1}{2}(11-1)+1 = 6 \\
\text{Posisie van } Q_3 &= \frac{3}{4}(n-1)+1 = \frac{3}{4}(11-1)+1 = 8{,}5
\end{aligned}$$

Die minimum is 1 en die maksimum 99.
Die eerste kwartiel se posisie lê tussen die derde en die vierde waardes. Die derde waarde is 33 en die vierde waarde is 41, dus is die eerste kwartiel $\frac{33+41}{2} = 37$.
Die tweede kwartiel (mediaan) is by die sesde posisie. Die sesde waarde is 74.
Die derde kwartiel se posisie is tussen die agtste en die negende waardes. Dus is die derde kwartiel $\frac{76+83}{2} = 79{,}5$.
Dus is die vyfgetal opsomming (1; 37; 74; 79,5; 99)



$$\text{gemiddeld} - \text{mediaan} = 58{,}27 - 74 = -15{,}73$$

Gemiddeld < mediaan, dus is die data skeef na links.

e) $0{,}5; -0{,}9 ; -1{,}8 ; 3 ; -0{,}2 ; -5{,}2 ; -1{,}8 ; 0{,}1 ; -1{,}7 ; -2 ; 2{,}2 ; 0{,}5; -0{,}5$

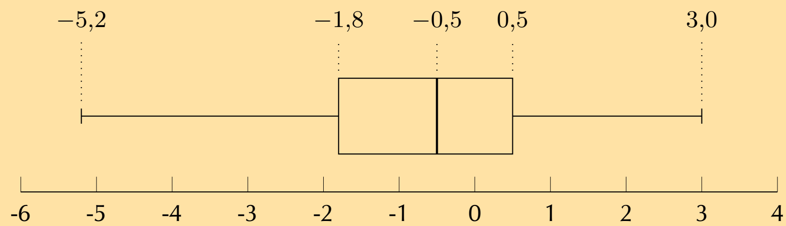
Oplossing:
Die gemiddelde is $\bar{x} = \frac{-7{,}8}{13} = -0{,}6$.
Om die vyfgetal opsomming te bepaal, moet ons die data orden:

$$-5{,}2; -2; -1{,}8; -1{,}8; -1{,}7; -0{,}9; -0{,}5; -0{,}2 \ ; \ 0{,}1 \ ; \ 0{,}5 \ ; \ 0{,}5 \ ; \ 2{,}2 \ ; \ 3$$

Ons gebruik die formules (of die diagram) om te bepaal by watter waarde, of tussen watter waardes, die kwartiele lê.

$$\text{Posisie van } Q_1 = \frac{1}{4}(n-1)+1 = \frac{1}{4}(13-1)+1 = 4$$
$$\text{Posisie van } Q_2 = \frac{1}{2}(n-1)+1 = \frac{1}{2}(13-1)+1 = 7$$
$$\text{Posisie van } Q_3 = \frac{3}{4}(n-1)+1 = \frac{3}{4}(13-1)+1 = 10$$

Die minimum is $-5{,}2$ en die maksimum is 3.
Die eerste kwartiel is by die vierde posisie. Dus is die eerste kwartiel $-1{,}8$.
Die mediaan (tweede kwartiel) is by die sewende posisie. Die sewende waarde is $-0{,}5$.
Vir die derde kwartiel is die posisie by die tiende posisie. Dus die derde kwartiel is $0{,}5$.
Dus is die vyfgetal opsomming ($-5{,}2$; $-1{,}8$; $-0{,}5$; $0{,}5$; 3).



$$\text{gemiddeld} - \text{mediaan} = -0{,}6 - (-0{,}5) = -0{,}1$$

Gemiddeld < mediaan, maar hierdie verskil is baie klein. Dus is die data baie naby aan simmetries/bietjie skeef na links.

f) $86 ; 64 ; 25 ; 71 ; 54 ; 44 ; 97 ; 31 ; 78 ; 46 ; 60 ; 86$

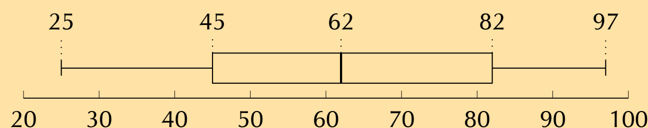
Oplossing:
Die gemiddelde is $\bar{x} = \frac{742}{12} = 61{,}83$.
Om die vyfgetal opsomming te bepaal, moet ons die data orden:

$$25 \;;\; 31 \;;\; 44 \;;\; 46 \;;\; 54 \;;\; 60 \;;\; 64 \;;\; 71 \;;\; 78 \;;\; 86 \;;\; 86 \;;\; 97$$

Ons gebruik die formules (of die diagram) om te bepaal by watter waarde, of tussen watter waardes, die kwartiele lê.

$$\text{Posisie van } Q_1 = \frac{1}{4}(n-1)+1 = \frac{1}{4}(12-1)+1 = 3{,}75$$
$$\text{Posisie van } Q_2 = \frac{1}{2}(n-1)+1 = \frac{1}{2}(12-1)+1 = 6{,}5$$
$$\text{Posisie van } Q_3 = \frac{3}{4}(n-1)+1 = \frac{3}{4}(12-1)+1 = 9{,}25$$

Die minimum is 25 en die maksimum is 97.
Die eerste kwartiel se posisie is tussen die derde en vierde waardes. Die derde waarde is 44 en die vierde waarde is 46, en dit beteken dat die eerste kwartiel se waarde $\frac{44+46}{2} = 45$ is.
Die mediaan (tweede kwartiel) se posisie is halfpad tussen die sesde en die sewende waardes. Die sesde waarde is 60 en die sewende waarde is 64, en dit beteken dat die mediaan $\frac{60+64}{2} = 62$ is.
Die derde kwartiel se posisie is tussen die negende en die tiende waardes. Dus is die derde kwartiel $\frac{78+86}{2} = 82$.
Dus is die vyfgetal opsomming (25; 45; 62; 82; 97).



$$\text{gemiddeld} - \text{mediaan} = 61{,}83 - 62 = -0{,}17$$

Gemiddeld $\approx$ mediaan, dus is die data simmetries.

3. Vir die volgende data versamelings:
   - Bepaal die gemiddeld.
   - Gebruik 'n tabel om die variansie en die standaardafwyking te bepaal.
   - Bepaal watter persentasie van die data punte lê binne een standaardafwyking weg van die gemiddelde. Rond jou antwoord af tot die naaste persentasiepunt.

a)

$$\{9{,}1; 0{,}2; 2{,}8; 2{,}0; 10{,}0; 5{,}8; 9{,}3; 8{,}0\}$$

Oplossing:
Die formule vir die gemiddeld is

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$
$$\therefore \bar{x} = \frac{47{,}2}{8}$$
$$= 5{,}90$$

Die formule vir die variansie is

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Ons trek eers die gemiddelde van elke data punt af en kwadreer dan die resultaat.

x_i	9,1	0,2	2,8	2,0	10,0	5,8	9,3	8,0
$x_i - \overline{x}$	3,2	$-5{,}7$	$-3{,}1$	$-3{,}9$	4,1	$-0{,}1$	3,4	2,1
$(x_i - \overline{x})^2$	10,24	32,49	9,61	15,21	16,81	0,01	11,56	4,41

Die variansie is die som van die laaste ry van hierdie tabel gedeel deur 8, dit is $\sigma^2 = \frac{47{,}2}{8} = 12{,}54$. Die standaardafwyking is die vierkantswortel van die variansie, en is dus $\sigma = \sqrt{12.54} = \pm 3{,}54$.

Die interval wat al die waardes bevat wat een standaardafwyking weg is van die gemiddeld, is $[5{,}90 - 3{,}54; 5{,}90 + 3{,}54] = [9{,}44; 2{,}36]$. Ons word gevra hoeveel waardes **binne** die een standaardafwyking van die gemiddeld is, en dit beteken **binnekant** die interval. Daar is 5 waardes van die data versameling binne-in die interval, en dit is $\frac{5}{8} \times 100 = 63\%$ van die data punte.

b)

$$\{9; 5; 1; 3; 3; 5; 7; 4; 10; 8\}$$

Oplossing:
Die formule vir die gemiddeld is

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$
$$\therefore \bar{x} = \frac{55}{10}$$
$$= 5{,}5$$

Die formule vir die variansie is

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Ons trek eers die gemiddelde van elke data punt af en kwadreer dan die resultaat.

x_i	9	5	1	3	3	5	7	4	10	8
$x_i - \overline{x}$	3,5	$-0{,}5$	$-4{,}5$	$-2{,}5$	$-2{,}5$	$-0{,}5$	1,5	$-1{,}5$	4,5	2,5
$(x_i - \overline{x})^2$	12,25	0,25	20,25	6,25	6,25	0,25	2,25	2,25	20,25	6,25

Die variansie is die som van die laaste ry van hierdie tabel gedeel deur 10, dit is $\sigma^2 = \frac{76,5}{10} = 7,65$. Die standaardafwyking is die vierkantswortel van die variansie, en is dus $\sigma = \sqrt{7,65} = \pm 2,77$

Die interval van al die waardes wat een standaardafwyking weg is van die gemiddelde, is $[5,5 - 2,77; 5,5 + 2,77] = [2,73; 8,27]$. Ons word gevra hoeveel waardes **binne** die een standaardafwyking van die gemiddeld is, en dit beteken **binnekant** die interval. Daar is 7 waardes van die data versameling binne-in die interval, en dit is $\frac{7}{10} \times 100 = 70\%$ van die data punte.

c)
$$\{81; 22; 63; 12; 100; 28; 54; 26; 50; 44; 4; 32\}$$

Oplossing:

Die formule vir die gemiddeld is

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$
$$\therefore \bar{x} = \frac{516}{12}$$
$$= 43$$

Die formule vir die variansie is

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Ons trek eers die gemiddelde van elke data punt af en kwadreer dan die resultaat.

x_i	81	22	63	12	100	28	54	26	50	44	4	32
$x_i - \overline{x}$	38	-21	20	-31	57	-15	11	-17	7	1	-39	-11
$(x_i - \overline{x})^2$	1444	441	400	961	3249	225	121	289	49	1	1521	121

Die variansie is die som van die laaste ry van hierdie tabel gedeel deur 12, dit is $\sigma^2 = \frac{8822}{12} = 735,17$. Die standaardafwyking is die vierkantswortel van die variansie, en is dus $\sigma = \sqrt{735.17} = \pm 27,11$.

Die interval wat al die waardes bevat wat een standaardafwyking weg is van die gemiddeld, is $[43 - 27,11; 43 + 27,11] = [15,89; 70,11]$. Ons word gevra hoeveel waardes **binne** die een standaardafwyking van die gemiddeld is, en dit beteken **binnekant** die interval. Daar is 8 waardes van die data versameling binne-in die interval, en dit is $\frac{8}{12} \times 100 = 67\%$ van die data punte.

4. Gebruik 'n sakrekenaar en bereken die

- gemiddeld,
- variansie,
- en standaardafwyking

van die volgende data versameling:

a) 8 ; 3 ; 10 ; 7 ; 7 ; 1 ; 3 ; 1 ; 3 ; 7

Oplossing:

- Gemiddeld = 5
- $\sigma^2 = 9$
- $\sigma = \pm 3$

b) 4 ; 4 ; 13 ; 9 ; 7 ; 7 ; 2 ; 5 ; 15 ; 4 ; 22 ; 11

Oplossing:

- Gemiddeld = 8,58
- $\sigma^2 = 30,91$
- $\sigma = \pm 5,56$

c) 4,38 ; 3,83 ; 4,99 ; 4,05 ; 2,88 ; 4,83 ; 0,88 ; 5,33 ; 3,49 ; 4,10

Oplossing:

- Gemiddeld = 3,88
- $\sigma^2 = 1,47$

- $\sigma = \pm 1{,}21$

d) $4{,}76$; $-4{,}96$; $-6{,}35$; $-3{,}57$; $0{,}59$; $-2{,}18$; $-4{,}96$; $-3{,}57$; $-2{,}18$; $1{,}98$

Oplossing:

- Gemiddeld = $-1{,}66$
- $\sigma^2 = 11{,}47$
- $\sigma = \pm 3{,}39$

e) 7 ; 53 ; 29 ; 42 ; 12 ; 111 ; 122 ; 79 ; 83 ; 5 ; 69 ; 45 ; 23 ; 77

Oplossing:

- Gemiddeld = $54{,}07$
- $\sigma^2 = 1406{,}07$
- $\sigma = \pm 37{,}50$

5. Xolani doen navorsing oor die prys van 'n wit brood by twee verskillende supermarkte. Die data, in rand, word hieronder gegee.

Supermark A	3,96	3,76	4,00	3,91	3,69	3,72
Supermark B	3,97	3,81	3,52	4,08	3,88	3,68

a) Bepaal die gemiddelde prys van elke supermark en sê duidelik watter supermark het die laagste gemiddelde.

Oplossing:

Supermark A: 3.84. Supermark B: 3.82. Supermark B het die laagste gemiddeld.

b) Bepaal die standaardafwyking van elke supermark se pryse.

Oplossing:

Standaardafwyking:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Vir Supermark A:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - 3{,}84)^2}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{0{,}0882}{6}} \\ &= \sqrt{0{,}0147} \\ &\approx \pm 0{,}121\end{aligned}$$

Vir Supermark B:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - 3{,}82)^2}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{0{,}20\dot{3}}{6}} \\ &= \sqrt{0{,}033\dot{8}} \\ &\approx \pm 0{,}184\end{aligned}$$

c) Watter supermark het die meer konstante prys vir wit brood? Gee redes vir jou antwoord.

Oplossing:

Die standaardafwyking vir Supermark A se pryse is minder as die van Supermark B. Dit beteken dat Supermark A meer konstante pryse het (minder veranderlik) as Supermark B.

6. Die tye vir die 8 atlete wat die 100 m vryslag finaal by die 2012 London Olimpiese Spele geswem het, word hieronder getoon. Al die tye is in sekondes.

$47{,}52$; $47{,}53$; $47{,}80$; $47{,}84$; $47{,}88$; $47{,}92$; $48{,}04$; $48{,}44$

a) Bereken die gemiddelde tyd.

Oplossing: $\overline{x} = 47{,}87$

b) Bereken die standaardafwyking vir die data.

Oplossing: $\sigma = \pm 0{,}27$

c) Hoeveel van die atlete se tye is meer as een standaardafwyking weg van die gemiddeld?

Oplossing:

Die gemiddeld is $47{,}87$ en die standaardafwyking is $0{,}56$. Dus bevat die interval al die waardes wat een standaardafwyking van die gemiddeld is $[47{,}87 - 0{,}27; 47{,}87 + 0{,}27] = [47{,}60; 48{,}15]$. Ons word gevra hoeveel waardes lê **verder** as een standaardafwyking weg van die gemiddelde, met ander woorde **buitekant** die interval. Daar is 3 waardes van die data wat buite die interval is.

7. Die volgende data versameling het 'n gemiddeld van $14{,}7$ en 'n variansie van $10{,}01$.

$$18\ ;\ 11\ ;\ 12\ ;\ a\ ;\ 16\ ;\ 11\ ;\ 19\ ;\ 14\ ;\ b\ ;\ 13$$

Bereken die waardes van a en b.

Oplossing:

Deur gebruik te maak van die formule is die gemiddeld

$$\begin{aligned} 14{,}7 &= \frac{114 + a + b}{10} \\ \therefore a + b &= 147 - 114 \\ \therefore a &= 33 - b \end{aligned}$$

Deur gebruik te maak van die formule is die variansie

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} \\ \therefore 10{,}01 &= \frac{69{,}12 + (a - 14{,}7)^2 + (b - 14{,}7)^2}{10} \end{aligned}$$

Stel $a = 33 - b$ in die vergelyking in om

$$\begin{aligned} 10{,}01 &= \frac{69{,}12 + (18{,}3 - b)^2 + (b - 14{,}7)^2}{10} \\ \therefore 100{,}1 &= 2b^2 - 66b + 620{,}1 \\ \therefore 0 &= b^2 - 33b + 260 \\ &= (b - 13)(b - 20) \end{aligned}$$

te bepaal. Dus is $b = 13$ of $b = 20$.

Omdat $a = 33 - b$, het ons $a = 20$ of $a = 13$. Dus is die twee onbekende waardes in die data versameling is 13 en 20.

Ons weet nie watter een van die waardes is die a en watter een is die b nie, omdat die gemiddeld en variansie niks sê omtrent die orde van die data nie.

8. Die lengte van elke leerder in die klas word gemeet en daar is gevind dat die gemiddelde lengte van die klas $1{,}6$ m was. Gedurende hierdie tyd was daar drie leerders afwesig. Toe die lengtes van die drie leerders ingesluit is by die data van die klas, het die gemiddelde lengte nie verander nie.

As die lengtes van twee van hierdie afwesige leerders $1{,}45$ m en $1{,}63$ m is, bereken die lengte van die derde leerder wat afwesig was. [NSC Vraestel 3 Feb-Maart 2013]

Oplossing:

Stel die getal leerders wat eerste gemeet is, gelyk aan x.

Die totale lengtes gemeet is $1{,}6x$.

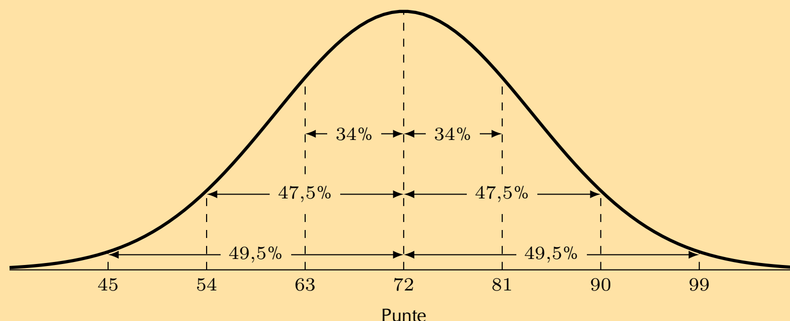
Stel die lengte van die laaste leerder gelyk aan y.

$$\begin{aligned} \frac{1{,}6x + 1{,}45 + 1{,}63 + y}{x + 3} &= 1{,}6 \\ 1{,}6x + 3{,}08 + y &= 1{,}6x + 4{,}8 \\ y &= 1{,}72 \text{ m} \end{aligned}$$

9. Daar is 184 studente wat Wiskunde neem in 'n eerstejaarsklas by die universiteit. Die punte, uit 100, in die halfjaar eksamen is normaal verspreid met 'n gemiddeld van 72 en 'n standaardafwyking van 9. [NSC Vraestel 3 Feb-Maart 2013]

   a) Watter persentaie van die studente se punte lê tussen 72 en 90?

   Oplossing:



   $90 = 72 + 2(9)$
   Dus lê 90 2 standaardafwykings na regs van die gemiddeld.
   Vervolgens, 47,5% van die studente behaal punte wat tussen 72 en 90 lê.

   b) Ongeveer hoeveel studente se punte lê tussen 45 en 63?

   Oplossing:

   $45 = 72 - 3(9)$
   $\therefore$ 45 lê 3 standaardafwykings na links van die gemiddelde.
   $63 = 72 - 9$
   $\therefore$ 63 lê 1 standaardafwyking na links van die gemiddelde.
   Die area tussen 1 standaardafwyking en 3 standaardafwykings is:
   $49{,}5 - 34 = 15{,}5\%$
   $\therefore 15{,}5\%$ van 184 $\approx$ 29 studente het tussen 45 en 63 punte behaal.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BSH	1b. 2BSJ	1c. 2BSK	1d. 2BSM	1e. 2BSN	1f. 2BSP
2a. 2BSQ	2b. 2BSR	2c. 2BSS	2d. 2BST	2e. 2BSV	2f. 2BSW
3a. 2BSX	3b. 2BSY	3c. 2BSZ	4a. 2BT2	4b. 2BT3	4c. 2BT4
4d. 2BT5	4e. 2BT6	5. 2BT7	6. 2BT8	7. 2BT9	8. 2BTB
9. 2BTC					

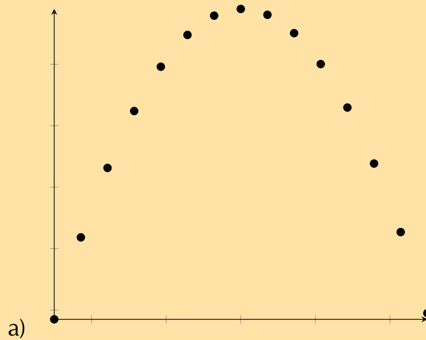
 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

10.2 Kurwe passing

Intuïtiewe kurwe passing

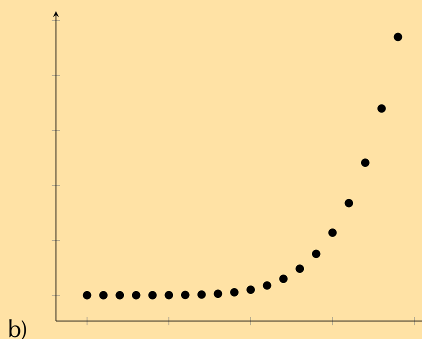
Oefening 10 – 2: intuïtiewe kurwe passing

1. Identifiseer die funksie (lineêr, eksponensieël of kwadraties) wat die beste sal pas by die data in die spreidingsdiagramme hieronder:



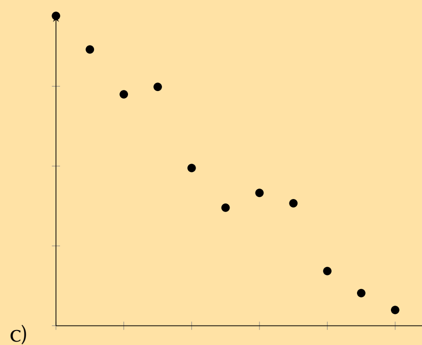
Oplossing:

kwadraties



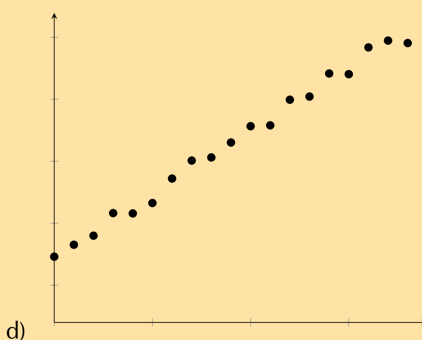
Oplossing:

eksponensieël



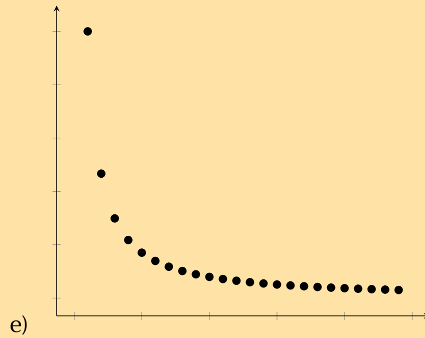
Oplossing:

lineêr



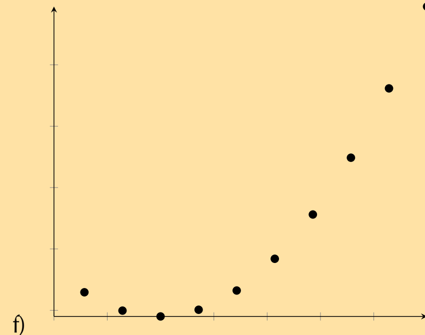
Oplossing:

lineêr



Oplossing:

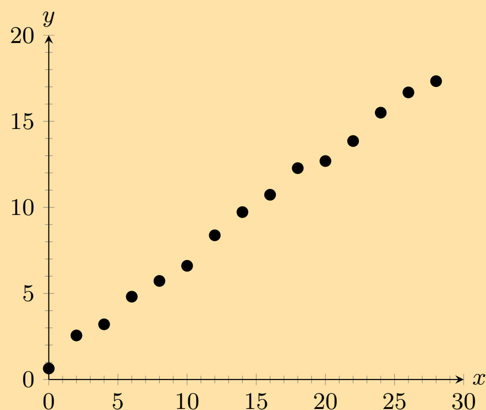
eksponensieël



Oplossing:

kwadraties

2. Beantwoord die volgende vrae deur na die gegewe spreidingsdiagram te verwys.



a) Watter tipe funksie pas die beste by die data? Lewer kommentaar op die passing van die funksie in terme van sterkte en rigting.

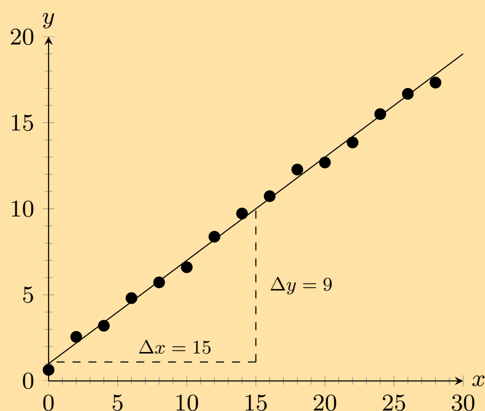
Oplossing:

Die data pas by 'n sterk, positiewe lineêre funksie.

b) Trek 'n lyn wat die beste pas deur die data en bepaal sy vergelyking.

Oplossing:

NB: Die antwoord op hierdie vraag hang van elke leerder af. Die metode is belangriker as die finale antwoord. Gee spesiale aandag aan die y-afsnit van die lyn wat die beste pas. Leerders trek dikwels hulle lyn deur die oorsprong, selfs al is dit nie gepas nie. Hieronder is 'n illustrasie van hoe 'n leerder te werk moet gaan om die probleem op te los. Die leerder se antwoord hoef nie noodwendig presies soos die model antwoord te lyk nie, maar moet 'n goeie benadering wees.



Die y-afsnit is ongeveer 1. Die y-waarde by $x = 15$ is ongeveer 10. Dus is $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10-1}{15-0} = 0{,}6$

Die vergelyking van die lyn wat die beste pas: $y = 0{,}6x + 1$

c) Gebruik jou vergelyking en bepaal die benaderde y-waarde as $x = 25$.

Oplossing:

Die antwoord sal afhang van die leerder se vorige antwoord.

$$y = 0{,}6(25) + 1$$
$$\therefore y = 16$$

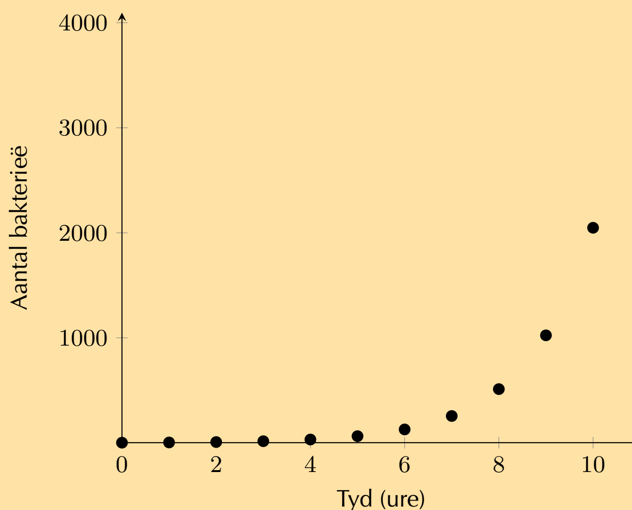
d) Gebruik jou vergelyking en bepaal die benaderde x-waarde as $y = 25$.

Oplossing:

Die antwoord sal afhang van die leerder se vorige antwoord.

$$25 = 0{,}6x + 1$$
$$\therefore 0{,}6x = 24$$
$$\therefore x = \frac{24}{0{,}6} = 40$$

3. Tuberkulose (TB) is 'n longsiekte wat veroorsaak word deur bakterieë wat versprei word deur lug as 'n geïnfekteerde persoon nies of hoes. Medisyne-weerstandige TB ontstaan as pasiënte nie hul medikasie reg gebruik nie. Andile is 'n wetenskaplike wat besig is met 'n studie oor 'n nuwe behandeling vir medisyne-weerstandige TB. Vir sy ondersoek moet hy die TB bakterieë kweek. Hy neem twee bakterieë en plaas dit op 'n plaatjie saam met die nodige voedingstowwe. Hy kontroleer hoe die aantal bakterieë toeneem oor tyd. Kyk na sy data in die spreidingsdiagram hieronder en beantwoord die volgende vrae.



a) Watter tipe funksie sal die beste pas by die data?

Oplossing:

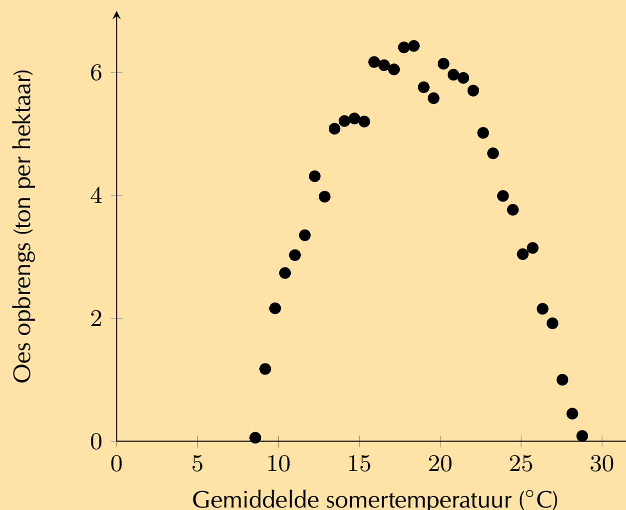
Eksponensiële

b) Die vergelyking vir die groei van die bakterieë is $x_n = x_0(1+r)^t$ as x_0 die oorspronklike aantal bakterieë is, r is die groeikoers per eenheidstyd in verhouding met 1, t is die tyd in ure, en x_n is die aantal baterieë op 'n gegewe tydstip, t. Bepaal die aantal bakterieë wat deur Andile gekweek is na 24 ure as die aantal bakterieë elke uur verdubbel (dit is as die groeikoers 100% per uur is).

Oplossing: Daar word vir ons vertel dat $x_0 = 2, t = 24$ en $r = 1$:

$$\begin{aligned} x_{24} &= 2 \times 2^{24} \\ &= 33\ 554\ 432 \end{aligned}$$

4. Marelize is 'n navorser by die Departement van Landbou. Sy het opgelet dat boere van oor die hele land verskillende oes opbrengste het en dit hang af van die streek waar hul geleë is. Sy dink dit het te doen met die klimaat van daardie speisifieke streek. Om hierdie idee te toets, het sy data oor oes opbrengste en gemiddelde temperature in die somer by verskeie boere ingesamel. Bestudeer haar data hieronder en beantwoord die volgende vrae.



a) Identifiseer die tipe funksie wat die beste sal pas by die data.

Oplossing:

Kwadraties

b) Marelize bepaal dat die vergelyking van die funksie wat die beste pas by die data $y = -0{,}06x^2 + 2{,}2x - 14$ is. Bepaal die optimale temperature geskik vir die groei van koring en die ooreenstemmende oes opbrengs. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

Oplossing:

Die vraag vereis dat ons die draaipunt van die funksie moet bepaal. Daar is verskeie maniere om dit te doen; twee word hieronder gedoen:

Die eerste metode is om gebruik te maak van die formule $x = \frac{-b}{2a}$:

- Die eerste stap is om die vergelyking in die vorm: $y = ax^2 + bx + c$ te skryf. Ons vergelyking is alreeds in die vorm, dus kan ons onmiddellik die waardes instel in die formule vir x.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2{,}2}{(2 \times -0{,}06)} = 18{,}33$$

- Om y te bepaal, stel ons ons x-waarde in die kwadratiese vergelyking:

$$y = -0{,}06(18{,}33^2) + 2{,}2(18{,}33) - 14 = 6{,}17$$

in

'n Ander metode is om differensiasie te gebruik:

- Die eerste stap is om die vergelyking in die vorm: $y = ax^2 + bx + c$ te skryf. Ons vergelyking is alreeds in hierdie vorm, dus kan ons die vergelyking onmiddellik differensieer.

$$y' = -0{,}06(2)x + 2{,}2 = -0{,}12x + 2{,}2$$

- By die draaipunt, $y' = 0$, dus kan ons nou vir x oplos:

$$0 = -0{,}12x + 2{,}2$$
$$\therefore x = \frac{-2{,}2}{-0{,}12} = 18{,}33$$

- Die x-waarde kan nou ingestel word in die kwadratiese vergelyking om y te bepaal:

$$y = -0{,}06(18{,}33)^2 + 2{,}2(18{,}33) - 14 = 6{,}17$$

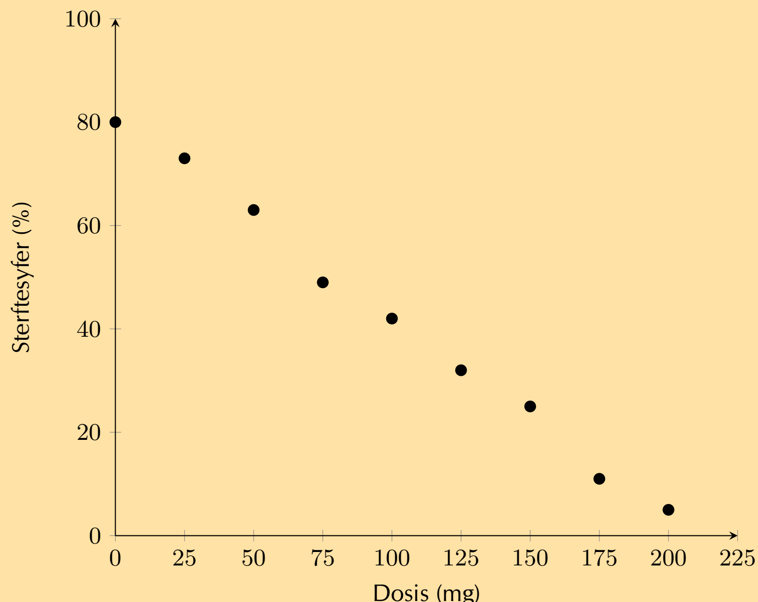
Daarom is die maksimum temperatuur waar koring sal groei $18{,}33°$C en die ooreenstemmende oes opbrengs is $6{,}17$ ton per hektaar.

5. Dr Dandara is 'n wetenskaplike wat 'n geneesmiddel probeer vind vir 'n siekte met 'n 80% sterftesyfer, dit wil sê 80% van die mense wat die siekte kry, sal sterf. Hy weet van 'n plant wat in tradisionele medisyne gebruik word om hierdie siekte te behandel. Hy onttrek die aktiewe bestanddeel van die plant en toets verskillende dosisse (gemeet in milligram) op verskillende groepe pasiënte. Bestudeer die data hieronder en beantwoord die volgende vrae.

Dosis (mg)	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Sterftesyfer (%)	80	73	63	49	42	32	25	11	5

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

Oplossing:



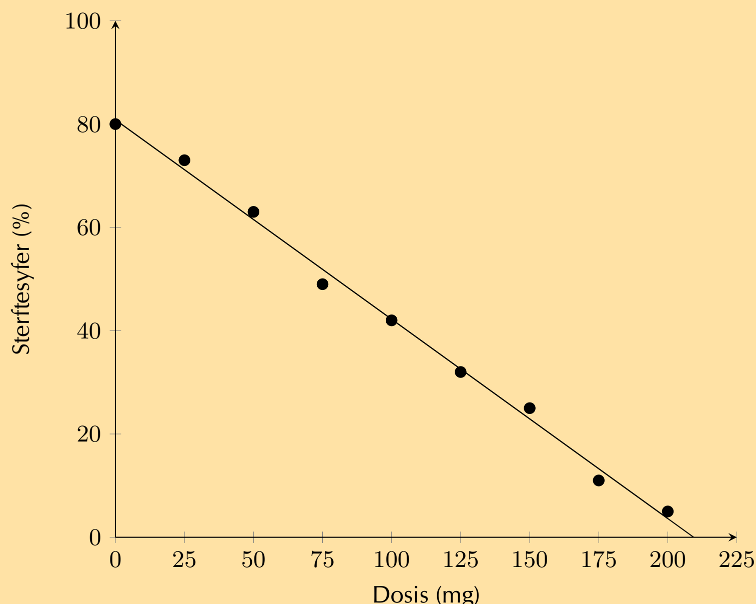
b) Watter funksie sal die beste pas by die data? Beskryf die passing in terme van sterkte en rigting.

Oplossing:

Die data toon 'n sterk, negatiewe lineêre verwantskap.

c) Trek 'n lyn wat die beste pas deur die data en bepaal sy vergelyking.

Oplossing:



Die y-afsnit is omtrent 80.
Die x-afsnit is omtrent 210.
Dus is $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{80-0}{0-210} = -0{,}38$
Die vergelyking van die lyn wat die beste pas: $y = -0{,}38x + 80$

d) Gebruik jou vergelyking om die dosis te skat vir 'n sterftesyfer van 0%.

Oplossing:

$$\begin{aligned} 0 &= -0{,}38x + 80 \\ \therefore x &= \frac{-80}{-0{,}38} = 210{,}53 \text{ mg} \end{aligned}$$

e) Dr Dandara besluit om die geskatte dosis vir 'n sterftesyfer van 0% op 'n groep geïnfekteerde pasiënte te toets en te administreer. Hy vind egter dat daar nog steeds 'n sterftesyfer van 5% is. Noem die statistiese tegniek wat Dr Dandara gebruik om die sterftesyfer van 0% te skat en verduidelik waarom hierdie vergelyking nie die eksperimentele resultate akkuraat kon voorspel nie.

Oplossing:

Dr Dandara gebruik **ekstrapolasie** om die dosis te bereken as die sterftesyfer 0% is. Ekstrapolasie kan verkeerde skattings tot gevolg hê as die tendens wat binne die data omvang waargeneem word, nie buite die data omvang aangaan nieff. In hierdie geval lyk dit asof 'n dosis groter as 200 mg nie langer die vergelyking van die funksie wat die peste pas, bevredig nie, dus het ekstrapolasie 'n verkeerde skatting tot gevolg.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BTD 1b. 2BTF 1c. 2BTG 1d. 2BTH 1e. 2BTJ 1f. 2BTK
2. 2BTM 3. 2BTN 4. 2BTP 5. 2BTQ

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

Oefening 10 – 3: Kleinste kwadrate regressie analise

1. Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn deur gebruik te maak van die tabel met data hieronder. Rond a en b af tot twee desimale plekke.

a)

x	10	4	9	11	11	6	8	18	9	13
y	1	0	6	3	9	5	9	8	7	15

Oplossing:

x	y	xy	x^2
10	1	10	100
4	0	0	16
9	6	54	81
11	3	33	121
11	9	99	121
6	5	30	36
8	9	72	64
18	8	144	324
9	7	63	81
13	15	195	169
$\sum = 99$	$\sum = 63$	$\sum = 700$	$\sum = 1113$

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{10 \times 700 - 99 \times 63}{10 \times 1113 - 99^2} = 0{,}574$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{63}{10} - \frac{0{,}574 \times 99}{10} = 0{,}616$$

$$\therefore \hat{y} = 0{,}62 + 0{,}57x$$

b)

x	8	12	12	7	6	14	8	14	14	17
y	-5	4	3	-3	-5	-6	-2	0	-4	3

Oplossing:

x	y	xy	x^2
8	-5	-40	64
12	4	48	144
12	3	36	144
7	-3	-21	49
6	-5	-30	36
14	-6	-84	196
8	-2	-16	64
14	0	0	196
14	-4	-56	196
17	3	51	289
$\sum = 112$	$\sum = -15$	$\sum = -112$	$\sum = 1378$

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{10 \times -112 - 112 \times -15}{10 \times -1378 - 112^2} = 0{,}453$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{-15}{10} - \frac{0{,}453 \times 112}{10} = -6{,}574$$

$$\therefore \hat{y} = -6{,}57 + 0{,}45x$$

c)

x	-9	3	4	7	13	6	0	8	1	14
y	0	-12	-10	-14	-31	-32	-41	-52	-51	-63

Oplossing:

x	y	xy	x^2
-9	0	0	81
3	-12	-36	9
4	-10	-40	16
7	-14	-98	49
13	-31	-403	169
6	-32	-192	36
0	-41	0	0
8	-52	-416	64
1	-51	-51	1
14	-63	-882	196
$\sum = 47$	$\sum = -306$	$\sum = -2118$	$\sum = 621$

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{10 \times -2118 - 47 \times -306}{10 \times 621 - 47^2} = -1{,}699$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{-306}{10} + \frac{1{,}699 \times 47}{10} = -22{,}6147$$

$$\therefore \hat{y} = -22{,}61 - 1{,}70x$$

2. Gebruik jou sakrekenaar om die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn vir die volgende data versamelings te bepaal:

a)

x	0,16	0,32	3	2,6	6,12	7,68	6,16	8,56	11,24	11,96
y	5,48	10,56	13,4	15,96	15,44	16,6	17,2	22,28	22,04	24,32

Oplossing:

$\hat{y} = 9{,}07 + 1{,}26x$

b)

x	$-3{,}5$	5,5	4	1	5,5	5	3,5	5,5	7,5	8,5
y	-10	$-20{,}5$	$-30{,}5$	-46	$-46{,}5$	$-64{,}5$	-67	$-76{,}5$	$-83{,}5$	-94

Oplossing:

$\hat{y} = -29{,}09 + -5{,}84x$

c)

x	2,5	4,5	-2	9	8,5	10	7,5	3	8	15
y	-2	6	11	11,5	17	21	21	30,5	32,5	33,5

Oplossing:

$\hat{y} = 9{,}45 + 1{,}33x$

d)

x	7,24	8,24	5,34	1,66	0,32	11,46	9,34	14,24	12,9	12,34
y	$-3{,}2$	$-18{,}78$	$-21{,}1$	-32	$-31{,}2$	$-53{,}02$	-53	$-65{,}46$	$-74{,}8$	$-80{,}24$

Oplossing:

$\hat{y} = -12{,}44 + -3{,}71x$

e)

x	$-0{,}28$	2,32	0,12	4,64	3,08	7,92	5,08	8,96	10,28	7,12
y	$-6{,}88$	$-0{,}32$	3,68	4,8	11,68	19,2	20,96	24,96	29,28	33,28

Oplossing:

$\hat{y} = -1{,}94 + 3{,}25x$

f)

x	1	1,1	4,8	3,55	2,75	1,95	6,1	8,9	10,35	9,55
y	$-8{,}45$	$-5{,}95$	$-4{,}35$	0,85	$-2{,}95$	$-1{,}8$	0,25	0,05	4,8	$-3{,}05$

Oplossing:

$\hat{y} = -5{,}64 + 0{,}72x$

g)

x	1,9	1,1	$-1{,}5$	1,3	0,95	8,25	10,6	6,2	8,1	8,65
y	7	8,45	0,9	0,1	2,45	4,35	2,2	1,4	0,15	2,05

Oplossing:

$\hat{y} = 3{,}52 + -0{,}13x$

h)

x	$-81{,}8$	73,1	84	92,2	$-69{,}7$	$-56{,}1$	8,8	80,9	68,4	$-40{,}4$
y	10,6	16,1	3,6	4,6	11,9	18,3	16,6	17,6	17,7	24,1

Oplossing:

$\hat{y} = 14{,}55 + -0{,}03x$

i)

x	2,8	7,4	$-2{,}4$	4	11,3	6,9	2,5	1,7	5,4	8,2
y	12,4	13,4	15,3	15,4	16,4	19,2	21,1	19,4	21,3	25

Oplossing:

$\hat{y} = 16{,}94 + 0{,}20x$

j)

x	5	1,2	8	6	7,4	7,4	6,7	8,7	12,2	14,3
y	$-4{,}2$	$-13{,}7$	$-23{,}7$	$-33{,}5$	$-43{,}8$	$-54{,}2$	$-63{,}9$	$-73{,}9$	$-84{,}5$	$-93{,}5$

Oplossing:

$\hat{y} = 5{,}14 + -7{,}03x$

3. Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn vir elke stel data waardes hieronder. Rond a en b af tot twee desimale plekke in die finale antwoord.

a) $n = 10$; $\sum x = 74$; $\sum y = 424$; $\sum xy = 4114{,}51$; $\sum (x^2) = 718{,}86$

Oplossing:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$
$$= \frac{10 \times 4114{,}51 - 74 \times 424}{10 \times 718{,}86 - 74^2} = 5{,}704250847$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{424}{10} - 5{,}704250847 \times \frac{74}{10} = 0{,}188543732$$

$$\therefore \hat{y} = 0{,}19 + 5{,}70x$$

b) $n = 13$; $\bar{x} = 8{,}45$; $\bar{y} = 17{,}83$; $\sum xy = 1879{,}25$; $\sum (x^2) = 855{,}45$

Oplossing:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i)}{n}$$
$$\therefore \bar{x}n = \sum_{i=1}^{n} (x_i)$$
$$\therefore b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\bar{x}n)(\bar{y}n)}{\sum_{i=1}^{n} y_i n \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - (\bar{x}n)^2}$$
$$= \frac{13 \times 1879{,}25 - (13 \times 8{,}45) \times (13 \times 17{,}83)}{13 \times 855{,}45 - (13 \times 8{,}45)^2} = 1{,}090584962$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 17{,}83 - 1{,}090584962 \times 8{,}45 = 8{,}614557071$$

$$\therefore \hat{y} = 8{,}61 + 1{,}09x$$

c) $n = 10$; $\bar{x} = 5{,}77$; $\bar{y} = 17{,}03$; $\overline{xy} = 133{,}817$; $\sigma_x = \pm 3{,}91$
(Wenk: vermenigvuldig die noemer en die teller van die formule vir b met $\frac{1}{n^2}$)

Oplossing:

$$Var[x] = \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \text{ (bewys onder die oplossing)}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n}$$

$$\therefore b \times \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n^2}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n^2}} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \bar{x}^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{Var[x]}$$

$$= \frac{133{,}817 - (5{,}77 \times 17{,}03)}{3{,}91^2} = 2{,}325593108$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 17{,}03 - 2{,}325593108 \times 5{,}77 = 3{,}611327767$$

$$\therefore \hat{y} = 3{,}61 + 2{,}33x$$

Benodig om te bewys: $Var[x] = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

$$Var[x] = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} \text{ (van die formule)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} - \bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \frac{\not{n}\bar{x}^2}{\not{n}}$$

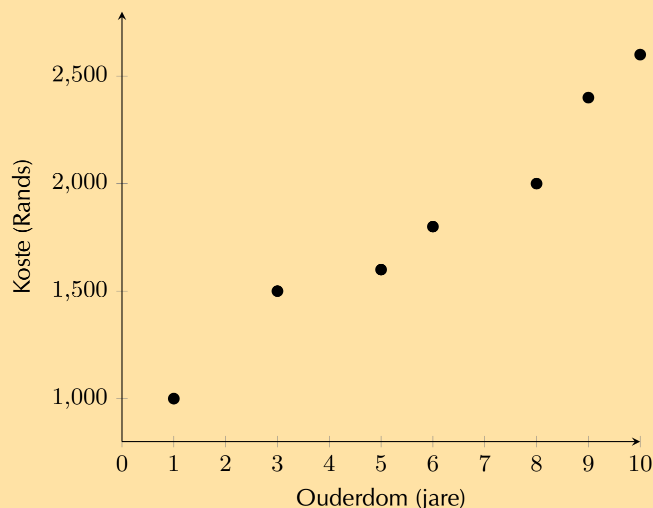
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

4. Die tabel hieronder toon die gemiddelde onderhoudskoste in rand van 'n sekere model motor teenoor die ouderdom van die motor in jare.

Ouderdom (x)	1	3	5	6	8	9	10
Koste (y)	1000	1500	1600	1800	2000	2400	2600

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

Oplossing:



b) Voltooi die tabel hieronder, vul die totale van elke kolom in die laaste ry in:

Ouderdom (x)	**Koste** (y)	xy	x^2
1	1000		
3	1500		
5	1600		
6	1800		
8	2000		
9	2400		
10	2600		
$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$

Oplossing:

Ouderdom (x)	**Koste** (y)	xy	x^2
1	1000	1000	1
3	1500	4500	9
5	1600	8000	25
6	1800	10 800	36
8	2000	16 000	64
9	2400	21 600	81
10	2600	26 000	100
$\sum = 42$	$\sum = 12\ 900$	$\sum = 87\ 900$	$\sum = 316$

c) Gebruik jou tabel en bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn. Rond a en b af tot twee desimale plekke.

Oplossing:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$
$$= \frac{7 \times 87\ 900 - 42 \times 12\ 900}{7 \times 326 - 42^2} = 164{,}0625$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{12\ 900}{7} - 164{,}0625 \times \frac{42}{7} = 858{,}48$$

$$\therefore \hat{y} = 858{,}48 + 164{,}06x$$

d) Gebruik jou vergelyking om te voorspel wat die koste gaan wees om 'n 15 jaar oue model motor te onderhou.

Oplossing:

$$y = 858{,}48 + 164{,}06(15) = \text{R } 3319{,}42$$

e) Gebruik jou vergelyking om te voorspel wat die ouderdom van die motor sal wees in die jaar as die totaal van die onderhoudskoste vir die eeste keer meer as R 3000 word.

Oplossing:

$$3000 = 858{,}48 + 164{,}06x$$
$$2141{,}52 = 164{,}06x$$
$$x = \frac{2141{,}52}{164{,}06} = 13{,}05$$

Dus sal die onderhoudskoste vir die eerste keer die bedrag van R 3000 oorskrei as die motor 13 jaar oud is.

5. Juf. Colly het altyd volgehou dat daar 'n verwantskap is tussen 'n leerders se vermoë om die taal van onderrig te verstaan en hulle punte in Wiskunde. Omdat sy Wiskunde onderrig in Engels, het sy besluit om leerders se Wiskunde punte en Engels punte met mekaar te vergelyk om sodoende die verwantskap tussen die twee punte te ondersoek. 'n Steekproef van haar data word hieronder in die tabel getoon:

Engels % (x)	28	33	30	45	45	55	55	65	70	76	65	85	90
Wiskunde % (y)	35	36	34	45	50	40	60	50	65	85	70	80	90

a) Voltooi die tabel hieronder, vul die totale van elke kolom in die laaste ry in:

Engels % (x)	Wiskunde % (y)	xy	x^2
28	35		
33	36		
30	34		
45	45		
45	50		
55	40		
65	50		
70	65		
76	85		
65	70		
85	80		
90	90		
$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$

Oplossing:

Engels % (x)	Wiskunde % (y)	xy	x^2
28	35	980	784
33	36	1188	1089
30	34	1020	900
45	45	2025	2025
45	50	2250	2025
55	40	2200	3025
65	50	3250	4225
70	65	4550	4900
76	85	6460	5776
65	70	4550	4225
85	80	6800	7225
90	90	8100	8100
$\sum = 742$	$\sum = 740$	$\sum = 46\,673$	$\sum = 47\,324$

b) Gebruik jou tabel en bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn. Rond a en b af tot twee desimale plekke.

Oplossing:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$
$$= \frac{13 \times 46\,673 - 742 \times 740}{13 \times 47\,324 - 742^2} = 0{,}8920461577$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{740}{13} - 0{,}8920461577 \times \frac{742}{13} = 6{,}007827002$$

$$\therefore \hat{y} = 6{,}01 + 0{,}89x$$

c) Gebruik jou vergelyking om die Wiskunde punt van 'n leerder wat 50% vir Engels gekry het te skat, korrek tot twee desimale plekke.

Oplossing:

$$y = 6{,}01 + 0{,}89(50) = 50{,}51\%$$

d) Gebruik jou vergelyking om te voorspel wat die Engels punt van 'n leerder is wat 75% vir Wiskunde gekry het, korrek tot twee desimale plekke.

Oplossing:

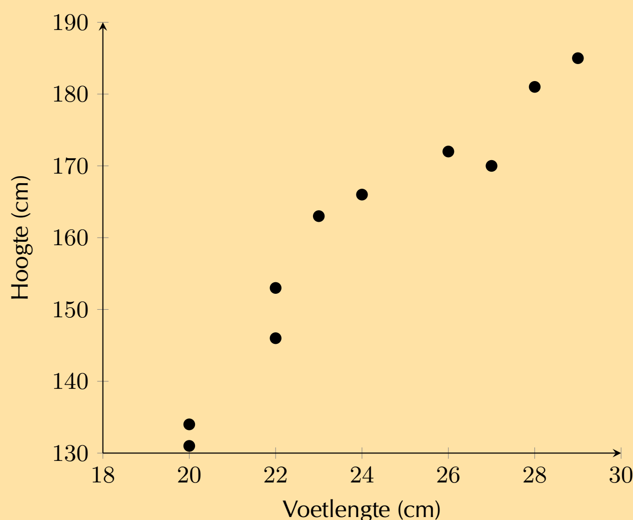
$$\begin{aligned} 75 &= 6{,}01 + 0{,}89x \\ 68{,}99 &= 0{,}89x \\ x &= \frac{68{,}99}{0{,}89} = 77{,}52\% \end{aligned}$$

6. Lengte van voete en hoogtes van studente word in die tabel hieronder gegee.

Hoogte (cm)	170	163	131	181	146	134	166	172	185	153
Lengte van voete (cm)	27	23	20	28	22	20	24	26	29	22

a) Gebruik die voetlengte as jou x-veranderlike en teken 'n spreidiagram van die data.

Oplossing:



b) Identifiseer en beskryf enige tendense wat in die spreidiagram aangetoon word.

Oplossing:

Sterk (of redelik sterk), positiewe, lineêre tendens

c) Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn deur die formules te gebruik en trek dan die lyn op jou grafiek. Rond a en b af tot twee desimale plekke in jou finale antwoord.

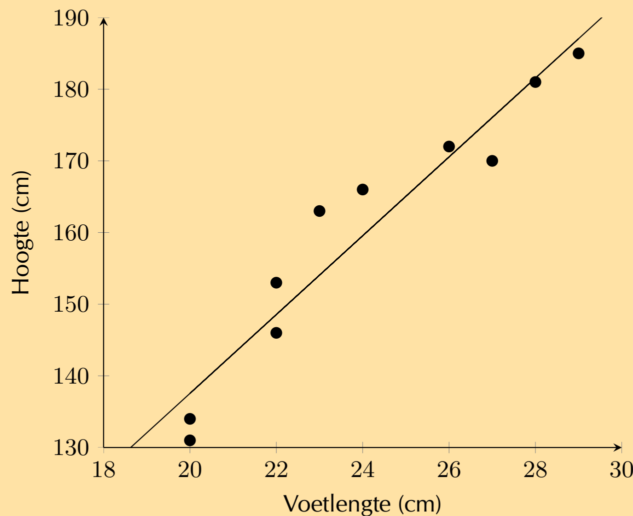
Oplossing:

Voetlengte (x)	**Lengte (y)**	xy	x^2
27	170	4590	729
23	163	3749	529
20	131	2620	400
28	181	5068	784
22	146	3212	484
20	134	2680	400
24	166	3984	576
26	172	4472	676
29	185	5365	841
22	153	3366	484
$\sum = 241$	$\sum = 1601$	$\sum = 39\,106$	$\sum = 5903$

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$
$$= \frac{10 \times 39\,106 - 241 \times 1601}{10 \times 5903 - 241^2} = 5{,}49947313$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{1601}{10} - 5{,}49947313 \times \frac{241}{10} = 27{,}56269575$$

$$\therefore \hat{y} = 27{,}56 + 5{,}50x$$



d) Bevestig jou resultate deur die kleinste kwadrate regressielyn te bereken met behulp van 'n sakrekenaar.

Oplossing: Die antwoord behoort dieselfde te wees as c).

e) Gebruik jou vergelyking om die lengte van 'n student met 'n voetlengte van 21,6 cm te voorspel.

Oplossing:

$$y = 27{,}56 + 5{,}5(21{,}6) = 146{,}36 \text{ cm}$$

f) Gebruik jou vergelyking om die voetlengte van 'n student met lengte 190 cm , korrek tot twee desimale syfers, te voorspel.

Oplossing:

$$190 = 5{,}5x + 27{,}56$$
$$\therefore x = \frac{162{,}44}{5{,}5} = 29{,}53 \text{ cm}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BTS 1b. 2BTT 1c. 2BTV 2a. 2BTW 2b. 2BTX 2c. 2BTY
2d. 2BTZ 2e. 2BV2 2f. 2BV3 2g. 2BV4 2h. 2BV5 2i. 2BV6
2j. 2BV7 3a. 2BV8 3b. 2BV9 3c. 2BVB 4. 2BVC 5. 2BVD
6. 2BVF

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

NB. Verwys na die vyfde punt aan die begin van die hoofstuk in verband met die formule vir die korrelasiekoëffisiënt.

Oefening 10 – 4: Korrelasiekoëffiënt

1. Bepaal die korrelasiekoëffiënt vir die volgende data stelle met die hand en lewer kommentaar op die sterkte en rigting van die korrelasie. Rond jou antwoorde af tot twee desimale syfers.

a)

x	5	8	13	10	14	15	17	12	18	13
y	5	8	3	8	7	5	3	-1	4	-1

Oplossing:

x	y	xy	x^2	$x-\bar{x}^2$	$y-\bar{y}^2$
5	5	25	25	56,25	0,81
8	8	64	64	20,25	15,21
13	3	39	169	0,25	1,21
10	8	80	100	6,25	15,21
14	7	98	196	2,25	8,41
15	5	75	225	6,25	0,81
17	3	51	289	20,25	1,21
12	-1	-12	144	0,25	26,01
18	4	72	324	30,25	0,01
13	-1	-13	169	0,25	26,01
$\sum =$ 125	$\sum =$ 41	$\sum =$ 479	$\sum =$ 1705	$\sum =$ 142,5	$\sum =$ 94,9

$$r = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{10 \times 479 - 125 \times 41}{10 \times 1705 - 125^2} = -0{,}235$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{142{,}5}{10}} = \sqrt{14{,}25} = \pm 3{,}775$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{94{,}9}{10}} = \sqrt{9{,}49} = \pm 3{,}081$$

$$\therefore r = -0{,}235 \times \frac{3{,}775}{3{,}081}$$

$$= -0{,}29$$

Dus is die korrelasie tussen x en y negatief maar swak.

b)

x	7	3	11	7	7	6	9	12	10	15
y	13	23	32	45	50	55	67	69	85	90

Oplossing:

x	y	xy	x^2	$x-\bar{x}^2$	$y-\bar{y}^2$
7	13	91	49	2,89	1592,01
3	23	69	9	32,49	894,01
11	32	352	121	5,29	436,81
7	45	315	49	2,89	62,41
7	50	350	49	2,89	8,41
6	55	330	36	7,29	4,41
9	67	603	81	0,09	198,81
12	69	828	144	10,89	259,21
10	85	850	100	1,69	1030,41
15	90	1350	225	39,69	1376,41
$\sum =$ 87	$\sum =$ 529	$\sum =$ 5138	$\sum =$ 863	$\sum =$ 106,1	$\sum =$ 5862,9

$$r = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$
$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{10 \times 5138 - 87 \times 529}{10 \times 863 - 87^2} = 5{,}049$$
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{106{,}1}{10}} = \sqrt{10{,}61} = \pm 3{,}26$$
$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{5862{,}9}{10}} = \sqrt{586{,}29} = \pm 24{,}21$$
$$\therefore r = 5{,}049 \times \frac{3{,}26}{24{,}21}$$
$$= 0{,}68$$

Dus is die korrelasie tussen x en y positief en middelmatig.

c)

x	3	10	7	6	11	16	17	15	17	20
y	6	24	30	38	53	56	65	75	91	103

Oplossing:

x	y	xy	x^2	$x-\bar{x}^2$	$y-\bar{y}^2$
3	6	18	9	84,64	2313,61
10	24	240	100	4,84	906,01
7	30	210	49	27,04	580,81
6	38	228	36	38,44	259,21
11	53	583	121	1,44	1,21
16	56	896	256	14,44	3,61
17	65	1105	289	23,04	118,81
15	75	1125	225	7,84	436,81
17	91	1547	289	23,04	1361,61
20	103	2060	400	60,84	2391,21
$\sum =$ 122	$\sum =$ 541	$\sum =$ 8012	$\sum =$ 1774	$\sum =$ 285,6	$\sum =$ 8372,9

$$r = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$
$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{10 \times 8012 - 122 \times 541}{10 \times 1774 - 122^2} = 4{,}943$$
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{285{,}6}{10}} = \sqrt{28{,}56} = \pm 5{,}344$$
$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{8372{,}9}{10}} = \sqrt{837{,}29} = \pm 28{,}936$$
$$\therefore r = 4{,}943 \times \frac{5{,}344}{28{,}936}$$
$$= 0{,}91$$

Dus is die korrelasie tussen x en y positief en baie sterk.

2. Deur jou sakrekenaar te gebruik, bereken die waarde van die korrelasiekoëffisiënt, tot twee desimale syfers, vir die volgende data stelle en beskryf die sterkte en rigting van die korrelasie.

a)

x	0,1	0,8	1,2	3,4	6,5	3,9	6,4	7,4	9,9	8,5
y	−5,1	−10	−17,3	−24,9	−31,9	−38,6	−42	−55	−62	−64,8

Oplossing:

$r = -0{,}95$, negatief, baie sterk

b)

x	−26	−34	−51	−14	50	−57	−11	−10	36	−35
y	−66	−10	−26	−51	−58	−56	45	−142	−149	−30

Oplossing:

$r = -0{,}40$, negatief, swak

c)

x	101	−398	103	204	105	606	807	−992	609	−790
y	−300	98	−704	−906	−8	690	−12	686	984	−18

Oplossing:
$r = 0{,}00$, geen korrelasie

d)

x	101	82	−7	−6	45	−94	−23	78	−11	0
y	111	−74	21	106	51	26	21	86	−29	66

Oplossing:
$r = 0{,}14$, positief, baie swak

e)

x	−3	5	−4	0	−2	9	10	11	17	9
y	24	18	21	30	31	39	48	59	56	54

Oplossing:
$r = 0{,}83$, positief, sterk

3. Bereken en beskryf die rigting en sterkte van r vir elkeen van die stel data waardes hieronder. Rond alle r-waardes af tot twee desimale syfers.

   a) $b = -1{,}88$; $\sigma_x^2 = 48{,}62$; $\sigma_y^2 = 736{,}54$.
   Oplossing:

$$r = -1{,}88 \times \sqrt{\frac{48{,}62}{736{,}54}} = -0{,}48$$

   b) $a = 32{,}19$; $x = 4{,}3$; $\bar{y} = 36{,}6$; $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 620{,}1$; $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 2636{,}4$.
   Oplossing:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$
$$\therefore b = \frac{\hat{y} - a}{x} = \frac{36{,}6 - 32{,}19}{4{,}3} = 1{,}03$$
$$\therefore r = 1{,}03 \times \sqrt{\frac{620{,}1}{2636{,}4}} = 0{,}50$$

4. Die Aardrykskunde onderwyser, Mnr Chadwick, het onderstaande data stel aan sy klas gegee om die konsep te illustreer dat gemiddelde temperatuur afhang van hoe ver 'n plek van die ewenaar af is (bekend as die breedtegraad). Daar is 90 grade tussen die ewenaar en die noordpool. Die ewenaar word gedefinieer as 0 grade. Ondersoek onderstaande data stel en beantwoord die daaropvolgende vrae.

Stad	**Grade N (x)**	**Gemiddelde temp. (y)**	xy	x^2	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
Kaïro	43	22				
Berlyn	53	19				
Londen	40	18				
Lagos	6	32				
Jerusalem	31	23				
Madrid	40	28				
Brussels	51	18				
Istanbul	39	23				
Boston	43	23				
Montreal	45	22				
Totaal:						

   a) Kopieer en voltooi die tabel.
   Oplossing:

Stad	**°N (x)**	**Gem.temp. (y)**	xy	x^2	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
Kaïro	43	22	946	1849	15,21	0,64
Berlyn	53	19	1007	2809	193,21	14,44
Londen	40	18	720	1600	0,81	23,04
Lagos	6	32	192	36	1095,61	84,64
Jerusalem	31	23	713	961	65,61	0,04
Madrid	40	28	1120	1600	0,81	27,04
Brussels	51	18	918	2601	141,61	23,04
Istanbul	39	23	897	1521	0,01	0,04
Boston	43	23	989	1849	15,21	0,04
Montreal	45	22	990	2025	34,81	0,64
Totaal:	391	228	8492	16 851	1562,9	173,6

b) Deur van jou tabel gebruik te maak, bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn. Rond a en b tot twee desimale syfers af in jou finale antwoord.

Oplossing:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$
$$= \frac{10 \times 8492 - 391 \times 228}{10 \times 16\,851 - 391^2} = -0{,}2705227462$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{228}{10} - -0{,}2705227462 \times \frac{391}{10} = 33{,}37743938$$

$$\therefore \hat{y} = 33{,}38 - 0{,}27x$$

c) Gebruik jou sakrekenaar om jou vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn te bevestig.

Oplossing:

Antwoord behoort soos bostaande te lyk.

d) Deur van jou tabel gebruik te maak, bereken die waarde van die korrelasiekoëffisiënt tot twee desimale syfers.

Oplossing:

$$r = b\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)$$
$$= -0{,}27\left(\frac{\sqrt{\frac{1562{,}9}{10}}}{\sqrt{\frac{173{,}6}{10}}}\right)$$
$$= -0{,}81$$

e) Wat kan jy aflei omtrent die verwantskap tussen hoe ver noord 'n stad is en sy gemiddelde temperatuur?

Oplossing:

Daar is 'n sterk negatiewe, lineêre korrelasie tussen hoe ver noord 'n stad is (breedtegraad) en gemiddelde temperatuur.

f) Maak 'n benaderde skatting van die breedtegraad van Parys as dit 'n gemiddelde temperatuur van 25°C het.

Oplossing:

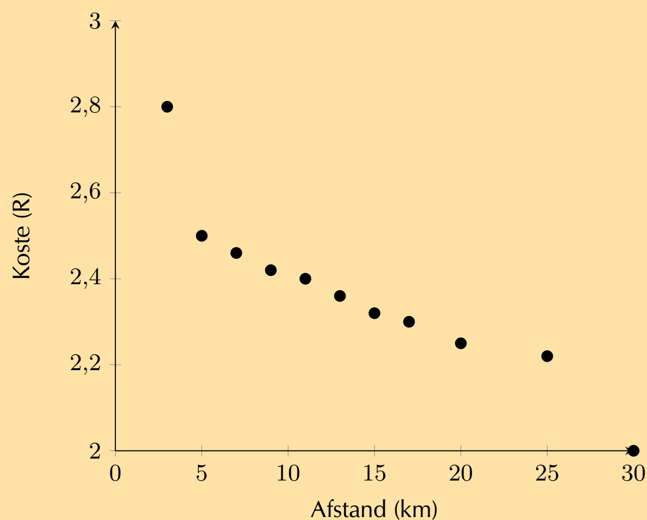
$$25 = 33{,}38 + -0{,}27(x)$$
$$\therefore x = \frac{25 - 33{,}38}{-0{,}27}$$
$$= 31{,}04 \text{ grade Nord}$$

5. 'n Taxi bestuurder het die aantal kilometer wat sy taxi afgelê het per rit en sy brandstofkoste per kilometer in rand , aangeteken. Ondersoek die tabel van sy data hieronder en beantwoord die daaropvolgende vrae.

Afstand (x)	3	5	7	9	11	13	15	17	20	25	30
Koste (y)	2,8	2,5	2,46	2,42	2,4	2,36	2,32	2,3	2,25	2,22	2

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

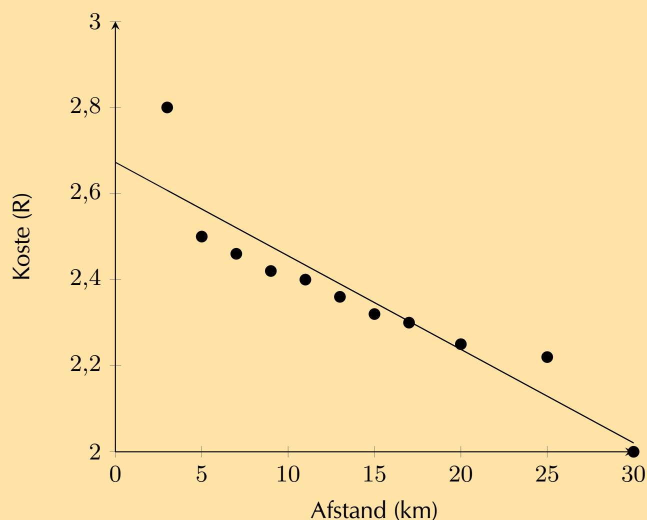
Oplossing:



b) Gebruik jou sakrekenaar om die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn te bepaal en teken hierdie lyn op jou spreidiagram. Rond a en b af tot twee desimale syfers in jou finale antwoord.

Oplossing:

$$\hat{y} = 2{,}67 + -0{,}02x$$



c) Gebruik jou sakrekenaar om die korrelasiekoëffisiënt tot twee desimale plekke te bepaal.

Oplossing:

$r = -0{,}92$

d) Beskryf die verwantskap tussen die afstand afgelê per rit en die brandstofkoste per kilometer.

Oplossing:

Daar is 'n baie sterk, negatiewe, lineêre verwantskap tussen afstand afgelê per rit en die brandstofkoste per kilometer.

e) Voorspel die afstand afgelê as die koste per kilometer R 1,75 is.

Oplossing:

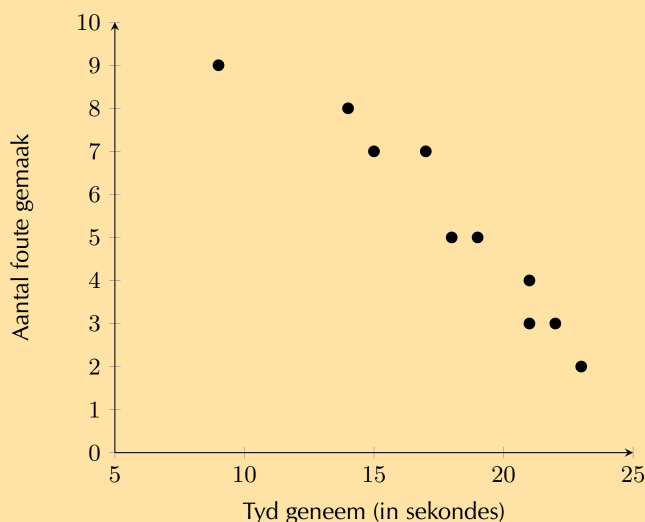
$$1{,}75 = 2{,}67 - 0{,}02x$$
$$\therefore x = \frac{1{,}75 - 2{,}67}{-0{,}02} = 46 \text{ km}$$

6. Die tyd, in sekondes, om 'n taak te voltooi en die aantal foute gemaak in die taak is aangeteken vir 'n monster van 10 primêre skool leerders. Die data word voorgestel in onderstaande tabel. [Aangepas van NKV Vraestel 3 Feb-Maart 2013]

Tyd geneem om taak te voltooi (in sekondes)	23	21	19	9	15	22	17	14	21	18
Aantal foute gemaak	2	4	5	9	7	3	7	8	3	5

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

Oplossing:



b) Wat is die invloed van meer tyd geneem om die taak te voltooi op die aantal foute gemaak?

Oplossing:

Wanneer meer tyd geneem word om die taak te voltooi, maak die leerders minder foute.

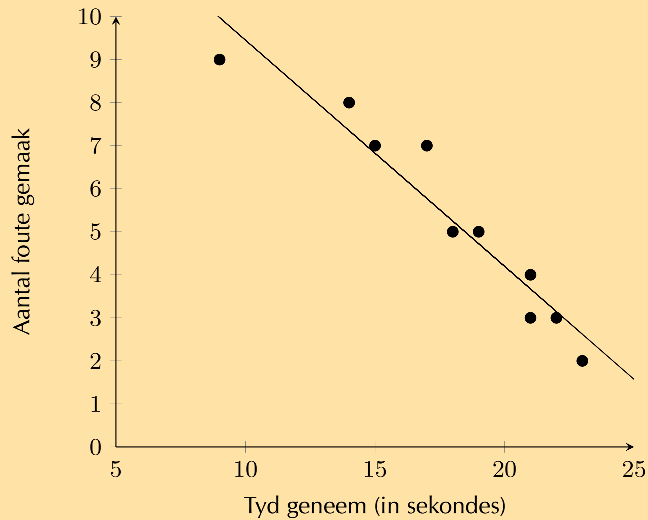
OF

Wanneer minder tyd geneem word om die taak te votooi, maak die leerders meer foute.

c) Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn en teken hierdie lyn op jou spreidiagram. Rond a en b af tot twee desimale syfers in jou finale antwoord.

Oplossing:

$$a = 14{,}71$$
$$b = -0{,}53$$
$$\hat{y} = 14{,}71 - 0{,}53x$$



d) Bepaal die korrelasiekoëffisiënt tot twee desimale syfers.

Oplossing:

$r = -0{,}96$

e) Voorspel die aantal foute wat gemaak sal word deur 'n leerder wat 13 sekondes neem om die taak te voltooi.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 14{,}71 - 0{,}53(13)\\ &\approx 7{,}82\\ &\approx 8\end{aligned}$$

f) Lewer kommentaar op die sterkte van die verwantskap tussen die veranderlikes.

Oplossing:

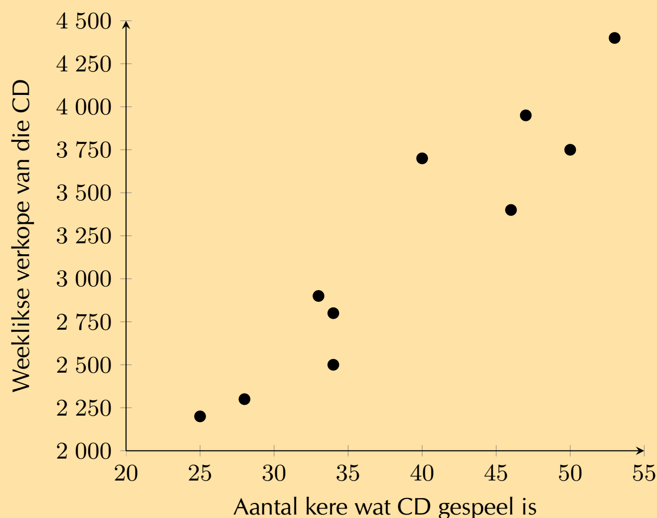
Daar is 'n sterk negatiewe verwantskap tussen die veranderlikes.

7. 'n Platemaatskappy ondersoek die verwantskap tussen die aantal kere wat 'n CD gespeel word op 'n nasionale radiostasie en die nasionale verkope van dieselfde CD gedurende die volgende week. Die data hieronder is versamel vir 'n ewekansige steekproef van 10 CD's. Die verkoopsyfers is afgerond tot die naaste 50. [NKV Vraestel 3 November 2012]

Aantal kere wat CD gespeel is	47	34	40	34	33	50	28	53	25	46
Weeklikse verkope van die CD	3950	2500	3700	2800	2900	3750	2300	4400	2200	3400

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

Oplossing:



b) Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn.

Oplossing:

$$a = 293{,}06$$
$$b = 74{,}28$$
$$\hat{y} = 293{,}06 + 74{,}28x$$

c) Bereken die korrelasiekoëffisiënt.

Oplossing:

$r = 0{,}95$

d) Voorspel, korrek tot die naaste 50, die weeklikse verkope vir 'n CD wat 45 keer gespeel is op die radiostasie in die vorige week.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= 293{,}06 + 74{,}28(45) \\ &= 3635{,}66 \\ &\approx 3650 \text{ (tot die naaste 50)} \end{aligned}$$

e) Lewer kommentaar op die sterkte van die verwantskap tussen die veranderlikes.

Oplossing:

Daar is 'n baie sterk positiewe verwantskap tussen die aantal kere wat 'n CD gespeel is en die verkope van die CD in die volgende week.

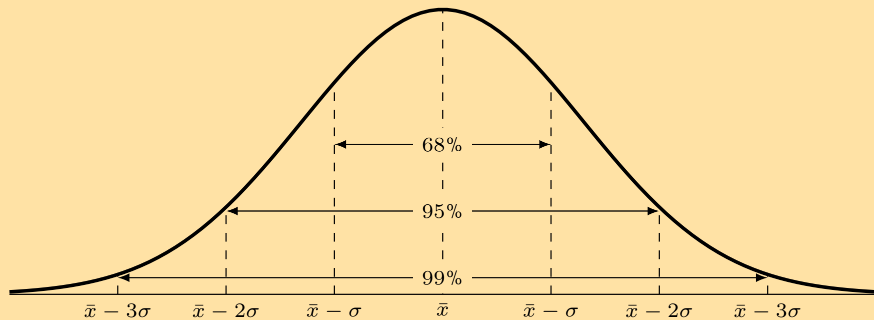
Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BVH 1b. 2BVJ 1c. 2BVK 2a. 2BVM 2b. 2BVN 2c. 2BVP
2d. 2BVQ 2e. 2BVR 3a. 2BVS 3b. 2BVT 4. 2BVV 5. 2BVW
6. 2BVX 7. 2BVY

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 10 – 5: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Die aantal SMS boodskappe, gestuur deur 'n groep tieners, is aangeteken oor 'n tydperk van 'n week. Daar is gevind dat die data normaal versprei is met 'n gemiddelde van 140 boodskappe en 'n standaardafwyking van 12 boodskappe. [NKV Vraestel 3 Feb-Maart 2012]



Beantwoord die volgende vrae met verwysing na die informasie wat gegee is in die grafiek:

a) Watter persentasie tieners het minder as 128 boodskappe gestuur?

Oplossing:

$140 - 12 = 128$

128 is 1 standaardafwyking na die linkerkant van die gemiddelde, daarom is die persentasie tieners wat minder as 128 boodskappe gestuur het:

$50\% - 34\% = 16\%$

b) Watter persentasie tieners het tussen 116 en 152 boodskappe gestuur ?

Oplossing:

116 minute is 2 standaardafwykings van die gemiddelde af, dus $47{,}5\%$.

152 minute is 1 standaardafwyking van die gemiddelde af, dus 34%.

Persentasie tieners wat tussen 116 en 152 boodskappe gestuur het $= 47{,}5\% + 34\% = 81{,}5\%$

2. 'n Maatskappy vervaardig lekkers deur gebruik te maak van 'n masjien wat werk vir 'n paar uur per dag. Die aantal ure wat die masjien werk en die hoeveelheid lekkers vervaardig, word aangeteken.

Masjien ure	Lekkers vervaardig
3,80	275
4,23	287
4,37	291
4,10	281
4,17	286

Bepaal die lineêre regressie vergelyking van die data en skat die masjien ure wat nodig is om 300 lekkers te vervaardig.

Oplossing:

Deur die gebruik van 'n sakrekenaar, is die vergelyking:

$$\hat{y} = 165{,}70 + 28{,}62x$$

Dus, die geskatte aantal masjien ure nodig om 300 lekkers te vervaardig is:

$$300 = 165{,}70 + 28{,}62x$$
$$\therefore x = \frac{300 - 165{,}7}{28{,}62} = 4{,}69 \text{ masjien ure}$$

3. Die winste van 'n nuwe winkel is aangeteken vir die eerste 6 maande. Die eienaar wil sy toekomstige verkope voorspel. Die wins, per maand, was sover R 90 000; R 93 000; R 99 500; R 102 000; R 101 300; R 109 000.

   a) Bereken die lineêre regressie funksie vir die data, deur profyt te gebruik as jou y-veranderlike. Rond a en b af tot twee desimale syfers.

   Oplossing:

$$\hat{y} = 86\ 893{,}33 + 3497{,}14x$$

   b) Gee 'n benaderde skatting vir die volgende twee maande.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Wins sewende maand } &= 86\ 893{,}33 + 3497{,}14(7) = \text{R } 111\ 373{,}31 \\ \text{Wins agste maand } &= 86\ 893{,}33 + 3497{,}14(8) = \text{R } 114\ 870{,}45 \end{aligned}$$

   c) Die eienaar wil 'n profyt van R 130 000 maak. Skat hoeveel maande dit sal neem.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 130\ 000 &= 86\ 893{,}33 + 3497{,}14x \\ \therefore x &= \frac{130\ 000 - 86\ 893{,}33}{3497{,}14} = 12{,}33 \end{aligned}$$

   Dit sal 13 maande maande neem om 'n profyt van R 130 000 te maak.

4. 'n Kitskos maatskappy vervaardig hamburgers. Die aantal hamburgers vervaardig en die koste word aangeteken vir 'n week.

Hamburgers vervaardig	**Koste**
495	R 2382
550	R 2442
515	R 2484
500	R 2400
480	R 2370
530	R 2448
585	R 2805

   a) Bepaal die lineêre regressie funksie wat die beste by die data pas. Gebruik hamburgers vervaardig as jou x-veranderlike en rond a en b af tot twee desimale syfers.

   Oplossing:

   $\hat{y} = 601{,}28 + 3{,}59x$

   b) Bereken die waarde van die korrelasiekoëffisiënt, korrek tot twee desimale syfers, en lewer kommentaar op die sterkte en rigting van die korrelasie.

   Oplossing:

   $r = 0{,}86$

   Daar is 'n sterk, positiewe, lineêre korrelasie.

   c) As die totale koste per dag R 2500 is, skat die aantal hamburgers vervaardig. Rond jou antwoord af tot die naaste heelgetal.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 2500 &= 601{,}28 + 3{,}59x \\ \therefore x &= \frac{2500 - 601{,}28}{3.59} = 528{,}89 \end{aligned}$$

   Dus is 528 burgers vervaardig.

   d) Wat is die koste van 490 hamburgers?

   Oplossing:

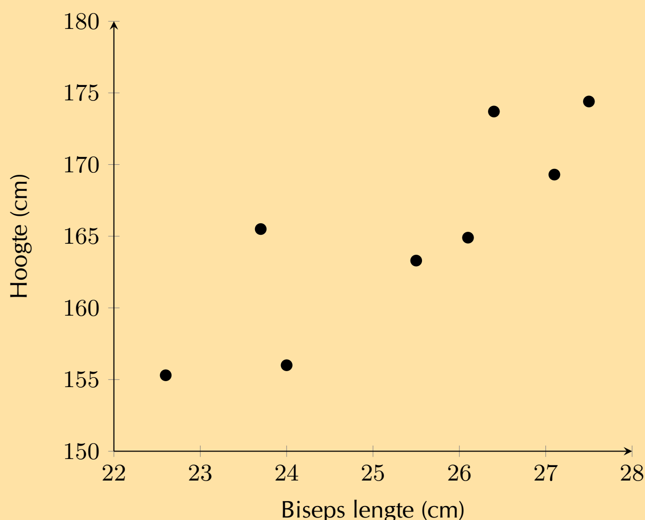
$$y = 601{,}28 + 3{,}59(490) = \text{R } 2360{,}38$$

5. 'n Data stel in verband met 'n ondersoek in biseps lengte en lengte van studente is aangeteken in die tabel hieronder. Beantwoord die daaropvolgende vrae:

Lengte van regter biseps (cm)	Hoogte (cm)
25,5	163,3
26,1	164,9
23,7	165,5
26,4	173,7
27,5	174,4
24	156
22,6	155,3
27,1	169,3

a) Teken 'n spreidiagram van die data stel.

Oplossing:



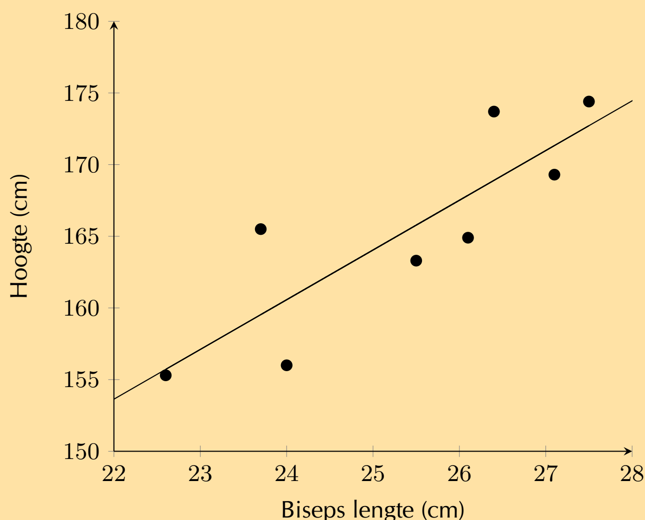
b) Bepaal vergelyking van die regressielyn.

Oplossing:

$\hat{y} = 77{,}32 + 3{,}47x$

c) Skets die regressielyn op die grafiek.

Oplossing:



d) Bereken die korrelasiekoëffisiënt r.

Oplossing:

$r = 0{,}85$

e) Watter gevolgtrekking kan jy maak met betrekking tot die verwantskap tussen die lengte van die regter biseps en die lengte van die studente in die data stel?

Oplossing:

Die lengte van die regter biseps en die lengte van die studente het 'n sterk, positiewe lineêre verwantskap.

6. 'n Klas het twee toetse geskryf en die onderskeie toetspunte is aangeteken in die tabel hieronder. Volpunte vir die eerste toets was 50, en die tweede toets het uit 30 getel.

Leerder	**Toets 1**	**Toets 2**
	(Volpunte: 50)	(Volpunte: 30)
1	42	25
2	32	19
3	31	20
4	42	26
5	35	23
6	23	14
7	43	24
8	23	12
9	24	14
10	15	10
11	19	11
12	13	10
13	36	22
14	29	17
15	29	17
16	25	16
17	29	18
18	17	
19	30	19
20	28	17

a) Is daar 'n sterk korrelasie tussen die punte van die eerste en tweede toets? Wys waarom of waarom nie.

Oplossing:

Deur 'n sakrekenaar te gebruik, $r = 0{,}98$, wat 'n baie sterk, positiewe, lineêre korrelasie is tussen die punte van die eerste en tweede toets.

b) Een van die leerders (in Ry 18) het nie die tweede toets geskryf nie. Gegewe haar toetspunt vir die eerste toets, bereken 'n verwagte toetspunt vir die tweede toets. Rond die toetspunt af tot die naaste heelgetal.

Oplossing:

Deur 'n sakrekenaar te gebruik, is die kleinste kwadrate regressielyn vergelyking:

$$\hat{y} = 1{,}08 + 0{,}57x$$

Dus, die verwagte punt vir die tweede toets van die leerder in Ry 18 is:

$$y = 1{,}08 + 0{,}57(17) = 10{,}77$$

Dus die verwagte punt vir die tweede toets van die leerder in ry 18, is 11 uit 30.

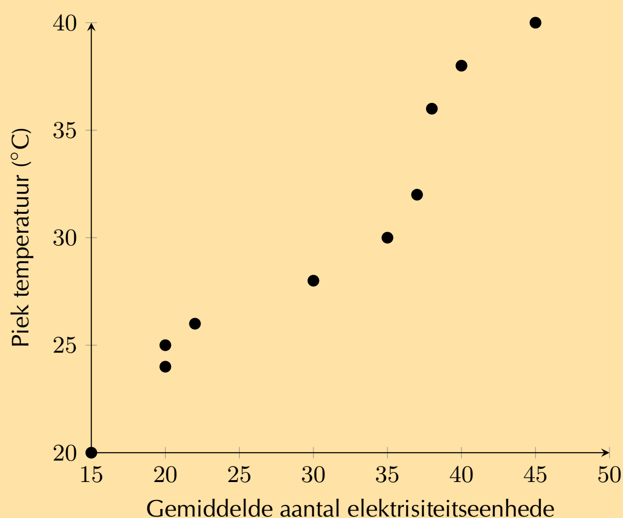
7. Lindiwe werk vir Eskom, die Suid Afrikaanse elektrisiteitsverspreider. Sy weet dat op warm dae meer elektrisiteit as die gemiddelde gebruik word om huise te verkoel. Om 'n akkurate voorspelling te kan maak oor hoeveel meer elektrisiteit gegenereer moet word, wil sy die presiese aard van die verwantskap tussen temperatuur en elektrisiteitsverbruik vasstel.

Die onderstaande data illustreer die piek temperatuur in grade Celsius op tien opeenvolgende dae gedurende die somer en die gemiddelde aantal eenhede elektrisiteit gebruik deur 'n aantal huishoudings. Ondersoek haar data en beantwoord die vrae wat daarop volg.

Piek temperatuur (y)	32	40	30	28	25	38	36	20	24	26
Gemiddelde aantal eenhede (x)	37	45	35	30	20	40	38	15	20	22

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

Oplossing:



b) Deur die formules vir a en b te gebruik, bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate lyn.

Oplossing:

Gemiddelde aantal eenhede (x)	**Piek temp. (y)**	xy	x^2
37	32	1184	1369
45	40	1800	2025
35	30	1050	1225
30	28	840	900
20	25	500	400
40	38	1520	1600
38	36	1368	1444
15	20	300	225
20	24	480	400
22	26	572	484
$\sum = 302$	$\sum = 299$	$\sum = 9614$	$\sum = 10\ 072$

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \frac{10 \times 9614 - 302 \times 299}{10 \times 10\ 072 - 302^2} = 0{,}613913409$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{299}{10} - 0{,}613913409 \times \frac{302}{10} = 11{,}359815048$$

$$\therefore \hat{y} = 11{,}36 + 0{,}61x$$

c) Bepaal die waarde van die korrelasiekoëffisiënt, r, met die hand.

Oplossing:

Ons het alreeds die waarde van b met die hand bereken in bostaande vraag, so ons moet nog net σ_x en σ_y bereken.

Gemiddelde aantal eenhede (x)	**Piek temp. (y)**	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
32	37	46,24	4,41
40	45	219,04	102,01
30	35	0,01	23,04
28	30	0,04	3,61
25	20	104,04	24,01
38	40	96,04	65,61
36	38	60,84	37,21
20	15	231,04	98,01
24	20	104,04	34,81
26	22	67,24	15,21
$\sum = 299$	$\sum = 302$	$\sum = 951{,}6$	$\sum = 384{,}9$

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}{n} = \frac{\sqrt{951{,}6}}{10} = \pm 3{,}08$$

$$b = 1{,}52$$

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}{n} = \frac{\sqrt{384{,}9}}{10} = \pm 1{,}96$$

$$\therefore r = 0{,}61 \times \frac{3{,}08}{1{,}96}$$

$$= 0{,}96$$

d) Wat kan Lindiwe aflei omtrent die verwantskap tussen piek temperature en die aantal elektrisiteitseenhede gebruik?

Oplossing:

Daar is 'n baie sterk, positiewe, lineêre korrelasie tussen piek temperature en gemiddelde aantal elektrisiteitseenhede wat 'n huishouding gebruik.

e) Voorspel die gemiddelde aantal elektrisiteitseenhede gebruik deur 'n huishouding op 'n dag met 'n piek temperatuur van $45°$C. Gee jou antwoord tot die naaste eenheid en identifiseer wat hierdie tipe voorspelling genoem word.

Oplossing:

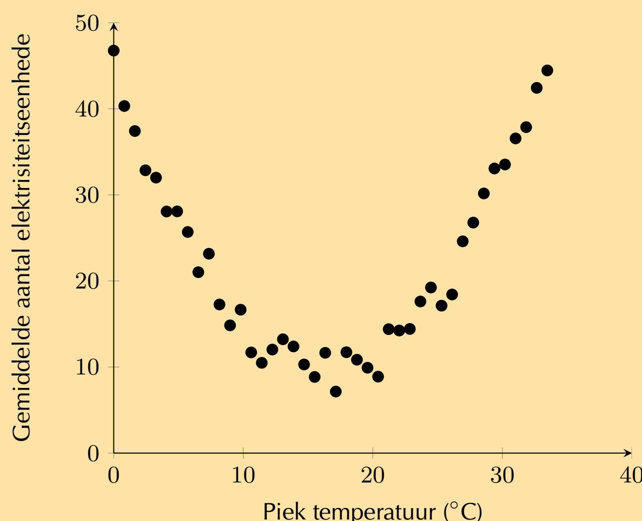
$$45 = 11{,}36 + 0{,}61x$$

$$\therefore x = \frac{45 - 11{,}36}{0{,}61}$$

$$= 55{,}15 \approx 55 \text{ eenhede}$$

Die waarde wat ons gevra was om te voorspel, is buite die omvang van die beskikbare data. Dit staan bekend as ekstrapolasie.

f) Lindiwe het vermoed dat die verwantskap tussen temperatuur en elektrisiteitsverbruik nie lineêr vir alle temperature was nie. Sy het toe besluit om data vir piek temperature tot en met $0°$C te versamel. Ondersoek die grafiek van haar data hieronder en identifiseer watter tipe funksie die beste sal pas op die data en beskryf die aard van die verwantskap tussen temperatuur en elektrisiteit vir die nuwe beskikbare data.



Oplossing:

'n Kwadratiese funksie sal die beste by die data pas. Huishoudelike elektrisiteitsverbruik is op sy minimum teen omtrent $18°$C gemiddeld. Soos die piek temperatuur kouer of warmer word as hierdie punt, verhoog elektrisiteitsverbruik.

g) Lindiwe word deur haar seniors gevra om vas te stel watter dag die beste is om onderhoud uit te voer op een van hul kragstasies. Sy het vasgestel dat die vergelyking $y = 0{,}13x^2 - 4{,}3x + 45$ die beste op haar data pas. Gebruik haar vergelyking om die piek temperatuur en gemiddelde aantal eenhede gebruik, te skat op die dag wat die kleinste hoeveelheid elektrisiteitsopwekking nodig is.

Oplossing:

Die vraag verwag van ons om die minimum waarde van die kwadratiese vergelyking te bepaal. Daar is 'n paar maniere om dit te doen, twee word hieronder gewys.

Die eerste metode is om gebruik te maak van die formule $x = \frac{-b}{2a}$:

- Die eerste stap is om die vergelyking in die vorm: $y = ax^2 + bx + c$ te skryf. Ons vergelyking is alreeds in die vorm, dus kan ons onmiddellik die waardes instel in die formule vir x.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{4{,}3}{(2 \times 0{,}13)} = 16{,}54$$

- Om y te bepaal, stel ons ons x-waarde in die kwadratiese vergelyking: $0{,}13(16{,}54)^2 - 4{,}3(16{,}54) + 45 = 9{,}44$ in.

'n Ander metode is om differensiasie te gebruik:

- Die eerste stap is om die vergelyking in die vorm: $y = ax^2 + bx + c$ te skryf. Ons vergelyking is alreeds in hierdie vorm, dus kan ons die vergelyking onmiddellik differensieer.

$$y' = 0{,}13(2)x - 4{,}3 = 0{,}26x + 4{,}3$$

- By die draaipunt, $y' = 0$, dus kan ons nou vir x oplos:

$$0 = 0{,}26x - 4{,}3$$
$$\therefore x = \frac{4{,}3}{0{,}26} = 16{,}54$$

- Die x-waarde kan nou ingestel word in die kwadratiese vergelyking om y te bepaal:

$$y = 0{,}13(16{,}54)^2 - 4{,}3(16{,}54) + 45 = 9{,}44$$

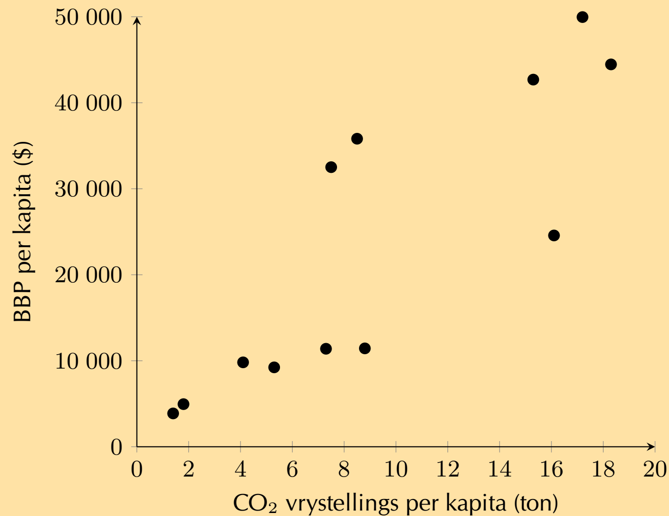
Dus is die piek temperatuur, wanneer elektrisiteitsaanvraag op sy laagste is, $16{,}54$°C en die ooreenstemmende gemiddelde huishoudelike elektrisiteitsverbruik is $9{,}44$ eenhede.

8. Hieronder is 'n lys van data in verband met 12 lande en hul onderskeie koolsuurgas (CO_2) vrystellingsvlakke per persoon per jaar (gemeet in ton) en die bruto binnelandse produk (BBP is 'n maatstaf van produkte geproduseer en dienste gelewer binne 'n land gedurende 'n jaar) per persoon (in US dollars). Data is afkomstig van die Wêreldbank en die VSA se Departement van Energie se koolstofdioksied Inligting Analise Sentrum.

	CO_2 vrystellings per kapita (x)	BBP per kapita (y)
Suid Afrika	8,8	11 440
Thailand	4,1	9815
Italië	7,5	32 512
Australië	18,3	44 462
China	5,3	9233
Indië	1,4	3876
Kanada	15,3	42 693
Verenigde Koninkryk	8,5	35 819
Verenigde State	17,2	49 965
Saudi Arabië	16,1	24 571
Iran	7,3	11 395
Indonesië	1,8	4956

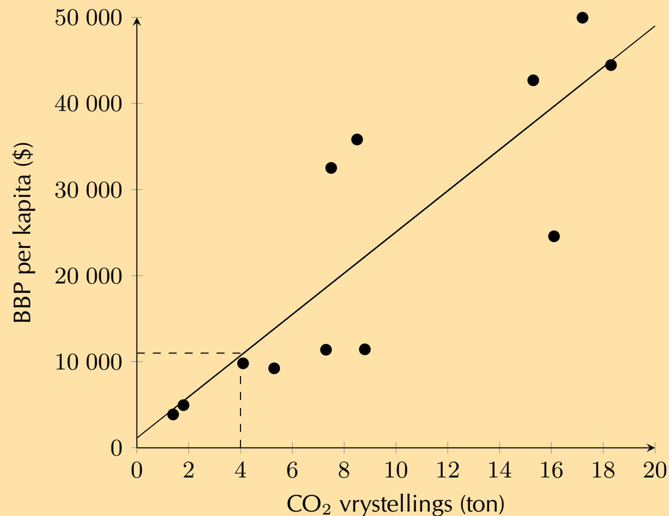
a) Teken 'n spreidiagram van die data stel.

Oplossing:



b) Teken jou skatting van die lyn van beste passing op jou spreidiagram aan en bepaal die vergelyking van jou lyn van beste passing.

Oplossing:



Die y-afsnit is benaderd 1000. By $x = 4$, is y benaderd 11 000. Dus is, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11000-1000}{4-0} = 2500$

Die vergelyking van die lyn wat die beste pas: $y = 2500x + 1000$

c) Gebruik jou sakrekenaar om die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn te bepaal. Rond a en b af tot twee desimale syfers in jou finale antwoord.

Oplossing:

$a = 1133{,}996106$ en $b = 2393{,}736978$, dus $\hat{y} = 1134{,}00 + 2393{,}74x$

d) Gebruik jou sakrekenaar om die korrelasiekoëffisiënt, r, te bepaal. Rond jou antwoord af tot twee desimale syfers.

Oplossing:

$r = 0{,}85$

e) Watter gevolgtrekking kan jy maak in verband met die verwantskap tussen CO_2 vrystellings per jaar en BBP per kapita vir die lande in die data stel?

Oplossing:

Daar is 'n sterk, positiewe, lineêre korrelasie tussen CO_2 vrystellings per jaar en BBP per kapita vir die lande in die data stel.

f) Kenia het 'n BBP per kapita van \$ 1712. Gebruik jou vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn om die jaarlikse CO_2 vrystellings van Kenia te skat, korrek tot twee desimale syfers.

Oplossing:

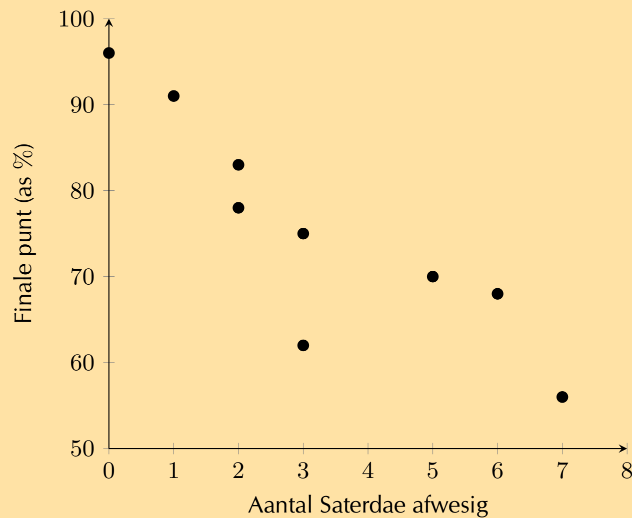
$$1712 = 1134{,}00 + 2393{,}74x$$
$$\therefore x = \frac{1712 - 1134{,}00}{2393{,}74} = 0{,}24 \text{ ton}$$

9. 'n Groep studente het op Saterdae 'n kursus in Statistiek bygewoon oor 'n periode van 10 maande. Die aantal Saterdae waarop 'n student afwesig was, is aangeteken teenoor die finale punt wat die student behaal het. Die informasie is vervat in 'n tabel hieronder. [Aangepas van NKV Vraestel 3 Feb-Maart 2012]

Aantal Saterdae afwesig	0	1	2	2	3	3	5	6	7
Finale punt (as %)	96	91	78	83	75	62	70	68	56

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

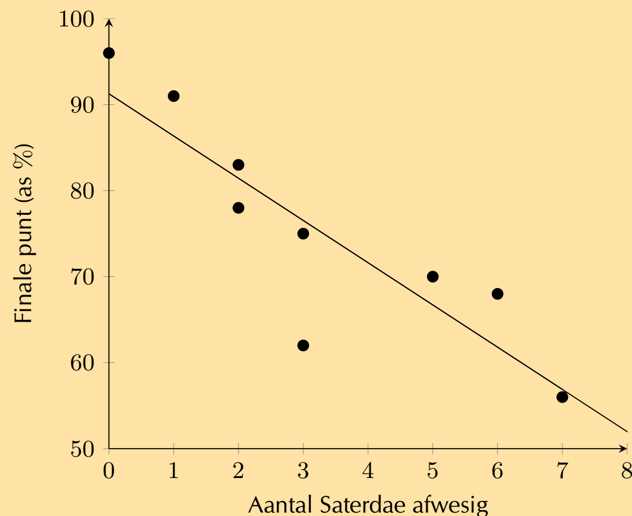
Oplossing:



b) Bereken die vergelyking van die kleinste-kwadrate lyn en teken dit op jou spreidiagram.

Oplossing:

$$a = 91{,}27$$
$$b = -4{,}91$$
$$\hat{y} = 91{,}27 - 4{,}91x$$



c) Bereken die korrelasiekoëffisiënt.

Oplossing:

$r = -0{,}87$

d) Lewer kommentaar op die tendens van die data.

Oplossing:

Hoe meer Saterdae afwesig, hoe laer die punt.

e) Voorspel die finale punt van 'n student wat vier Saterdae afwesig was.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 91{,}27 - 4{,}91(4)\\ &= 71{,}63\%\\ &\approx 72\%\end{aligned}$$

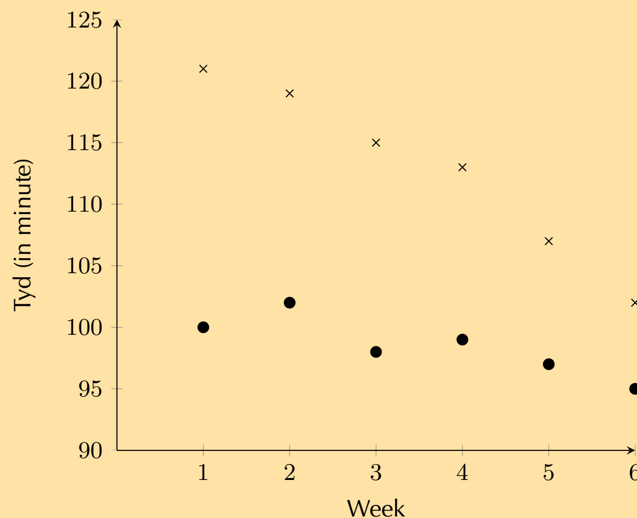
10. Grant en Christie oefen saam vir 'n half-marathon oor 8 weke. Christie is baie fikser as Grant, maar sy het hom uitgedaag om haar tyd te klop in die resies. Grant het 'n strawwe oefenprogram begin volg om sodoende sy tyd te probeer verbeter.

Hulle het elke Sondag die tyd aangeteken wat dit neem om 'n half-marathon te voltooi. Die eerste opgetekende Sondag word aangedui as week 1. Die half-marathon vind plaas op die agtste Sondag, d.i. week 8. Ondersoek die data stel in the tabel hieronder en beantwoord die daaropvolgende vrae.

Week	1	2	3	4	5	6
Grant se tyd (HH:MM)	02:01	01:59	01:55	01:53	01:47	01:42
Christie se tyd (HH:MM)	01:40	01:42	01:38	01:39	01:37	01:35

a) Teken 'n spreidiagram van die data stelle. Teken Grant en Christie se data op dieselfde assestelsel. Gebruik 'n • om Grant se data punte aan te dui en × vir Christie se data punte. Omskep alle tyd in minute.

Oplossing:



b) Lewer kommentaar op en vergelyk alle tendense wat jy waarneem in die data.

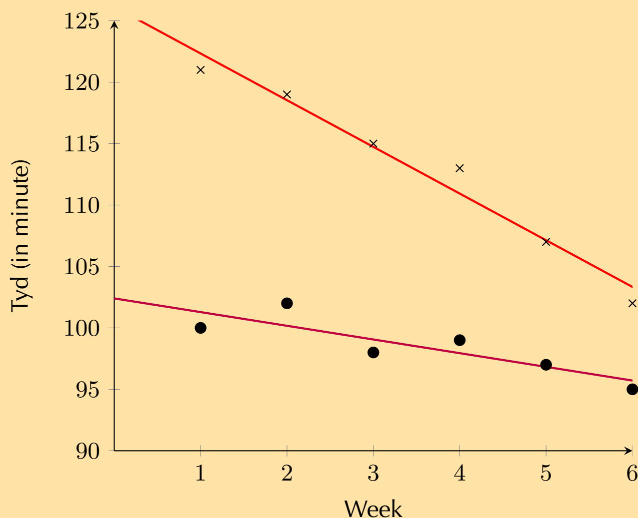
Oplossing:

Albei data stelle toon negatiewe, lineêre tendense. Grant se data weerspieël 'n vinniger dalende tendens as die tendens van Christie se data.

c) Bepaal die vergelykings van die kleinste kwadrate regressielyne vir Grant se data en Christie se data. Teken hierdie lyne op jou spreidiagram. Gebruik verskillende kleure vir elkeen.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{\text{Grant}} &= 126{,}13 - 3{,}8x\\ \hat{y}_{\text{Christie}} &= 102{,}4 - 1{,}11x\end{aligned}$$



d) Bereken die korrelasiekoëffisiënt en lewer kommentaar op die passing vir elke data stel.

Oplossing:

$$\text{Grant: } r = -0{,}98 \quad \text{(negatief, baie sterk)}$$
$$\text{Christie: } r = -0{,}86 \quad \text{(negatief, sterk)}$$

e) Aanvaar dat die waargenome tendense voortgaan. Sal Grant vir Christie klop in die resies?

Oplossing:

Grant sal vir Christie klop as $\hat{y}_{\text{Grant}} < \hat{y}_{\text{Christie}}$. Om die punt van interseksie van die tendense te bepaal, maak ons elke $\hat{y}$ dieselfde.

$$\begin{aligned} 126{,}13 - 3{,}8x &= 102{,}4 - 1{,}11x \\ -3{,}8x + 1{,}11x &= 102{,}4 - 126{,}13 \\ -2{,}69x &= -23{,}73 \\ x &= 8{,}82 \end{aligned}$$

Die resies vind in week 8 plaas. $8{,}82 > 8$, dus sal dit vir Grant onmoontlik wees om Christie se tyd te klop wanneer die resies plaasvind.

f) Aanvaar dat die waargeneemde tendense voortgaan. Ekstrapoleer die week waarin Grant in staat sal wees om 'n half-marathon in minder tyd as Christie af te lê.

Oplossing:

Sien antwoord e). Grant sal Christie se tyd kan klop in die negende week.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BVZ 2. 2BW2 3. 2BW3 4. 2BW4 5. 2BW5 6. 2BW6
7. 2BW7 8. 2BW8 9. 2BW9 10. 2BWB

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 11

Waarskynlikheid

- Hierdie hoofstuk skep goeie geleenthede vir eksperimente en aktiwiteite in die klaskamer waar die onderwyser teoretiese waarskynlikheid en 'n aantal moontlike rangskikkings in die praktyk kan illustreer. In die oefeninge is baie gebruik gemaak van voorbeelde uit die regte lewe en jy kan besluit om sommige van hierdie konsepte met eksperimente in die klas te illustreer.
- Die terminologie en gebruik van taal in hierdie afdeling kan verwarrend wees, veral vir tweede-taal sprekers. Bespreek terminologie gereeld en beklemtoon vir leerders dat hulle vrae noukeurig moet lees.
- Vereniging en snyding, of deursnit, simbole is ingesluit, maar ënën öfïs die voorkeur notasie in CAPS.
- Maak seker dat jy die verskille tussen 'en', 'of', 'slegs' en 'beide' duidelik uiteensit. Byvoorbeeld, in die alledaagse spreektaal mag daar geen verskil tussen tee- **en** koffiedrinkers en tee- **of** koffiedrinkers wees nie, maar in waarskynlikheid het die 'en' en 'of' baie spesifieke betekenisse. Tee- textbfen koffiedrinkers verwys na die snyding van teedrinkers, d.w.s. diegene wat beide drankies drink, terwyl tee- **of** koffiedrinkers verwys na die vereniging, d.w.s. diegene wat slegs tee drink, die wat slegs koffie drink en die wat beide drink.
- Sommige leerders mag faktoriaal notasie uitdagend vind. 'n Uitgebreide stel probleme, soos $4!3! \neq 12!$ of $\frac{6!}{4!} \neq \frac{3!}{2!}$, is ingesluit om te probeer om party van die wanopvattings uit te stryk, maar jy mag nodig hê om stadiger te beweeg met sommige leerders.
- Let daarop dat die formule vir die rangskikking van n verskillende items in r verskillende plekke bv. $\frac{n!}{(n-r)!}$ NIE ingesluit is in CAPS nie en leerders behoort dus hierdie probleme logies op te los.
- Wanneer die fundamentele telbeginsel op waarskynlikheidsprobleme toegepas word, mag leerders sukkel om te weet wanneer om waarkynlikhede te vermenigvuldig en wanneer om op te tel. Wanneer 'n aantal verskillende uitkomste pas by 'n gewenste resultaat, word die waarskynlikheid van al die uitkomste bymekaargetel. Wanneer die waarskynlikheid bepaal word dat twee of meer gebeurtenisse sal plaasvind, word die individuele waarskynlikhede met mekaar vermenigvuldig.

11.1 Hersiening

11.2 Identiteite

Oefening 11 – 1: Die produk- en optelreëls

1. Bepaal of die volgende gebeurtenisse afhanklik of onafhanklik is en gee 'n rede vir jou antwoord:

   a) Joan het 'n boks met geel, groen en oranje lekkers. Sy haal 'n geel lekker uit en eet dit. Dan kies sy 'n ander lekker en eet dit.

   Oplossing:

   Die twee gebeurtenisse is afhanklik omdat daar minder lekkers is om van te kies as sy die tweede keuse maak.

   b) Vuzi gooi 'n dobbelsteen tweekeer.

   Oplossing:

   Die twee gebeurtenisse is onafhanklik omdat die uitkoms van die eerste gooi geen invloed het op die uitkoms van die tweede gooi nie.

   c) Celia kies enige kaart uit 'n pak van 52 kaarte. Sy is ongelukkig met haar keuse, dus sit sy die kaart terug in die pak, skommel die kaarte en kies 'n tweede kaart.

   Oplossing:

   Die twee gebeurtenisse is onafhanklik omdat die versameling kaarte in die pak onveranderd is elke keer wat Celia willekeurig 'n kaart kies.

d) Thandi het 'n sak krale. Sy kies willekeurig 'n geel kraal, kyk daarna en sit dit terug in die sak. Sy kies enige ander kraal, sien dit is rooi en sit dit terug in die sak.

Oplossing:

Die twee gebeurtenisse is onafhanklik omdat daar dieselfde versameling krale is elke keer wat Thandi een kies.

e) Mark het 'n houer met sakrekenaars. Party van hulle werk, ander is stukkend. Hy kies 'n sakrekenaar op 'n ewekansige manier, sien dat dit nie werk nie en gooi dit weg. Hy kies dan 'n ander sakrekenaar, sien dat dit werk en hou dit.

Oplossing:

Die twee gebeurtenisse is afhanklik omdat Mark minder sakrekenaars het om van te kies wanneer hy weer een vat.

2. Dit word gegee dat $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}4$ en $P(A \text{ en } B) = 0{,}28$,

a) Is gebeurtenisse A en B wedersyds uitsluitend? Gee 'n rede vir jou antwoord.

Oplossing: Vir die gebeurtenisse om wedersyds uitsluitend te wees, moet $P(A \text{ en } B)$ gelyk wees aan 0. In hierdie geval $P(A \text{ en } B) = 0{,}28$, dus die gebeurtenisse is nie wedersyds uitsluitend nie.

b) Is die gebeurtenisse A en B onafhanklik? Gee 'n rede vir jou antwoord.

Oplossing:

Vir gebeurtenisse om onafhanklik te wees:

$$P(A) \times P(B) = P(A \text{ en } B)$$

$$P(A) \times P(B) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28 = P(A \text{ en } B)$$

Dus die gebeurtenisse is onafhanklik.

3. Is A en B in die volgende voorbeelde afhanklik of onafhanklik?

a) $P(A) = 0{,}2; P(B) = 0{,}7$ en $P(A \text{ en } B) = 0{,}21$

Oplossing:

$$P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14 \neq 0{,}21 = P(A \text{ en } B).$$

Dus die gebeurtenisse is afhanklik.

b) $P(A) = 0{,}2; P(B) = 0{,}7$ en $P(B \text{ en } A) = 0{,}14$.

Oplossing:

$$P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14 = P(B \text{ en } A)$$

Dus die gebeurtenisse is onafhanklik.

4. $n(A) = 5; n(B) = 4; n(S) = 20$ en $n(A \text{ of } B) = 8$.

a) Is A en B wedersyds uitsluitend?

Oplossing:

$$P(A) = \frac{5}{20}; P(B) = \frac{4}{20}; P(A \text{ of } B) = \frac{8}{20}$$

Vir A en B om wedersyds uitsluitend te wees: $P(A) + P(B) = P(A \text{ of } B)$.

$$\frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20} \neq \frac{8}{20}$$

Die gebeurtenisse is dus nie wedersyds uitsluitend nie.

b) Is A en B onafhanklik?

Oplossing:
Vir A en B om onafhanklik te wees,

$$\begin{aligned} P(A \text{ of } B) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) \\ \therefore P(A \text{ en } B) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ of } B) \\ &= \frac{5}{20} + \frac{4}{20} - \frac{8}{20} \\ &= \frac{1}{20} \\ P(A) \times P(B) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{20} = P(A \text{ en } B) \end{aligned}$$

Dus die gebeurtenisse is onafhanklik.

5. Simon gooi 'n dobbelsteen tweemaal. Wat is die waarskynlikheid om die volgende te kry:

a) twee drieë?

Oplossing:

$$P(\text{twee drieë}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

b) 'n priemgetal en dan 'n ewe getal?

Oplossing:
Daar is 3 moontlike priemgetalle op die dobbelsteen, naamlik 2, 3 en 5, en daar is 3 moontlike ewe getalle, naamlik 2, 4 en 6.

$$\begin{aligned} P(\text{priemgetal en dan ewe getal}) &= P(\text{priemgetal}) \times P(\text{ewe getal}) \\ &= \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

c) geen drieë?

Oplossing:
As geen drieë gegooi word nie, dan bly daar 5 moontlikhede oor vir elk van die gebeurtenisse.

$$P(\text{geen drieë}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

d) slegs een drie?

Oplossing:
In die steekproefruimte is daar 36 moontlike uitkomste. Daar is twee maniere om slegs een drie te kry: om 'n 3 te kry met die eerste gooi en 'n ander getal as 3 met die tweede gooi, of 'n 3 met die tweede gooi en 'n ander getal as 3 met die eerste gooi. Die uitkomste wat slegs een 3 bevat is: $(3;1)$; $(3;2)$; $(3;4)$; $(3;5)$; $(3;6)$; $(1;3)$; $(2;3)$; $(4;3)$; $(5;3)$; $(6;3)$.

$$P(\text{slegs een } 3) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

e) ten minste een drie?

Oplossing:
In die steekproefruimte is daar 36 moontlike uitkomste. Die uitkomste wat ten minste een 3 bevat, is: $(3;1)$; $(3;2)$; $(3;3)$; $(3;4)$; $(3;5)$; $(3;6)$; $(1;3)$; $(2;3)$; $(4;3)$; $(5;3)$; $(6;3)$.

$$P(\text{en minste een } 3) = \frac{11}{36}$$

6. Die sokkerspan van Mandalay Sekondêre Skool moet beide van hulle volgende twee wedstryde wen om te kwalifiseer vir die finaal. Die waarskynlikheid dat Mandalay Sekondêr hulle eerste sokkerwedstryd teen Ihlumelo Hoërskool wen, is $\frac{2}{5}$ en die waarskynlikheid dat hulle hulle tweede sokkerwedstryd teen Masiphumelele Sekondêr wen, is $\frac{3}{7}$. Aanvaar elke wedstryd is 'n onafhanklike gebeurtenis.

   a) Wat is die waarskynlikheid dat hulle sal deurdring na die finaal?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{wen en wen}) &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \\ &= \frac{6}{35} \end{aligned}$$

   b) Wat is die waarskynlikheid dat hulle nie een van hierdie wedstryde wen nie?

   Oplossing:

   Om die waarskynlikheid te bereken dat geen wedstryd gewen word nie, gebruik:

$$P(\text{nie wen}) = 1 - P(\text{wen})$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } P(\text{nie wen en nie wen}) &= \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} \\ &= \frac{12}{35} \end{aligned}$$

   Hierdie oplossing maak gebruik van die komplementreël waarmee leerders bekend behoort te wees. Ons sal die reël later in meer detail hersien.

   c) Wat is die waarskynlikheid dat hulle slegs een van hulle wedstryde wen?

   Oplossing:

   Daar is twee moontlike uitkomste: wen-nie wen of nie wen-wen. Laat wen $= W$.

$$\begin{aligned} P((\text{W; nie W}) \text{ or } (\text{nie W; W})) &= P(\text{W; nie W}) + P(\text{nie W; W}) \\ &= P(\text{W}) \times P(\text{nie W}) + P(\text{nie W}) \times P(\text{W}) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{7} \\ &= \frac{8}{35} + \frac{9}{35} = \frac{17}{35} \end{aligned}$$

   d) Jy is gevra om aan te neem dat die wedstryde onafhanklike gebeurtenisse is, maar dit is in realiteit onwaarskynlik. Noem sommige faktore wat jy dink wat mag aanleiding gee daartoe dat die uitkomste van die wedstryde afhanklik is?

   Oplossing:

   Dit is 'n oop-einde vraag wat ontwerp is om leerders krities te laat dink oor die afhanklike of onafhanklike aard van regte lewe gebeurtenisse. Voorbeeld antwoorde kan insluit besering of skorsing van spelers gedurende die eerste wedstryd, spanmoraal indien hulle die eerste wedstryd wen of verloor, ens.

7. 'n Potloodsakkie bevat 2 rooi penne en 4 groen penne. 'n Pen word uitgehaal uit die sak en dan teruggeplaas voordat 'n tweede pen uitgehaal word. Bereken:

   a) Die waarskynlikheid om 'n rooi pen eerste raak te vat as 'n groen pen tweede getrek word.

   Oplossing:

   Die gebeurtenisse is onafhanlik, dus:

$$P(\text{rooi pen eerste}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

   b) Die waarskynlikheid om 'n groen pen tweede te trek as die eerste pen wat uitgehaal is, rooi was.

Oplossing:
Die gebeurtenisse is onafhanlik, dus:

$$P(\text{groen pen tweede}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

c) Die waarskynlikheid om 'n rooi pen eerste en 'n groen pen tweede te trek.
Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{eerste pen rooi en tweede pen groen}) &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

8. 'n Kosblik bevat 4 toebroodjies en 2 appels. Vuyele kies 'n kositem willekeurig en eet dit. Hy kies dan 'n ander kositem willekeurig en eet dit. Bepaal die volgende:

a) Die waarskynlikheid dat die eerste item 'n toebroodjie is.
Oplossing:

$$P(\text{toebroodjie eerste}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b) Die waarskynlikheid dat die eerste item 'n toebroodjie en die tweede item 'n appel is.
Oplossing:
Eerste item toebroodjie en tweede item appel (SA):

$$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

c) Die waarskynlikheid dat die tweede item 'n appel is.
Oplossing:
Daar is twee moontlike uitkomste om 'n appel tweede te eet:

- eerste item toebroodjie en tweede item appel (SA):

$$= \frac{4}{15} \text{ (van b)}$$

- eerste item appel en tweede item appel(AA):

$$\frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

$$\begin{aligned} P(\text{appel tweede}) = P(SA) + P(AA) &= \frac{4}{15} + \frac{1}{15} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

d) Is die gebeurtenisse in a) en c) afhanklik? Bevestig you antwoord met 'n berekening.
Oplossing:

$$P(\text{toebroodjie eerste}) \times P(\text{appel tweede}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \neq \frac{4}{15} = P(\text{SA})$$

Dus die gebeurtenisse is afhanklik.

9. Gegewe dat $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$ en $P(A \text{ of } B) = 0{,}7$, bepaal deur berekening of gebeurtenisse A en B:

a) wedersyds uitsluitend is.
Oplossing:

$$P(A) + P(B) = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9 \neq 0{,}7 = P(A \text{ of } B)$$

Dus, A en B is nie wedersyds uitsluitend nie.

b) onafhanklik is.

Oplossing:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$$
$$0{,}7 = 0{,}5 + 0{,}4 - P(A \text{ en } B)$$
$$P(A \text{ en } B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}7 = 0{,}2$$
$$P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2 = P(A \text{ en } B)$$

Gevolglik is A en B onafhanklik.

10. A en B is twee gebeurtenisse in 'n steekproefruimte waar $P(A) = 0{,}3$; $P(A \text{ of } B) = 0{,}8$ en $P(B) = k$. Bepaal die waarde van k as:

a) A en B wedersyds uitsluitend is.

Oplossing:
Vir A en B om wedersyds uitsluitend te wees: $P(A) + P(B) = P(A \text{ of } B)$

$$0{,}3 + k = 0{,}8$$
$$\therefore k = 0{,}5$$

b) A en B onafhanlik is.

Oplossing:
Vir A en B om onafhanklik te wees:

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$
$$\text{Dus } P(A \text{ en } B) = 0{,}3k$$

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$$
$$0{,}8 = 0{,}3 + k - 0{,}3k$$
$$0{,}8 = 0{,}3 + 0{,}7k$$
$$\therefore 0{,}7k = 0{,}5$$
$$\therefore k = \frac{5}{7}$$

11. A en B is twee gebeurtenisse in die steekproefruimte S waar $n(S) = 36$; $n(A) = 9$; $n(B) = 4$ en $n(\text{nie } (A \text{ of } B)) = 24$. Bepaal:

a) $P(A \text{ of } B)$

Oplossing:

$$P(A \text{ of } B) = 1 - P(\text{nie } (A \text{ of } B))$$
$$= 1 - \frac{24}{36} = \frac{1}{3}$$

b) $P(A \text{ en } B)$

Oplossing:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$$
$$\frac{1}{3} = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} - P(A \text{ en } B)$$
$$\therefore P(A \text{ en } B) = \frac{9}{36} + \frac{4}{36} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{36}$$

c) of gebeurtenisse A en B onafhanklik is. Bevestig jou antwoord met 'n berekening.

Oplossing:
Vir onafhanklike gebeurtenisse $P(A) \times P(B) = P(A \text{ en } B)$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{36} = P(A \text{ en } B)$$

Gevolglik is A en B onafhanklik.

12. Die waarskynlikheid dat 'n Wiskunde onderwyser op 'n sekere dag afwesig gaan wees van die skool is 0,2. Die waarskynlikheid dat die Wetenskap onderwyser op dieselfde dag afwesig gaan wees, is 0,3.

    a) Dink jy hierdie twee gebeurtenisse is onafhanklik? Gee 'n rede vir jou antwoord.
    Oplossing:
    Leerder afhanklik. Byvoorbeeld: Nee, daar kan 'n virus of 'n siekte wees wat deur die skool versprei, en daarom kan die afwesigheid van beide onderwysers afhanklik wees.

    b) Aanvaar die gebeurtenisse is onafhanklik, wat is die waarskynlikheid dat die Wiskunde onderwyser of die Wetenskap onderwyser afwesig sal wees?
    Oplossing:
    Laat die waarskynlikheid dat die Wiskunde onderwyser afwesig is $P(M)$ wees en die waarskynlikheid dat die Wetenskap onderwyser afwesig is $P(S)$ wees.

$$P(M \text{ of } S) = P(M) + P(S) - P(M \text{ en } S)$$

Aanvaar die gebeurtenisse is onafhanklik:

$$\begin{aligned} P(M \text{ en } S) &= 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06 \\ \text{Dus } P(M \text{ of } S) &= 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}06 \\ &= 0{,}44 \end{aligned}$$

    c) Wat is die waarskynlikheid dat nie die Wiskunde onderwyser of die Wetenskap onderwyser afwesig is nie?
    Oplossing:

$$P(\text{nie } (M \text{ of } S)) = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$$

13. Langa Krieketklub speel twee krieket wedstryde teen verskillende klubs. Die waarskynlikheid dat hulle die eerste wedstryd wen, is $\frac{3}{5}$ en die waarskynlikheid dat hulle die tweede wedstryd wen, is $\frac{4}{9}$. As ons aanvaar die uitslae van die wedstryde is onafhanklik, bereken die waarskynlikheid dat Langa Krieketklub:

    a) beide wedstryde sal wen.
    Oplossing:
    Laat $P(M)$ die waarskynlikheid wees dat hulle die eerste wedstryd wen en $P(N) =$ die waarskynlikheid dat hulle die tweede wedstryd wen.

$$\begin{aligned} P(M \text{ en } N) &= \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{12}{45} \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

    b) nie die eerste wedstryd wen nie.
    Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{nie } M) &= 1 - \frac{3}{5} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

    c) een of albei van die twee wedstryde wen.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(M \text{ of } N) &= P(M) + P(N) - P(M \text{ en } N) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{4}{9} - \frac{4}{15} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

d) nie een van die twee wedstryde wen nie.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{nie } M \text{ en nie } N) &= P(\text{nie } M) \times P(\text{nie } N) \\ &= \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(1 - \frac{4}{9}\right) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{5}{9} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

e) wen nie die eerste wedstryd nie en wen die tweede wedstryd.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{nie } M \text{ en } N) &= P(\text{nie } M) \times P(N) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{8}{45} \end{aligned}$$

14. Twee spanne werk aan die finale probleem in 'n Wiskunde Olimpiade. Hulle het 10 minute oor om die probleem klaar te maak. Die waarskynlikheid dat span A die probleem betyds gaan oplos, is 40% en die waarskynlikheid dat span B die probleem betyds gaan oplos, is 25%. Bereken die waarskynlikheid dat beide spanne sal klaarmaak voor die tyd verby is.

Oplossing:

Laat die waarskynlikheid dat span A sal klaarkry $P(A)$ wees en die waarskynlikheid dat span B sal klaarkry $P(B)$ wees. Die spanne werk apart, dus die twee gebeurtenisse is onafhanklik.

$$\begin{aligned} P(A \text{ en } B) &= P(A) \times P(B) \\ &= 0.4 \times 0.25 \\ &= 0.1 \text{ of } 10\% \end{aligned}$$

15. Thabo en Julia het gestry of mense tee of koffie verkies. Thabo het voorgestel dat hulle 'n ondersoek doen om die geskil op te los. In totaal het hulle 24 mense gevra en gevind dat 8 van hulle verkies om koffie te drink en 12 van hulle verkies om tee te drink. Die getal mense wat tee, koffie of beide drink, is 16. Bepaal:

a) die waarskynlikheid dat 'n persoon tee of koffie of beide drink.

Oplossing: Laat $n(C)$ die aantal mense wees wat koffie drink en $n(T)$ die aantal mense wat tee drink.

$$\begin{aligned} P(C \text{ of } T) &= \frac{n(C \text{ of } T)}{n(S)} \\ &= \frac{16}{24} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) die waarskynlikheid dat 'n persoon nie tee of koffie drink nie.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{nie }(C \text{ of } T)) &= 1 - P(C \text{ of } T) \\ &= 1 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

c) die waarskynlikheid dat 'n persoon koffie en tee drink.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(C \text{ en } T) &= P(C) + P(T) - P(C \text{ of } T) \\ &= \frac{n(C)}{n(S)} + \frac{n(T)}{n(S)} - \frac{n(C \text{ of } T)}{n(S)} \\ &= \frac{8}{24} + \frac{12}{24} - \frac{16}{24} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

d) die waarskynlikheid dat 'n persoon nie koffie drink nie.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{nie } C) &= 1 - P(C) \\ &= 1 - \frac{8}{24} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

e) of die gebeurtenis dat 'n persoon koffie drink en die gebeurtenis dat 'n persoon tee drink onafhanklik is.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(C) \times P(T) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} = P(C \text{ en } T) \end{aligned}$$

Dus die gebeurtenisse is onafhanklik.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BWG 2. 2BWH 3. 2BWJ 4. 2BWK 5. 2BWM 6. 2BWN
7. 2BWP 8. 2BWQ 9. 2BWR 10. 2BWS 11. 2BWT 12. 2BWV
13. 2BWW 14. 2BWX 15. 2BWY

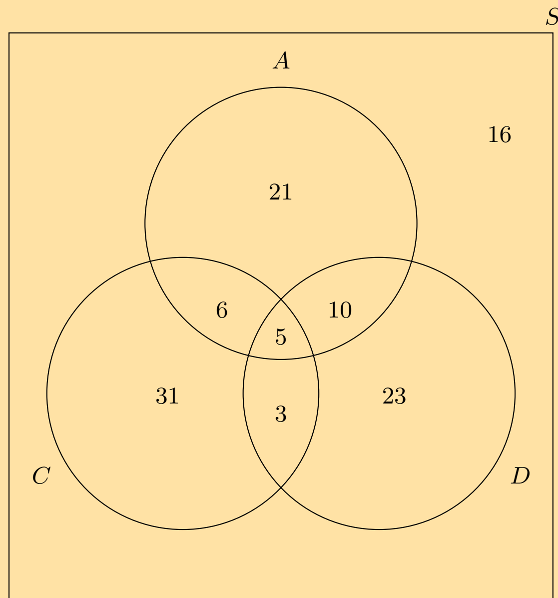
 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

11.3 Hulpmiddels en tegnieke

Oefening 11 – 2: Venn- en boomdiagramme

1. 'n Opname is gedoen onder 'n groep leerders om te bepaal watter tipe TV programme hulle geniet: aksie, komedie of drama. Laat A = aksie, C = komedie en D = drama

wees. Die resultaat van die opname word getoon in die Venndiagram hier onder.



Bestudeer die Venndiagram en bepaal die volgende:

a) die totale aantal leerders in die opname

Oplossing:

115

b) die aantal leerders wat geeneen van die genoemde tipes TV programme geniet nie

Oplossing:

16

c) $P(\text{nie } A)$

Oplossing:

$\frac{73}{115}$

d) $P(A \text{ of } D)$

Oplossing:

$\frac{68}{115}$

e) $P(A \text{ en } C \text{ en } D)$

Oplossing:

$\frac{5}{115} = \frac{1}{23}$

f) $P(\text{nie } (A \text{ en } D))$

Oplossing:

$\frac{100}{115} = \frac{20}{23}$

g) $P(A \text{ of nie } C)$

Oplossing:

$\frac{81}{115}$

h) $P(\text{nie } (A \text{ of } C))$

Oplossing:

$\frac{39}{115}$

i) die waarskynlikheid dat 'n leerder ten minste twee van hierdie tipes TV programme geniet

Oplossing:

$\frac{24}{115}$

j) Beskryf, in woorde, die betekenis van elk van vrae c) tot h) in die konteks van hierdie probleem.

Oplossing:

P(nie A): die waarskynlikheid dat leerders nie aksie TV programme geniet nie

P(A of D): die waarskynlikheid dat leerders aksie of drama TV programme geniet

P(A en D en C): die waarskynlikheid dat leerders aksie, drama en komedie TV programme geniet

P(nie (A en D)): die waarskynlikheid dat leerders nie aksie en drama TV programme geniet nie

P(A of nie C): die waarskynlikheid dat leerders aksie TV programme geniet of komedie TV programme nie geniet nie

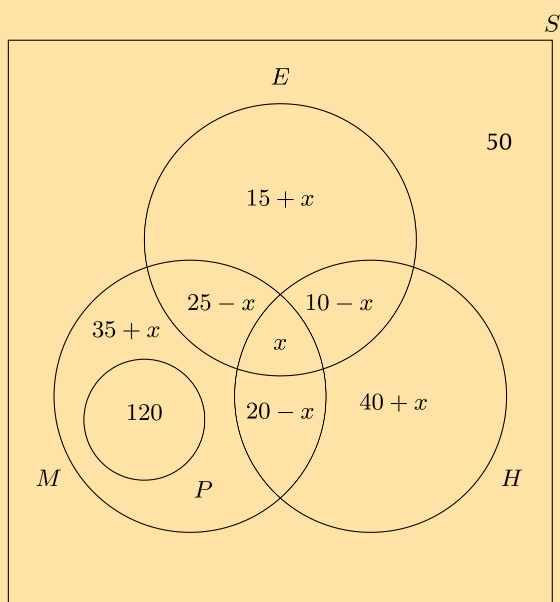
P(nie (A of C)): die waarskynlikheid dat leerders nie aksie of komedie TV programme geniet nie

2. By Thandokulu Sekondêre Skool, is daar 320 leerders in Graad 12, waarvan 270 een of meer van die vakke Wiskunde, Geskiedenis of Ekonomie neem. Die vakkeuse is sodanig dat almal wat Fisiese Wetenskap neem, moet ook Wiskunde neem en niemand wat Fisiese Wetenskap neem kan Geskiedenis of Ekonomie neem nie. Die volgende is bekend oor die aantal leerders wat hierdie vakke neem:

- 70 neem Geskiedenis
- 50 neem Ekonomie
- 120 neem Fisiese Wetenskappe
- 200 neem Wiskunde
- 20 neem Wiskunde en Geskiedenis
- 10 neem Geskiedenis en Ekonomie
- 25 neem Wiskunde en Ekonomie
- x leerders neem Wiskunde en Geskiedenis en Ekonomie

a) Stel bostaande inligting voor met 'n Venndiagram. Laat Wiskunde M wees, Geskiedenis H, Fisiese Wetenskap P en Ekonomie E wees.

Oplossing:



b) Bepaal die aantal leerders, x, wat Wiskunde, Geskiedenis en Ekonomie neem.

Oplossing:

$$\begin{aligned} 120 + (35 + x) + (25 - x) + (20 - x) + x + (40 + x) + (10 - x) + (15 + x) &= 270 \\ 265 + x &= 270 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Dus 5 leerders neem Wiskunde, Geskiedenis en Ekonomie.

c) Bepaal P(nie (M of H of E)) en beskryf in woorde wat jou antwoord beteken.

Oplossing:

$$P(\text{nie } (M \text{ of } H \text{ of } E)) = \frac{50}{320} = \frac{5}{32}$$

Dit is die waarskynlikheid dat 'n leerder nie Wiskunde, Geskiedenis of Ekonomie neem nie.

d) Bepaal die waarskynlikheid dat 'n leerder ten minste twee van hierdie vakke neem.

Oplossing:

Hierdie vraag verwag van ons om die som te vind van die waarskynlikhede van al die leerders wat ten minste twee vakke neem. Dit sluit die deursnit of snyding in van elk van hierdie vakke.

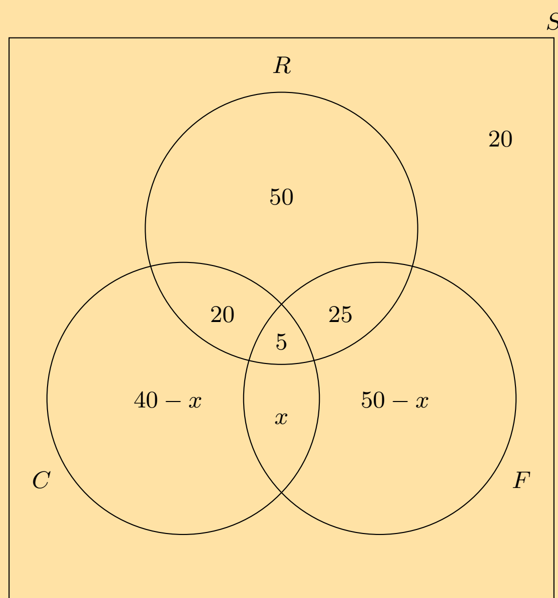
$$P(\text{ten minste twee vakke}) = \frac{120 + 20 + 5 + 5 + 15}{320} = \frac{33}{64}$$

3. 'n Groep van 200 mense is gevra oor die sportsoorte wat hulle op televisie kyk. Die versamelde inligting word hieronder gegee:

- 180 kyk rugby, krieket of sokker
- 5 kyk rugby, krieket en sokker
- 25 kyk rugby en krieket
- 30 kyk rugby en sokker
- 100 kyk rugby
- 65 kyk krieket
- 80 kyk sokker
- x kyk krieket en sokker maar nie rugby nie

a) Stel al die inligting hierbo voor in 'n Venn diagram. Laat rugbykykers $= R$, krieketkykers $= C$ en sokkerkykers $= F$.

Oplossing:



b) Kry die waarde van x.

Oplossing:

$$\begin{aligned} 50 + 25 + 5 + 20 + (40 - x) + (50 - x) + x &= 180 \\ 190 - x &= 180 \\ \text{Dus } x &= 10 \end{aligned}$$

c) Bepaal $P(\text{nie } (R \text{ of } F \text{ of } C))$

Oplossing:

$$P(\text{nie } (R \text{ of } F \text{ of } C)) = \frac{20}{200} = \frac{1}{10}$$

d) Bepaal $P(R \text{ of } F \text{ of nie } C)$

Oplossing:

$$P(R \text{ of } F \text{ of nie } C) = \frac{170}{200} = \frac{17}{20}$$

e) Is krieketkyk en rugbykyk onafhanklike gebeurtenisse? Bevestig jou antwoord met 'n berekening.

Oplossing:

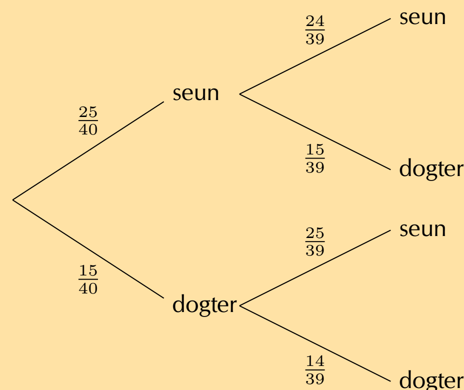
$$\begin{aligned}
P(R) &= \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \\
P(C) &= \frac{65}{200} = \frac{13}{40} \\
P(R \text{ en } C) &= \frac{25}{200} = \frac{1}{8} \\
P(R) \times P(C) &= \frac{1}{2} \times \frac{13}{40} = \frac{13}{80} \neq \frac{1}{8} = P(R \text{ en } C)
\end{aligned}$$

Dus is rugbykyk en krieketkyk onafhanklike gebeurtenisse.

4. Daar is 25 seuns en 15 dogters in die Engelse klas. Tydens elke les word twee leeders lukraak gekies om 'n mondeling te doen.

a) Stel die samestelling van die Engelse klas in 'n boomdiagram voor. Sluit alle moontlike uitkomste en waarskynlikhede in.

Oplossing:



b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n seun en 'n dogter gekies word om 'n mondeling te doen in enige bepaalde les.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{25}{40} \times \frac{15}{39}\right) + \left(\frac{15}{40} \times \frac{25}{39}\right) &= \frac{25}{104} + \frac{25}{104} \\
&= \frac{25}{52}
\end{aligned}$$

c) Bereken die waarskynlikheid dat ten minste een van die leerders wat gekies word om in 'n bepaalde les 'n mondeling te doen 'n seun is.

Oplossing:

Let op: Hierdie vraag kan beantwoord word óf deur die uitkomste wat 'n seun insluit, dus nie (dogter; dogter), van 1 af te trek (sien hieronder) óf deur die drie uitkomste wat wel 'n seun insluit op te tel. Beide metodes is reg.

$$1-\left(\frac{15}{40}\times\frac{14}{39}\right)=1-\frac{7}{52}$$
$$=\frac{45}{52}$$

d) Is die gebeurtenisse om eerste 'n seun te kies en om tweede 'n dogter te kies afhanklik of onafhanklik? Regverdig jou antwoord met 'n berekening.

Oplossing:

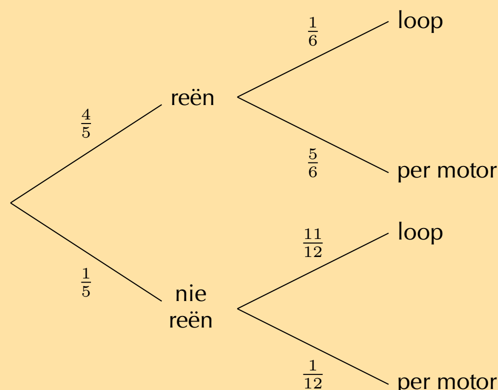
$$\begin{aligned}
P(\text{seun eerste}) &= \frac{25}{40}=\frac{5}{8}\\
P(\text{dogter tweede}) &= \left(\frac{15}{40}\times\frac{14}{39}\right)+\left(\frac{25}{40}\times\frac{15}{39}\right)\\
&= \frac{7}{52}+\frac{25}{104}\\
&= \frac{3}{8}\\
P(\text{seun eerste})\times P(\text{dogter tweede}) &= \frac{5}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{15}{64}\\
P(\text{seun eerste en dogter tweede}) &= \frac{25}{40}\times\frac{15}{39}\\
&= \frac{25}{104}\neq\frac{15}{64}=P(\text{seun eerste})\times P(\text{dogter tweede})
\end{aligned}$$

Daarom is die gebeurtenisse om 'n seun eerste te kies en om 'n dogter tweede te kies afhanklik.

5. Tydens Julie in Kaapstad is die waarskynlikheid dat dit op 'n lukraak gekose dag sal reën $\frac{4}{5}$. Óf Gladys loop skool toe óf sy kry 'n geleentheid saam met haar ouers in hulle motor. As dit reën is die waarskynlikheid dat Gladys se ouers haar met die motor skool toe sal neem $\frac{5}{6}$. As dit nie reën nie is die waarskynlikheid dat Gladys se ouers haar met die motor skool toe sal neem $\frac{1}{12}$.

a) Stel die ingligting hierbo in 'n boomdiagram voor. Toon al die moontlike uitkomste en hul onderskeie waarskynlikhede op jou diagram aan.

Oplossing:



b) Wat is die waarskynlikheid dat dit 'n reënerige dag is en dat Gladys skool toe loop?

Oplossing:

$$\begin{aligned}
P(\text{reën en loop}) &= \frac{4}{5}\times\frac{1}{6}\\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

c) Wat is die waarskynlikheid dat Gladys se ouers haar met die motor skool toe neem?

Oplossing:

$$\begin{aligned}P(\text{per motor}) &= P(\text{reën en motor}) + P(\text{nie reën en motor})\\ &= \left(\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{12}\right)\\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{60}\\ &= \frac{41}{60}\end{aligned}$$

6. Daar is twee soorte eiendomsinbrake: inbrake by privaat wonings en inbrake by besigheidspersele. In Metropolis is 'n inbraak by 'n privaat woning vier keer so waarskynlik as 'n inbraak by 'n besigheidsperseel. Die volgende statistieke vir elke tipe inbraak is verkry vanaf die Metropolis polisiekantoor.

Inbrake by privaat wonings

Na afloop van 'n inbraak:

- 25% misdadigers word binne 48 uur in hegtenis geneem.
- 15% misdadigers word na 48 uur in hegtenis geneem.
- 60% misdadigers word nooit vir daardie besondere tipe inbraak in hegtenis geneem nie.

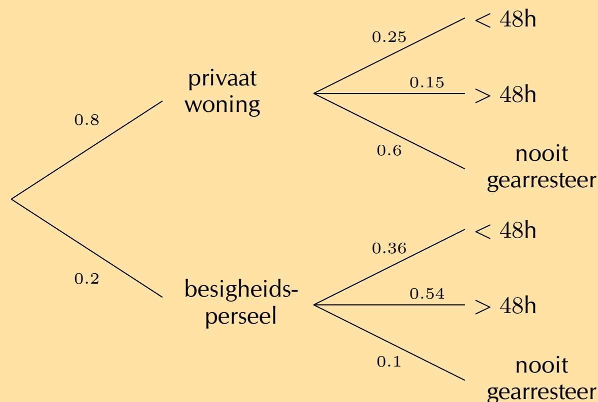
Inbrake by besigheidspersele

Na afloop van 'n inbraak:

- 36% misdadigers word binne 48 uur in hegtenis geneem.
- 54% misdadigers word na 48 uur in hegtenis geneem.
- 10% misdadigers word nooit vir daardie besondere tipe inbraak in hegtenis geneem nie.

a) Stel die inligting hierbo in 'n boomdiagram voor. Wys alle uitkomste en hul onderskeie waarskynlikhede.

Oplossing:



b) Bereken die waarskynlikheid dat daar by 'n privaat woning ingebreek word en dat niemand in hegtenis geneem word nie.

Oplossing:

$$\begin{aligned}P(\text{privaat woning en nooit gearresteer}) &= 0{,}8 \times 0{,}6\\ &= 0{,}48\end{aligned}$$

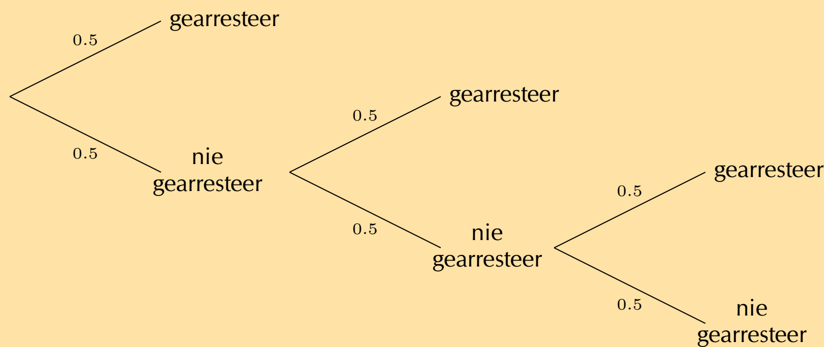
c) Bereken die waarskynlikheid dat die inbrekers by privaat wonings en besigheidspersele in hegtenis geneem word.

Oplossing:

$$\begin{aligned}P(\text{gearresteer}) &= (0{,}8 \times 0{,}25) + (0{,}8 \times 0{,}15) + (0{,}2 \times 0{,}36) + (0{,}2 \times 0{,}54)\\ &= 0{,}5\end{aligned}$$

d) Gebruik jou antwoord in die vorige vraag om 'n boomdiagram op te stel ten einde die waarskynlikheid te bepaal dat 'n inbreker na, op die meeste, drie inbrake in hegtenis geneem word.

Oplossing:



$$\begin{aligned} P(\text{gearresteer na 3 inbrake}) &= 0{,}5 + (0{,}5 \times 0{,}5) + (0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5) \\ &= 0{,}875 \end{aligned}$$

Die antwoord kan ook bereken word deur die waarskynlikheid dat daar nie 'n arrestasie na drie inbrake is nie, van 1 af te trek:

$$1 - (0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5) = 1 - 0{,}5^3 = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$$

Ons sal hierdie beginsel gebruik om die volgende vraag te beantwoord.

e) Bepaal na hoeveel inbrake 'n inbreker ten minste 'n

i. 90% kans het om in hegtenis geneem te word.
ii. 99% kans het om in hegtenis geneem te word.

Oplossing:

Gestel n is die aantal inbrake

i.

$$\begin{aligned} 0{,}90 &= 1 - P(\text{nie gearresteer})^n \\ &= 1 - 0{,}5^n \\ \text{Dus } 0{,}1 &= 0{,}5^n \\ \text{Dus } n &= \log_{0{,}5} 0{,}1 \\ &= 3{,}32 \end{aligned}$$

Na 4 inbrake is daar ten minste 'n 90% kans om in hegtenis geneem te word.

ii.

$$\begin{aligned} 0{,}99 &= 1 - P(\text{nie gearresteer})^n \\ &= 1 - 0{,}5^n \\ \text{Dus } 0{,}01 &= 0{,}5^n \\ \text{Dus } n &= \log_{0{,}5} 0{,}01 \\ &= 6{,}64 \end{aligned}$$

Na 7 inbrake is daar ten minste 'n 99% kans om in hegtenis geneem te word.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BX2 2. 2BX3 3. 2BX4 4. 2BX5 5. 2BX6 6. 2BX7

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 11 – 3: Gebeurlikheidstabelle

1. 'n Aantal bestuurders is gevra oor die aantal motorongelukke waarin hulle die afgelope 10 jaar betrokke was. 'n Gedeelte van die versamelde data word in die tabel hieronder vertoon.

	$\leq$ 2 ongelukke	$>$ 2 ongelukke	Totaal
Vroulik	210	90	
Manlik			
Totaal	350	150	500

a) Wat is veranderlikes wat hier ondersoek word en wat is die doel wat die navorsing?

Oplossing:

Die veranderlikes is geslag en die aantal ongelukke oor 'n tydperk van 10 jaar. Die doel van die navorsing is om te bepaal of daar 'n verband is tussen die geslag van 'n bestuurder en die aantal ongelukke waarby 'n bestuurder betrokke is.

b) Voltooi die tabel.

Oplossing:

	$\leq$ 2 ongelukke	$>$ 2 ongelukke	Totaal
Vroulik	210	90	300
Manlik	140	60	200
Totaal	350	150	500

c) Bepaal of geslag en die aantal ongelukke onafhanklik is deur middel van 'n berekening.

Oplossing:

$$P(\text{vroulik}) = \frac{300}{500} = 0{,}6$$
$$P(\text{manlik}) = \frac{200}{500} = 0{,}4$$
$$P(\leq 2 \text{ ongelukke}) = \frac{350}{500} = 0{,}7$$
$$P(> 2 \text{ ongelukke}) = \frac{150}{500} = 0{,}3$$
$$P(\text{vroulik en } \leq 2 \text{ ongelukke}) = \frac{210}{500} = 0{,}42$$
$$P(\text{vroulik en } > 2 \text{ ongelukke}) = \frac{90}{500} = 0{,}18$$
$$P(\text{manlik en } \leq 2 \text{ ongelukke}) = \frac{140}{500} = 0{,}28$$
$$P(\text{manlik en } > 2 \text{ ongelukke}) = \frac{60}{500} = 0{,}12$$
$$P(\text{vroulik}) \times P(\leq 2 \text{ ongelukke}) = 0{,}42 = P(\text{vroulik en } \leq 2 \text{ ongelukke})$$
$$P(\text{vroulik}) \times P(> 2 \text{ ongelukke}) = 0{,}18 = P(\text{vroulik en } > 2 \text{ ongelukke})$$
$$P(\text{manlik}) \times P(\leq 2 \text{ ongelukke}) = 0{,}28 = P(\text{manlik en } \leq 2 \text{ ongelukke})$$
$$P(\text{manlik}) \times P(> 2 \text{ ongelukke}) = 0{,}12 = P(\text{manlik en } > 2 \text{ ongelukke})$$

Ons sien dat in alle gevalle $P(A) \times P(B) = P(A \text{ en } B)$ is. Dus is die aantal motorongelukke afhanklik van die geslag van die bestuuder.

2. Navorsers het 'n studie gedoen om te toets hoe doeltreffend 'n sekere inenting is om malaria te voorkom. 'n Gedeelte van hulle data word hieronder gewys:

	Malaria	Geen malaria	Totaal
Manlik	a	b	216
Vroulik	c	d	648
Totaal	108	756	864

a) Bereken die waarskynlikheid dat 'n ewekansig gekose deelnemer aan die studie vroulik is.

Oplossing:

$P(\text{vroulik}) = \frac{648}{864} = \frac{3}{4}$

b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n ewekansig gekose deelnemer aan die studie malaria het.

Oplossing:

$P(\text{malaria}) = \frac{108}{864} = \frac{1}{8}$

c) As vroulikheid en om malaria te hê onafhanklike gebeurtenisse is, bereken die waarde van c.

Oplossing:

$$P(\text{vroulik en malaria}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$$
$$\therefore c = \frac{3}{32} \times 864 = 81$$

d) Deur die waarde van c te gebruik, vul die ontbrekende waardes op die tabel in.

Oplossing:

	Malaria	**Geen malaria**	**Totaal**
Manlik	27	189	216
Vroulik	81	567	648
Totaal	108	756	864

3. Die reaksietyd van 400 bestuurders gedurende 'n noodstop is getoets. Binne die studiegroep (kohort) is die waarskynlikheid dat 'n ewekansig-gekose bestuurder nie ouer as 40 jaar is nie 0,3. Die waarskynlikheid van 'n reaksietyd van minder as 1,5 sekondes is 0,7.

a) Bereken die aantal bestuurders wat 40 jaar en jonger is.

Oplossing:

$n(\text{veertig jaar en jonger}) = 0{,}3 \times 400 = 120$

b) Bereken die aantal bestuurders wat 'n reaksietyd van minder as 1,5 sekondes het.

Oplossing:

$n(\text{reaksietyd } < 1{,}5 \text{ s}) = 0{,}7 \times 400 = 280$

c) As ouderdom en reaksietyd onafhanklike gebeurtenisse is, bereken die aantal bestuurders wat 40 jaar en jonger is en wat 'n reaksietyd van minder as 1,5 sekondes het.

Oplossing:

$$P(40 \text{ of jonger en reaksietyd } < 1{,}5 \text{ s}) = 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$$
$$\therefore n(40 \text{ of jonger en reaksietyd } < 1{,}5 \text{ s}) = 0{,}21 \times 400 = 84$$

d) Voltooi die tabel hieronder.

	Reaksietyd $< 1{,}5$ s	**Reaksietyd $> 1{,}5$ s**	**Totaal**
≤ 40 **jaar**			
> 40 **jaar**			
Totaal			400

Oplossing:

	Reaksietyd $< 1{,}5$ s	**Reaksietyd $> 1{,}5$ s**	**Totaal**
≤ 40 **jaar**	84	36	120
> 40 **jaar**	196	84	280
Totaal	280	120	400

4. 'n Nuwe behandeling vir griep (influensa) is getoets op 'n aantal pasiënte om vas te stel of dit beter werk as as 'n placebo of fopmedisyne (wat geen geneeskundige waarde het nie). Die tabel hieronder wys die resultate drie dae ná behandeling:

	Griep	**Geen griep**	**Totaal**
Fopmedisyne	228	60	
Behandeling			
Totaal	240	312	

a) Voltooi die tabel.

Oplossing:

	Griep	Geen griep	Totaal
Fopmedisyne	228	60	288
Behandeling	12	252	264
Totaal	240	312	552

b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n pasiënt die behandeling ontvang.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{behandeling}) &= \frac{n(\text{behandeling})}{n(\text{totale aantal pasiënte})} \\ &= \frac{312}{552} = \frac{13}{23} \end{aligned}$$

c) Bereken die waarskynlikheid dat 'n pasiënt na drie dae geen griep het nie.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{geen griep}) &= \frac{n(\text{geen griep})}{n(\text{totale aantal pasiënte})} \\ &= \frac{264}{552} = \frac{11}{23} \end{aligned}$$

d) Bereken die waarskynlikheid dat 'n pasiënt die behandeling ontvang en na drie dae geen griep het nie.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{geen griep en behandeling}) &= \frac{n(\text{geen griep en behandeling})}{n(\text{totale aantal pasiënte})} \\ &= \frac{252}{552} = \frac{21}{46} \end{aligned}$$

e) Deur 'n berekening te doen, bepaal of 'n pasiënt die behandeling ontvang en of 'n pasiënt na drie dae nie geen griep het nie, afhanklike of onafhanklike gebeurtenisse is.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{behandeling}) \times P(\text{geen griep}) &= \frac{11}{23} \times \frac{13}{23} = \frac{143}{529} = 0{,}270 \\ P(\text{behandeling en geen griep}) &= \frac{21}{46} = 0{,}457 \end{aligned}$$

Dus, om die behandeling te ontvang en om na drie dae geen griep te hê nie, is afhanklike gebeurtenisse.

f) Bereken die waarskynlikheid dat 'n pasiënt wat behandeling ontvang na drie dae geen griep het nie.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{geen griep indien behandel}) &= \frac{n(\text{geen griep en behandeling})}{n(\text{totaal behandel})} \\ &= \frac{252}{264} = \frac{21}{22} \end{aligned}$$

g) Bereken die waarskynlikheid dat 'n pasiënt wat fopmedisyne ontvang na drie dae geen griep het nie.

Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{geen griep as placebo gegee is}) &= \frac{n(\text{geen griep en placebo})}{n(\text{totale aantal placebo})} \\ &= \frac{60}{288} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

h) Vergelyk jou antwoorde in f) en g). Sal jy aanbeveel dat die nuwe behandeling gebruik word vir pasiënte wat griep het?

Oplossing:

Die waarskynlikheid daarvan om geen griep na drie dae te hê nie is baie groter as die nuwe behandeling gebruik word. Dus word die gebruik daarvan aanbeveel.

i) 'n Hospitaal probeer besluit of hulle die nuwe behandeling gaan aankoop. Die nuwe behandeling is baie duurder as die ou behandeling. Volgens die hospitaalrekords het slegs 3200 van die 72 024 grieppasiënte wat die ou behandeling ontvang het, steeds na drie dae griep.

- Stel 'n tweerigting gebeurlikheidstabel op wat die data van die ou en nuwe behandelings vergelyk.
- Deur die data in jou tabel te gebruik, gee raad aan die hospitaal of hulle die nuwe behandeling behoort te koop of nie.

Oplossing:

	Griep	**Geen griep**	**Totaal**
Ou behandeling	3200	68 824	72 024
Nuwe behandeling	12	252	264
Totaal	3212	69 076	72 288

$$P(\text{geen griep met ou behandeling}) = \frac{68\ 824}{72\ 024} = \frac{8603}{9003} = 0{,}956$$

$$P(\text{geen griep met nuwe behandeling}) = \frac{252}{264} == 0{,}955$$

Die waarskynlikheid om na drie dae griep te hê as die nuwe behandeling geneem is, is ongeveer dieselfde as die ou behandeling. Daarom behoort die hospitaal nie die nuwe, duurder behandeling te koop nie.

5. Menslike immuniteitsgebrekvirus (MIV) raak 10% van die Suid-Afrikaanse bevolking.

a) As 'n MIV toets 'n $99{,}9\%$ akkuraatheidskoers het (d.w.s. $99{,}9\%$ van die tyd is die toets reg, $0{,}1\%$ van die tyd is die toetsresultaat verkeerd), stel 'n tweerigting gebeurlikheidstabel op wat die verwagte resultate wys as 10 000 van die algemene bevolking getoets word.

Oplossing:

As 10 000 mense getoets word en die voorkomskoers 10% is:

$$10\ 000 \times 0{,}1 = 1000 \text{ mense sal na verwagting siek word}$$
$$\text{Dus } 10\ 000 - 1000 = 9000 \text{ mense sal na verwagting gesond wees}$$

	Siek	**Gesond**	**Totaal**
Positief			
Negatief			
Totaal	1000	9000	10 000

As die toets $99{,}9\%$ akkuraat is:

$$1000 \times 0{,}999 = 999 \text{ siek mense sal na verwagting positief toets}$$
$$\text{Dus } 1000 - 999 = 1 \text{ siek persoon sal na verwagting negatief toets}$$
$$\text{En } 9000 \times 0{,}999 = 8991 \text{ gesonde mense sal na verwagting negatief toets}$$
$$\text{Dus } 9000 - 8991 = 9 \text{ gesonde mense sal na verwagting positiet toets}$$

	Siek	**Gesond**	**Totaal**
Positief	999	9	1008
Negatief	1	8991	8992
Totaal	1000	9000	10 000

b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n persoon wat positief toets vir MIV nie die siekte het nie, korrek tot twee desimale plekke.

Oplossing:

$$P(\text{gesond as positief toets}) = \frac{n(\text{gesond en positief toets})}{n(\text{positief toets})} = \frac{9}{1008} = 0{,}01$$

Let op dat hierdie waarskynlikheid groter is as wat deur die '99,9% akkuraatheid' van die toets te kenne gee word.

c) In die praktyk word 'n persoon wat positief toets vir MIV altyd 'n tweede keer getoets. Bereken die waarskynlikheid dat 'n MIV-negatiewe persoon positief toets ná twee toetse, korrek tot vier desimale plekke.

Oplossing:

$$P(\text{gesond as tweekeer positief getoets}) = \frac{9}{1008} \times \frac{9}{1008} = \frac{81}{1\ 016\ 064} = 0{,}0001$$

6. 'n Skaars niersiekte raak slegs 1 uit 1000 mense en die toets vir hierdie siekte het 'n 99% akkuraatheidskoers.

a) Teken 'n tweerigting gebeurlikheidstabel wat die resultate wys as 100 000 van die algemene bevolking getoets word.

Oplossing:

As 100 000 mense getoets word en die voorkomskoers 0,1% is:

$$100\ 000 \times 0{,}001 = 100 \text{ mense sal na verwagting siek wees}$$
$$\text{Dus } 100\ 000 - 100 = 99\ 900 \text{ mense sal na verwagting gesond wees}$$

	Siek	**Gesond**	**Totaal**
Positief			
Negatief			
Totaal	100	99 900	100 000

As die toets 99% akkuraat is:

$$100 \times 0{,}99 = 99 \text{ siek mense sal na verwagting positief toets}$$
$$\therefore 100 - 99 = 1 \text{ siek mense sal na verwagting negatief toets}$$
$$\text{En } 99\ 900 \times 0{,}99 = 98\ 901 \text{ gesonde mense sal na verwagting negatief toets}$$
$$\therefore 99\ 900 - 98\ 901 = 999 \text{ gesonde mense sal na verwagting positief toets}$$

	Siek	**Gesond**	**Totaal**
Positief	99	999	1098
Negatief	1	98 901	98 902
Totaal	100	99 900	100 000

b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n persoon wat positief toets vir hierdie seldsame niersiekte, wel siek is met die siekte, korrek tot twee desimale plekke.

Oplossing:

$$P(\text{siek indien positief getoets}) = \frac{n(\text{siek en positief getoets})}{n(\text{positief getoets})} = \frac{99}{1098} = 0{,}09$$

Let op dat dit beteken dat 'n positiewe resultaat 91% van die tyd verkeerd is! Dit is 'n belangrike konsep in die mediese wetenskap. Vir baie skaars siektes moet toetse baie akkuraat wees, anders is dit betekenisloos.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BX8 2. 2BX9 3. 2BXB 4. 2BXC 5. 2BXD 6. 2BXF

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

11.4 Die fundamentele telbeginsel

Oefening 11 – 4: Hoeveelheid moontlike uitkomste as herhaling toegelaat word

1. Tarryn het vyf verskillende rompe, vier verskillende toppe en drie pare skoene. As al die kleure mekaar komplementeer, hoeveel verskillende uitrustings kan sy saamstel?

   Oplossing:

   $$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ verskillende uitrustings}$$

2. In 'n veelvuldige keuse vraestel met 20 vrae kan die antwoorde A, B, C of D wees. Hoeveel verskillende maniere is daar om die vraestel te beantwoord?

   Oplossing:

   $$4^{20} = 1{,}0995 \times 10^{12} \text{ verskillende maniere om die eksamenvraestel te beantwoord}$$

3. 'n Debietkaart benodig 'n vyfsyfer PIN wat bestaan uit syfers van 0 tot 9. Syfers mag herhaal word. Hoeveel moontlike PIN's is daar?

   Oplossing:

   $$10^5 = 100\ 000 \text{ moontlike PIN's}$$

4. In die Gauteng provinsie het die unieke nommerplate opgeraak in 2010. Voor 2010 is nommerplate gevorm in die formaat LLLDDDGP waar L enige letter van die alfabet kan wees, behalwe klinkers en Q en waar D 'n syfer tussen 0 en 9 is. Die nuwe formaat, wat die regering van Gauteng ingebring het, is LLDDLLGP. Hoeveel meer nommerplate is moontlik met die nuwe formaat as met die ou formaat?

   Oplossing:

   $$\text{Ou formaat: } 20^3 \times 10^3 = 8\ 000\ 000 \text{ moontlike kombinasies}$$
   $$\text{Nuwe formaat: } 20^4 \times 10^2 = 16\ 000\ 000 \text{ moontlike kombinasies}$$
   $$16\ 000\ 000 - 8\ 000\ 000 = 8\ 000\ 000$$

   Dus is daar $8\ 000\ 000$ meer moontlike nommerplate met die nuwe formaat.

5. 'n Geskenkmandjie bevat een CD, een boek, een boks lekkergoed, een pakkie neute en een bottel vrugtesap. Die persoon wat die mandjie saamstel, kan kies uit vyf verskillende CDs, agt verskillende boeke, drie verskillende bokse lekkergoed, vier soorte neute en ses geure vrugtesap. Hoeveel verskillende geskenkmandjies kan saamgestel word?

   Oplossing:

   $$5 \times 8 \times 3 \times 4 \times 6 = 2880 \text{ moontlike geskenkmandjies}$$

6. Die kode van 'n kluis het die vorm XXXXYYY waar X enige syfer van 0 to 9 is en Y letters van die alfabet voorstel. Hoeveel kodes is moontlike in elke van die volgende gevalle:

   a) die syfers en letters van die alfabet mag herhaal word.

Oplossing:

$$10^4 \times 26^3 = 175\ 760\ 000 \text{ moontlike kodes}$$

b) die syfers en letters van die alfabet mag herhaal word, maar die kode mag nie 'n nul of enige van die klinkers in die alfabet bevat nie.

Oplossing:

Ons sluit die syfer 0 en die klinkers (A; E; I; O; U) uit, wat 9 ander syfers en 21 letters laat oorbly om van te kies.

$$9^4 \times 21^3 = 60\ 761\ 421 \text{ moontlike kodes}$$

c) die syfers en letters van die alfabet kan herhaal word, maar die die syfers mag alleen priemgetalle wees en die letters X, Y and Z word nie in die kode toegelaat nie.

Oplossing:

Die priemgetalle is 2, 3, 5 en 7. Dit gee ons vier moontlike syfers. As ons die letters X, Y en Z uitsluit, het ons 23 letters om van te kies.

$$4^4 \times 23^3 = 3\ 114\ 752 \text{ moontlike kodes}$$

7. 'n Restaurant bied vier verskillende voorgeregte, agt verskillende hoofgeregte en ses verskillende nageregte aan. 'n Klant kan kies om net een gereg te eet, om twee verskillende gange te eet of 'n driegang maaltyd te bestel. As al die geregte beskikbaar is, hoeveel maaltydopsies bied die restaurant aan?

Oplossing:

- 'n Persoon wat net 'n voorgereg eet het 4 keuses
- 'n Persoon wat net 'n hoofgereg eet het 8 keuses
- 'n Persoon wat net 'n nagerag eet, het 6 keuses
- 'n Persoon wat 'n voorgereg en 'n hoofgereg eet, het $4 \times 8 = 32$ keuses
- 'n Persoon wat 'n voorgereg en 'n nagereg eet, het $4 \times 6 = 24$ keuses
- 'n Persoon wat 'n hoofgereg en 'n nagereg eet, het $8 \times 6 = 48$ keuses
- 'n Persoon wat al drie gange eet het, $4 \times 8 \times 6 = 192$ keuses

Dus, daar is $4 + 8 + 6 + 32 + 24 + 48 + 192 = 314$ verskillende maaltydopsies.

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BXG 2. 2BXH 3. 2BXJ 4. 2BXK 5. 2BXM 6. 2BXN
7. 2BXP

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

11.5 Faktoriaal notasie

Oefening 11 – 5: Faktoriaal notasie

1. Bereken die volgende met 'n sakrekenaar:

a) $3!$

Oplossing:

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

b) $6!$

Oplossing:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

c) $2!3!$

Oplossing:

$$2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$$

d) $8!$

Oplossing:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\ 320$$

e) $\frac{6!}{3!}$

Oplossing:

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

f) $6! + 4! - 3!$

Oplossing:

$$(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1) - (3 \times 2 \times 1) = 720 + 24 - 6 = 738$$

g) $\frac{6! - 2!}{2!}$

Oplossing:

$$\frac{(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) - (2 \times 1)}{2 \times 1} = \frac{720 - 2}{2} = 359$$

h) $\frac{2! + 3!}{5!}$

Oplossing:

$$\frac{(2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1)}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{2 + 6}{120} = \frac{1}{15}$$

i) $\frac{2! + 3! - 5!}{3! - 2!}$

Oplossing:

$$\frac{2 + 6 - 120}{6 - 2} = \frac{-112}{4} = -28$$

j) $(3!)^3$

Oplossing:

$6 \times 6 \times 6 = 216$

k) $\frac{3! \times 4!}{2!}$

Oplossing:

$$\frac{(3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)}{2 \times 1} = 72$$

2. Bereken die volgende met 'n sakrekenaar:

a) $\frac{12!}{2!}$

Oplossing:

$$\frac{(12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{2 \times 1} = 239\ 500\ 800$$

b) $\frac{10!}{20!}$

Oplossing:

$1{,}49 \times 10^{-12}$

c) $\frac{10! + 12!}{5! + 6!}$

Oplossing:

$574\,560$

d) $5!(2! + 3!)$

Oplossing:

960

e) $(4!)^2(3!)^2$

Oplossing:

$20\,736$

3. Bewys dat die volgende waar is:

a) $\frac{n!}{(n-2)!} = n^2 - n$

Oplossing:

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-3)} \times \ldots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-3)} \times \ldots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}$$

$$= n(n-1) = n^2 - n$$

b) $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

Oplossing:

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{\cancel{(n-1)} \times \cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-3)} \times \ldots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{n \times \cancel{(n-1)} \times \cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-3)} \times \ldots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = \frac{1}{n}$$

c) $\frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n-1}$ vir $n > 1$

Oplossing:

$$\frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{\cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-3)} \times \ldots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{(n-1) \times \cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-3)} \times \ldots \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = \frac{1}{n-1}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2BXQ	1b. 2BXR	1c. 2BXS	1d. 2BXT	1e. 2BXV	1f. 2BXW
1g. 2BXX	1h. 2BXY	1i. 2BXZ	1j. 2BY2	1k. 2BY3	2a. 2BY4
2b. 2BY5	2c. 2BY6	2d. 2BY7	2e. 2BY8	3a. 2BY9	3b. 2BYB
3c. 2BYC					

 www.everythingmaths.co.za  m.everythingmaths.co.za

11.6 Toepassing op telprobleme

Oefening 11 – 6: Aantal keuses in 'n ry

1. Hoeveel verskillende moontlike uitkomste is daar vir 'n swemgeleentheid met 6 deelnemers?

   Oplossing:

   $6! = 720$

2. Hoeveel verskillende moontlike uitkomste is daar vir die goue (1ste), silwer (2de) en brons (3de) plekke in 'n swemgeleentheid met 6 deelnemers?

   Oplossing:

   $6 \times 5 \times 4 = 120$

3. Susan wil haar vriende besoek in Pretoria, Johannesburg, Phalaborwa, Oos London en Port Elizabeth. Op hoeveel verskillende maniere kan die besoeke gerangskik word?

   Oplossing:

   $5! = 120$ maniere

4. 'n Hoofseun, 'n onderhoofseun, 'n hoofmeisie en 'n onderhoofmeisie moet gekies word uit 'n studenteraad wat bestaan uit 18 meisies en 18 seuns. Op hoeveel maniere kan hulle gekies word?

   Oplossing:

   $18 \times 17 + 18 \times 17 = 612$ maniere

5. Twintig verskillende mense skryf in vir 'n golfkompetisie. Net die eerste ses van hulle kan pryse wen. Op hoeveel verskillende maniere kan pryse gewen word?

   Oplossing:

   $20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 = 27\ 907\ 200$ maniere

6. Drie letters van die woord 'Empty' word in 'n ry gerangskik. Hoeveel verskillende rangskikkings is moontlik?

   Oplossing:

   $5 \times 4 \times 3 = 60$ rangskikkings

7. 'Pool'balle (potspelballe) is genommer van 1 to 15. Jy het net een stel balle. Op hoeveel verskillende maniere kan jy:

   a) al 15 balle rangskik? Skryf jou antwoord in wetenskaplike notasie en rond af tot twee desimale.
      Oplossing:
      $15! = 1{,}31 \times 10^{12}$

   b) vier van die 15 balle rangskik?
      Oplossing:
      $15 \times 14 \times 13 \times 12 = 32\ 760$

8. Die kapteins van al die sportspanne van 'n skool moet langs mekaar staan vir 'n foto. Die skool se sportsprogram bied rugby, krieket, hokkie, sokker, netbal en tennis aan.

   a) In hoeveel verskillende volgordes kan hulle staan vir die foto?
      Oplossing:

      $$6! = 720 \text{ verskillende volgordes}$$

   b) In hoeveel verskillende volgordes kan hulle staan vir die foto as die rugbykaptein heel links staan en die krieket kaptein heel regs?
      Oplossing:
      Aangesien ons nie kan kies waar om die rugby- en krieketkapteins te plaas nie, is daar net 4 mense oor om te rangskik.

      $$4! = 24 \text{ verskillende volgordes}$$

c) In hoeveel verskillende volgordes kan hulle staan as die rugbykaptein, netbalkaptein en krieketkaptein langs mekaar moet staan.

Oplossing:
As die rugbykaptein, netbalkaptein en krieketkaptein as een objek hanteer word omdat hulle saam moet staan, is daar dan vier objekte om te rangskik. Dus is daar $4!$ verskillende rangskikkings. Die rugbykaptein, netbalkaptein en krieketkaptein kan ook posisies omruil op $3!$ verskillende maniere en dus is daar:

$$4! \times 3! = 144 \text{ verskillende volgordes}$$

9. Hoeveel verskillende driesyfer getalle kan gevorm word met die syfers 1 tot 6 as:

a) herhaling nie toegelaat word nie?
Oplossing:

$$6 \times 5 \times 4 = 120$$

b) herhaling toegelaat word?
Oplossing:

$$6^3 = 216$$

10. Daar is twee verskillende rooi boeke en drie verskillende blou boeke op ’n rak.

a) Op hoeveel verskillende maniere kan hierdie boeke gerangskik word?
Oplossing:

$$5! = 120 \text{ verskillende maniere om die boeke te rangskik}$$

b) As jy die rooi boeke bymekaar wil hê, op hoeveel verskillende maniere kan die boeke gerangskik word?

Oplossing:
As die rooi boeke as een objek hanteer word is daar vier verskillende objekte om te rangskik en dus is daar $4!$ verskillende rangskikkings. Die rooi boeke kan ook onder mekaar op $2!$ verskillende maniere gerangskik word en dus is daar:

$$4! \times 2! = 48 \text{ verskillende maniere om die boeke te rangskik}$$

c) As jy al die rooi boeke bymekaar wil hê en al die blou boeke bymekaar wil hê, op hoeveel verskillende maniere kan die boeke gerangskik word?

Oplossing:
Daar is twee groepe boeke, rooi en blou, wat gerangskik kan word op $2!$ verskillende maniere. Dan is daar twee rooi boeke wat op op $2!$ verskillende maniere gerangskik kan word en drie blou boeke wat op $3!$ maniere gerangskik kan word. Dus is daar

$$2! \times 2! \times 3! = 24 \text{ verskillende maniere om die boeke te rangskik}$$

11. Daar is twee verskillende Wiskundeboeke, drie verskillende Natuurwetenskapboeke, twee verskillende Lewenswetenskapboeke en vier verskillende Rekeningkundeboeke op ’n rak. Op hoeveel verskillende maniere kan hulle gerangskik word as:

a) die volgorde nie saak maak nie?
Oplossing:

$$11! = 39\ 916\ 800 \text{ verskillende maniere om die boeke te rangskik}$$

b) al die boeke van dieselfde vak saam geplaas word?

Oplossing: Daar is vier groepe boeke wat op $4!$ verskillende maniere gerangskik kan word. Twee van die boeke is Wiskundeboeke, drie is Natuurwetenskapboeke, twee is Lewenswetenskap boeke en vier is Rekeningkundeboeke. Dus is daar:

$$4! \times 2! \times 3! \times 2! \times 4! = 13\ 824 \text{ verskillende maniere om die boeke te rangskik}$$

c) die twee Wiskundeboeke eerste geplaas word?

Oplossing:
Die Wiskundeboeke kan op $2!$ verskillende maniere gerangksik word terwyl die oorblywende boeke op $9!$ verskillende maniere gerangskik kan word. Dus is daar:

$$2! \times 9! = 725\ 760 \text{ verskillende maniere om die boeke te rangskik}$$

d) die Rekeningkundeboeke langs mekaar geplaas word?

Oplossing:
Die Rekeningkundeboeke kan op $4!$ verskillende maniere gerangskik word en, as hulle as 'n enkele objek beskou word, kan hulle op $8!$ verskillende maniere saam met die ander boeke gerangskik word. Dus is daar:

$$4! \times 8! = 967\ 680 \text{ verskillende maniere om die boeke te rangskik}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BYD	2. 2BYF	3. 2BYG	4. 2BYH	5. 2BYJ	6. 2BYK
7. 2BYM	8. 2BYN	9. 2BYP	10. 2BYQ	11. 2BYR	

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 11 – 7: Aantal rangskikkings van stelle wat soortgelyke objekte bevat

1. Jy het die woord 'EXCELLENT'.

a) As die herhaalde letters as verskillend beskou word, hoeveel letter-rangskikkings is moontlik?

Oplossing:

$$9! = 362\ 880$$

b) As die herhaalde letters as identies beskou word, hoeveel letter-rangskikkings is moontlik?

Oplossing:
Daar is 3 E's en 3 L'e en dus moet ons deel deur $3!$ en $2!$.

$$\frac{9!}{3! \times 2!} = 30\ 240$$

c) As die eerste en laaste letters identies is, hoeveel letter-rangskikkings is daar?

Oplossing: Die woord kan begin en eindig met E of L. Met 'n E is daar $\frac{7!}{2!}$ letter-rangskikkings (deel deur 2 L'e) en met L is daar $\frac{7!}{3!}$ letter-rangskikkings (deel deur 3 E's). Dus is daar:

$$\frac{7!}{3!} + \frac{7!}{2!} = 840 + 2520 = 3360 \text{ moontlike letter-rangskikkings}$$

d) Hoeveel letter-rangskikkings is daar as die rangskikking met 'n L begin?

Oplossing: Dit is ekwivalent daaraan om een L te verwyder uit van die stel letters beskikbaar vir rangskikking. Dus is daar:

$$\frac{8!}{3!} = 6720 \text{ moontlike letter-rangskikkings}$$

e) Hoeveel letter-rangskikkings is moontlik as die woord einding met 'n T?

Oplossing: Dit is ekwivalent daaraan om die T te verwyder uit van die stel letters beskikbaar vir rangskikking. Dus is daar:

$$\frac{8!}{3! \times 2!} = 3360 \text{ moontlike letter-rangskikkings}$$

2. Jy het die woord 'ASSESSMENT'.

a) As die herhaalde letters as verskillend beskou word, hoeveel letter-rangskikkings is moontlik?

Oplossing:

$$10! = 3\ 628\ 800$$

b) As die herhaalde letters as identies beskou word, hoeveel letter-rangskikkings is moontlik?

Oplossing:

$$\frac{10!}{4! \times 2!} = 75\ 600$$

c) As die eerste en laaste letters identies is, hoeveel letter-rangskikkings is daar?

Oplossing: Die woord kan begin en eindig met S of E. Met 'n S is daar $\frac{8!}{2! \times 2!}$ letter-rangskikkings (deel deur 2 E's en 2 oorblywende S'e) en met E is daar $\frac{8!}{4!}$ letter-rangskikkings (deel deur 4 S'e). Dus is daar:

$$\frac{8!}{2! \times 2!} + \frac{8!}{4!} = 10\ 080\ + 1680 = 11\ 760 \text{ moontlike letter-rangskikkings}$$

d) Hoeveel letter-rangskikkings kan gemaak word as die rangskikking begin met 'n klinker?

Oplossing: Die woord kan begin en eindig met A of E. Met 'n S is daar $\frac{9!}{4! \times 2!}$ letter-rangskikkings (deel deur 2 E's en 4 S'e) en met E is daar $\frac{9!}{4!}$ letter-rangskikkings (deel deur 4 S'e). Dus is daar:

$$\frac{9!}{4! \times 2!} + \frac{9!}{4!} = 7560\ + 15\ 120 = 22\ 680 \text{ moontlike letter-rangskikkings}$$

e) Hoeveel letter-rangskikkings is moontlik as al die S'e aan die begin van die woord is?

Oplossing: Dit is ekwivalent daaraan om al die S'e te verwyder uit die beskikbare letters. Dus is daar:

$$\frac{6!}{2!} = 360 \text{ moontlike letter-rangskikkings}$$

3. Op 'n klavier verteenwoordig die wit klawers die volgende note: C, D, E, F, A, G, B. Hoeveel deuntjies, sewe note in lengte, kan gekomponeer word met hierdie note as:

a) 'n noot slegs een keer gespeel mag word?

Oplossing:

$$7! = 5040 \text{ moontlike deuntjies}$$

b) die note herhaal mag word?

Oplossing:

$$7^7 = 823\ 543 \text{ moontlike deuntjies}$$

c) die note herhaal mag word en die deuntjie begin en eindig met 'n D?

Oplossing: Die deuntjie wat begin en eindig met 'n D los vyf moontlike posisies waarin die sewe note gerangskik kan word. Dus is daar:

$$7^5 = 16\ 807 \text{ moontlike deuntjies}$$

d) die deuntjie bestaan uit 3 D's, 2 B's en 2 A's.

Oplossing:

$$\frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 210 \text{ moontlike deuntjies}$$

4. Daar is drie swart krale en vier wit krale in 'n ry. Op hoeveel verskillende manier kan die krale gerangskik word as?

   a) krale met dieselfde kleur as verskillend beskou word?

      Oplossing:

      $$7! = 5040 \text{ maniere}$$

   b) krale met dieselfde kleur as identies beskou word?

      Oplossing:

      $$\frac{7!}{3! \times 4!} = 35 \text{ maniere}$$

5. Daar is agt balle op 'n tafel. Party is wit en party is rooi. Die wit balle is identies en die rooi balle is identies. Die balle word een vir een verwyder. In hoeveel verskillende volgordes kan die balle verwyder word as:

   a) sewe van die balle rooi is?

      Oplossing:

      $$\frac{8!}{7!} = 8 \text{ verskillende volgordes}$$

   b) drie van die balle rooi is?

      Oplossing:

      $$\frac{8!}{3! \times 5!} = 56 \text{ verskillende volgordes}$$

   c) daar vier van elke kleur is?

      Oplossing:

      $$\frac{8!}{4! \times 4!} = 70 \text{ verskillende volgordes}$$

6. Hoeveel viersyfer getalle kan gevorm word met die syfers 3,4,6 en 7 as:

   a) daar herhaling mag wees?

      Oplossing:

      $$4^4 = 256 \text{ moontlike getalle}$$

   b) elke syfer slegs een keer gebruik mag word?

      Oplossing:

      $$4! = 24 \text{ moontlike getalle}$$

   c) as die getal onewe is en herhaling toegelaat word?

      Oplossing: As die getal onewe is, moet dit eindig in 3 of 7. As dit in 3 eindig is daar 4^3 verskillende rangskikkings van die eerste drie syfers en, ooreenkomstig, as dit met 7 eindig is daar 4^3 verskillende rangskikkings. Dus is daar

      $$4^3 + 4^3 = 128 \text{ moontlike getalle wat aan die kriteria voldoen}$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BYS 2. 2BYT 3. 2BYV 4. 2BYW 5. 2BYX 6. 2BYY

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 11 – 8: Oplos van waarskynlikheidsprobleme met die fundamentele telbeginsel

1. 'n Musiekgroep beplan 'n konserttoer deur Suid-Afrika. Hulle sal in Kaapstad, Port Elizabeth, Pretoria, Johannesburg, Bloemfontein, Durban en Oos-Londen optree.

   a) Op hoeveel verskillende maniere kan hulle hulle toer beplan indien daar geen beperkings is nie?

   Oplossing:

   $$7! = 5040 \text{ verskillende volgordes moontlik}$$

   b) Hoeveel verskillende toerbeplannings is daar indien dit in Kaapstad begin en in Durban eindig?

   Oplossing:

   Dit verminder die beskikbare voorwerpe (stede) met twee, dus

   $$5! = 120 \text{ verskillende volgordes moontlik}$$

   c) Indien die toer stede willekeurig kies, wat is die waarskynlikheid dat hul vertoning in Kaapstad, Port Elizabeth, Durban en Oos-Londen opeenvolgend sal plaasvind? Beantwoord tot 3 desimale plekke.

   Oplossing:

   Indien die stede saamgegroepeer word, kan hulle as 'n enkele voorwerp in die rangskikking beskou word, dus is daar $4!$ verskillende maniere om die voorwerpe te rangskik. Met die gegroepeerde stede is daar $4!$ verskillende maniere om hulle te rangskik. Daarom is daar $4! \times 4! = 576$ verskillende volgordes.

   Daarom is die waarskynlikheid van enige rangskikking waar Kaapstad, Port Elizabeth, Durban en Oos-Londen opeenvolgend gebeur:

   $$\begin{aligned} P(\text{die 4 stede saamgegroepeer}) &= \frac{n(\text{die 4 stede saamgegroepeer})}{n(\text{totale aantal volgordes moontlik})} \\ &= \frac{576}{5040} = 0{,}114 \end{aligned}$$

2. 'n Sekere restaurant het die volgende opsies op die spyskaart beskikbaar vir 'n driegang maaltyd:

VOORGEREG	HOOFGEREG	NAGEREG
Kalamari slaai	Braaihoender	Roomys en sjokoladesous
Oesters	Gekrummelde skaaptjops	Aarbeie en room
Vis in knoffelsous	Skaapvleis bobotie	Malvapoeding met vla
	Hoenderschnitzel	Pere in brandewynsous
	Groentelasange	
	Hoenderklontjies	

   a) Hoeveel verskillende driegang maaltye is moontlik?

   Oplossing:

   $$3 \times 6 \times 4 = 72 \text{ verskillende vaste spyskaarte}$$

   b) Wat is die waarskynlikheid dat 'n driegang maaltyd hoender sal bevat?

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} n(\text{vaste spyskaart met hoender}) &= 3 \times 3 \times 4 = 36 \\ n(\text{totale aantal vaste spyskaarte}) &= 72 \\ \text{Dus } P(\text{vaste spyskaart met hoender}) &= \frac{36}{72} = 0{,}5 \end{aligned}$$

3. Agt verskillende pare jeans en 5 verskillende hemde hang op 'n reling.

   a) Op hoeveel verskillende maniere kan die klere op die reling gerangskik wees?

      Oplossing:

      $$13! = 6\ 227\ 020\ 800 \text{ verskillende maniere}$$

   b) Op hoeveel verskillende maniere kan die klere gerangskik wees as al die jeans saamhang en al die hemde saamhang?

      Oplossing: Die hemde en jeans vorm twee groepe, wat op $2!$ maniere gerangskik kan word. Die vyf hemde kan op $5!$ maniere gerangskik word en die jeans kan op $8!$ manier gerangskik word.

      $$2! \times 8! \times 5! = 9\ 676\ 800$$

   c) Wat is die waarskynlikheid, korrek tot drie desimale plekke, dat die klere gerangskik kan word met 'n hemp aan een kant en 'n paar jeans aan die ander kant?

      Oplossing:

      - Die vyf verskillende keuses van hemde en agt verskillende keuses van pare jeans kan 5×8 verskillende rangskikkings aan die kante van die reling vorm.
      - Daar is $2!$ verskillende maniere om 'n hemp aan die een kant en 'n paar jeans aan die ander kant te rangskik: S - - - - - - - - - - - J and J - - - - - - - - - - - S
      - As 'n hemp aan een kant en 'n paar jeans aan die ander kant is, bly daar $11!$ verskillende rangskikkings van die oorblywende klere oor.

      Daarom is daar:

      $2 \times 8 \times 5 \times 11! = 3\ 193\ 344\ 000$ verskillende maniere om die klere te rangskik

      Die waarskynlikheid van 'n klere rangskikking met 'n hemp aan die een kant en 'n paar jeans aan die ander kant $= \frac{3\ 193\ 344\ 000}{6\ 227\ 020\ 800} = 0{,}513$

4. 'n Fotograaf plaas agt stoele in 'n ry in sy studio om die debatspan af te neem. Die span bestaan uit drie seuns en vyf meisies.

   a) Op hoeveel verskillende maniere kan die debatspan sit?

      Oplossing:

      $$8! = 40\ 320$$

   b) Wat is die waarskynlikheid dat 'n spesifieke seun en 'n spesifieke meisie langs mekaar sal sit?

      Oplossing: Beskou die spesifieke seun en meisie as een groep. Die groep kan op $2!$ verskillende maniere sit. Die hoeveelheid maniere hoe hierdie groep en die oorblywende 6 mense kan sit, is $7!$. Daarom is die totale aantal maniere hoe hierdie spesifieke seun en meisie langs mekaar op die foto kan sit $2! \times 7! = 10\ 080$. Die waarkynlikheid dat 'n spesifieke seun en meisie langs mekaar kan sit, is:

      $$\frac{10\ 080}{40\ 320} = 0{,}25$$

5. As die letters van die woord 'COMMITTEE' lukraak rangskik is, wat is die moontlikheid dat die letter-rangskikkings begin en eindig met dieselfde letter?

   Oplossing:

   - Daar is 2 M's, 2 T's en 2 E's en 'n totaal van 9 letters.
   - Totale aantal letter-rangskikking is $\frac{9!}{2! \times 2! \times 2!} = 45\ 360$
   - Waarkynlikheid dat die eerste en laaste letter dieselfde is:
     - M(COITTEE)M
       Totaal van 7 letters waarvan daar 2E's en 2T's is
       Hoeveelheid letter-rangskikkings $= \frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$
     - T(MCOIEEM)T
       Totaal van 7 letters waarvan daar 2E's en 2M's is
       Hoeveelheid letter-rangskikkings $= \frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$
     - E(TTMCOIM)E
       Totaal van 7 letters waarvan daar 2T's en 2M's is
       Hoeveelheid letter-rangskikkings $= \frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$

- Totale aantal van letter-rangskikking as die letter-rangskikkings met dieselfde letter begin en eindig $= 3 \times 1260 = 3780$.

$$P(\text{eerste en laaste letter dieselfde}) = \frac{3780}{45\,360} = \frac{1}{12}$$

6. Vier verskillende Wiskundeboeke, drie verskillende Ekonomieboeke en twee verskillende Geografieboeke is op 'n rak rangskik. Wat is die waarskynlikheid dat al die boeke van dieselfde vak langs mekaar rangskik is?

   Oplossing:

   Totale aantal van verskillende maniere waarop die boeke rangskik kan word, is

   $$9! = 362\,880$$

   .

   Daar is 3 vakke se boeke wat op 3! maniere rangskik kan word.

   Daarom, die totale aantal rangskikkings as al die vakke saam rangskik is

   $$3! \times 4! \times 3! \times 2! = 1728$$

   $$P(\text{boeke van dieselfde vak langs mekaar}) = \frac{1728}{362\,880} = \frac{1}{210}$$

7. 'n Nommerplaat bestaan uit drie letters van die alfabet (behalwe vir F en S) gevolg deur drie syfers van 0 tot 9. Die nommers en letters mag herhaal. Bereken die waarskynlikheid dat 'n ewekansig gekose nommerplaat:

   a) met die letter D begin en met die syfer 3 eindig.

      Oplossing:

      Totale aantal rangskikkings $= 24^3 \times 10^3$

      Totale aantal rangskikkings wat met D begin en met 3 eindig is $24^2 \times 10^2$.

      $$P(\text{eerste D en met 3 eindig}) = \frac{24^2 \times 10^2}{24^3 \times 10^3} = \frac{1}{240}$$

   b) het presies een D.

      Oplossing: Die 'D' kan by die eerste, tweede of derde posisie wees. Die ander twee letters kan nie 'n 'D' insluit nie, wat 23 ander letters oorlaat. Daarom is daar

      $$23^2 \times 10^3 \times 3 \text{ verskillende rangskikkings wat slegs een D bevat}$$

      $$\text{Dus } P(\text{slegs een D}) = \frac{23^2 \times 10^3 \times 3}{24^3 \times 10^3} = \frac{529}{4608}$$

   c) bevat ten minste een 5.

      Oplossing:

      $$\begin{aligned} P(\text{bevat ten minste een } 5) &= 1 - P(\text{geen vywe}) \\ &= 1 - \frac{24^3 \times 9^3}{24^3 \times 10^3} \\ &= 1 - 0{,}729 = 0{,}271 \end{aligned}$$

8. In die 13-syfer identifikasie (ID) nommers van Suid-Afrikaanse burgers:

   - is die eerste ses syfers van die geboortedag van die persoon in YYMMDD formaat
   - dui die volgende vier syfers geslag aan, met 5000 en hoër wat na manlik verwys en 0001 tot 4999 wat na vroulik verwys
   - is die volgende syfer die land ID; 0 is Suid-Afrika en 1 is nie.
   - was die tweede laaste syfer 'n rasidentifikasie, maar deesdae is dit 8 vir almal
   - is die laaste syfers 'n beheersyfer, wat die res van die syfer verifieer.

   Neem aan dat die beheersyfer 'n ewekansig gegenereerde syfer tussen 0 tot 9 is en ignoreer die feit dat die skrikkeljaar 'n ekstra dag het.

a) Bereken die totale aantal moontlike ID nommers.

Oplossing: Vir alle beskikbare rangskikkings en indein 'n ID syfer as ABCDEFGHIJKLM gestruktueer is:

- A en B is enige twee syfers tussen 00 en 99 (jaar)
- C en D is enige twee syfers tussen 01 en 12 (maand)
- E en F is enige twee syfers van 01 tot 28, 30 of 31 afhangende van die maand (dag)
- G, H,I en J is enige twee syfers van 0001 tot 9999 (geslag)
- K is óf 0 óf 1
- L is 'n 8
- M is enige syfer tussen 0 en 9

Daarom, die totale aantal moontlike ID nommers vir 30-dag maande is:

$$100 \times 4 \times 30 \times 9999 \times 2 \times 1 \times 10 = 2\ 399\ 760\ 000$$

Daarom, die totale aantal moontlike ID nommers vir 31-dag maande is:

$$100 \times 7 \times 31 \times 9999 \times 2 \times 1 \times 10 = 4\ 339\ 566\ 000$$

Daarom, die totale aantal moontlike ID nommers vir Februarie is:

$$100 \times 1 \times 28 \times 9999 \times 2 \times 1 \times 10 = 559\ 944\ 000$$

Daarom, die totale aantal moontlike ID nommers is:

$$2\ 399\ 760\ 000 + 4\ 339\ 566\ 000 + 559\ 944\ 000 = 9\ 239\ 076\ 000$$

b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n lukraak gegenereerde ID nommer 'n manlike Suid-Afrikaanse burger is wat gedurende die 1980's gebore is. Skryf jou antwoord korrek tot twee desimale plekke.

Oplossing:

Daar is 'n klomp inligting in die probleem en ons kan dit vereenvoudig deur die toepaslike inligting te identifiseer. Ons wil die waarskynlikheid bereken dat 'n ID nommer is vir 'n manlike Suid-Afrikaanse burger wat gedurende die 1980's gebore, is. Dit beteken ons moet kyk na die syfers vir die land, geslag en geboortejaar.

Indien 'n ID nommer as ABCDEFGHIJKLM gestruktueer is:

- Vir 'n Suid-Afrikaner is K 0.
- Vir 'n man is GHIJ van 5000 tot 9999.
- Vir iemand gebore gedurende die 1980's is AB tussen 80 en 89

Dit verskaf $1 \times 5000 \times 10 = 50\ 000$ kombinasies vir ABGHIJK.

Sonder enige beperkings, is die totale kombinasies vir ABGHIJK $2 \times 9999 \times 100 = 1\ 999\ 800$.

$$\text{Dus } P(\text{SA man 80's}) = \frac{50\ 000}{1\ 999\ 800} = 0{,}025$$

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BYZ 2. 2BZ2 3. 2BZ3 4. 2BZ4 5. 2BZ5 6. 2BZ6
7. 2BZ7 8. 2BZ8

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 11 – 9: Einde van hoofstuk oefeninge

1. 'n OTM-kaart het 'n viersyfer PIN. Die vier syfers mag herhaal en elkeen van hulle kan gekies word uit die syfers 0 tot 9.

   a) Wat is die totale getal van moontlike PIN's?
   Oplossing:

   $$10^4 = 10\ 000$$

   b) Wat is die waarskynlikheid om die eerste syfer korrek te raai?
   Oplossing:
   $\frac{1}{10}$

   c) Wat is die waarskynlikheid om die tweede syfer korrek te raai?
   Oplossing:
   $\frac{1}{10}$

   d) Indien jou OTM-kaart gesteel word, wat is die waarskynlikheid, korrek tot vier desimale plekke, dat 'n dief al vier syfers op sy eerste raaiskoot reg raai?
   Oplossing:
   $\left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0{,}0001$

   e) Na drie foutiewe PIN probeerslae word 'n OTM-kaart geblok om gebruik te word. Indien jou OTM-kaart gesteel word, wat is die waarskynlikheid, korrek tot vier desimale plekke, dat 'n dief die kaart sal blok? Neem aan die dief probeer elke keer 'n verskillende PIN.
   Oplossing:

   $$\begin{aligned} P(\text{verkeerde PIN}) &= 1 - P(\text{korrekte PIN}) \\ &= 1 - \frac{1}{10^4} = 0{,}9999 \\ \text{Dus } P(\text{3 verkeerde PIN pogings}) &= (0{,}9999)^3 \\ &= 0{,}9997 \end{aligned}$$

2. Die LOTTO reëls sê die volgende:

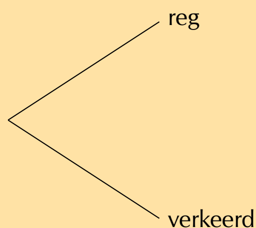
   - Ses nommers van syfers 1 tot 49 word getrek - hiedie word 'n 'trekking' genoem.
   - Nommers word nie vervang nadat hul getrek is nie, so jy kan nie dieselfde getal meer as een maal hê nie.
   - Die rangskikking van die nommers maak nie saak nie.

   Jy besluit om 'n LOTTO kaartjie te koop wat uit 6 nommers bestaan.

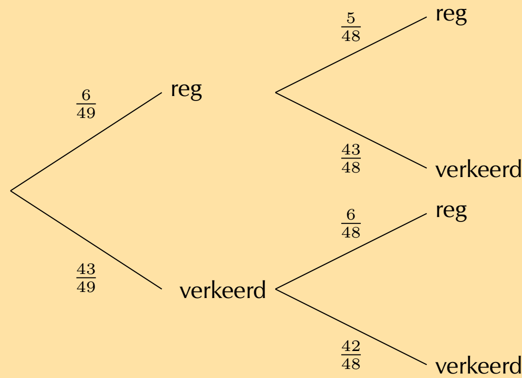
   a) Hoeveel verskillende moontlike LOTTO trekkings is daar? Beantwoord in wetenskaplike notasie en rond af tot die tweede desimaal na die komma.
   Oplossing:

   $$49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 = 1{,}01 \times 10^{10}$$

   b) Voltooi die boomdiagram hieronder nadat die eerste twee LOTTO nommers getrek is en wys die moontlike uitkomste en waarskynlikhede van jou kaartjie.



Oplossing:



c) Wat is die waarskynlikheid om die eerste syfer reg te trek?

Oplossing:

$$P(\text{eerste syfer reg}) = \frac{6}{49}$$

d) Wat is die waarskynlikheid om die tweede syfer korrek te trek as jou eerste syfer korrek is?

Oplossing:

$$P(\text{tweede syfer reg indien eerste reg}) = \frac{5}{48}$$

e) Wat is die waarskynlikheid om die tweede syfer korrek te trek as jou eerste syfer nie korrek getrek is nie?

Oplossing:

$$P(\text{tweede syfer reg indien eerste verkeerd}) = \frac{6}{48}$$

f) Wat is die waarskynlikheid om die tweede syfer korrek te trek?

Oplossing:

Hierdie is die som van waarskynlikhede van die uitkomste waar die tweede syfer korrek getrek is:

$$\begin{aligned} P(\text{tweede syfer reg}) &= \frac{6}{49} \times \frac{5}{48} + \frac{43}{49} \times \frac{6}{48} \\ &= \frac{5}{392} + \frac{43}{392} \\ &= \frac{6}{49} \end{aligned}$$

Let op dat die antwoord dieselfde is as die waarskynlikheid om die eerste syfer korrek te trek. Indien jy onbewus is oor die uitkomste van vorige gebeurtenisse, is die waarskynlikheid van die uitkomste van 'n sekere gebeurtenis gelyk aan die waarskynlikheid van die uitkomste van die eerste gebeurtenis. Leerders is nie verplig om hierdie konsep te leer nie, maar die konsep is interessant om op te let.

g) Wat is die waarskynlikheid om al 6 LOTTO nommers korrek te hê? Skryf jou antwoord in wetenskaplike notasie, afgerond tot die tweede desimaal na die komma.

Oplossing:

$$P(\text{al 6 reg}) = \frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{2}{45} \times \frac{1}{44} = 7{,}15 \times 10^{-8}$$

3. Die bevolking statistieke van Suid-Afrika wys dat 55% van alle babas wat gebore word, is meisies. Bereken die waarskynlikheid dat 'n egpaar wat beplan om kinders te hê, 'n seun gevolg deur 'n meisie en dan weer 'n seun sal hê. Neem aan dat elke geboorte 'n onafhanklike gebeurtenis is. Skryf jou antwoord as 'n persentasie, korrek tot twee desimale plekke.

Oplossing:

$$0{,}45 \times 0{,}55 \times 0{,}45 = 11{,}14\%$$

4. Fezille en Vuzi skryf 'n Wiskunde toets. Die waarskynlikheid dat Fezille die toets sal slaag is $0{,}8$. Die waarskynlikheid dat Vuzi die toets sal slaag is $0{,}75$. Wat is die waarskynlikheid dat slegs een van hulle die toets sal slaag?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} P(\text{net een slaag}) &= P(\text{F slaag}) \times P(\text{V druip}) + P(\text{F druip}) \times P(\text{V slaag}) \\ &= 0{,}8 \times 0{,}25 + 0{,}2 \times 0{,}75 \\ &= 0{,}35 \end{aligned}$$

5. Landlyn telefoonnommers is 10 syfers lank. Nommers begin met nul gevolg deur 9 syfers gekies van die syfers 0 tot 9. Herhaling is toegelaat.

   a) Hoeveel verskillende telefoonnommers is moontlik?

   Oplossing:

$$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$$

   b) Die eerste drie syfers van 'n nommer vorm die area kode. Die area kode vir Kaapstad is 021. Hoeveel verskillende telefoonnommers is beskikbaar vir Kaapstad?

   Oplossing:

$$10^7 = 10\ 000\ 000$$

   c) Wat is die waarskynlikheid dat die tweede syfer 'n ewe getal is?

   Oplossing: Daar is 5 ewe getalle tussen 0 en 9, daarom

$$P(\text{tweede syfer gelyk}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

   d) Ignoreer die eerste syfer, wat is die waarskynlikheid dat 'n telefoonnommer slegs uit onewe syfers bestaan? Skryf jou antwoord tot drie desimale plekke.

   Oplossing:

$$\left(\frac{5}{10}\right)^9 = 0{,}002$$

6. Let op na die woord 'POSSIBILITY'.

   a) Hoeveel verskillende maniere kan die letters gerangskik word as herhaalde letters as identies beskou word?

   Oplossing:
   Daar is twee S'e en drie I's, daarom is daar:

$$\frac{11!}{2! \times 3!} = 3\ 326\ 400 \text{ verskillende rangskikkings}$$

   b) Wat is die waarskynlikheid dat 'n lukraak gegenereerde rangskikking van die letters sal begin met drie I's? Skryf jou antwoord as 'n breuk.

   Oplossing:
   Indien die rangskikking met drie I's begin, bly POSSBLTY oor om rangskik te word.

$$\begin{aligned} n(\text{rangskikkings wat begin met III}) &= \frac{8!}{2!} = 20\ 160 \\ \text{Dus } P(\text{rangskikkings wat begin met III}) &= \frac{20\ 160}{3\ 326\ 400} \\ &= \frac{1}{165} \end{aligned}$$

7. Die kode vir 'n kluis bestaan uit 10 syfers, gekies uit die syfers 0 tot 9. Geen syfer word herhaal nie. Bepaal die waarskynlikheid vir 'n kode waar die eerste syfer onewe is en geen van die eerste drie syfers 'n nul mag wees nie. Skryf jou antwoord as 'n persentasie, korrek tot twee desimale plekke.

   Oplossing:

   - Daar is 5 onewe syfers van 0 tot 9, so daar is vyf rangskikkings vir die eerste syfer.
   - Vir die tweede syfer is daar 8 syfers oor om te rangskik aangesien die eerste syfer en nul verwyder is.
   - Vir die derde syfer is daar 7 syfers oor om te rangskik aangesien nul en die eerste twee syfers verwyder is.
   - Vir die vierde syfer is daar 7 syfers (0 is nou ingesluit) oor wat in $7!$ maniere gekombineer kan word vir die oorblywende syfers.

$$\begin{aligned}\text{Totale moontlike aantal kodes} &= 10! = 3\ 628\ 800\\ \text{Totale aantal kodes met eerste syfer onewe, eerste 3 syfers nie-nul} &= 5 \times 8 \times 7 \times 7!\\ &= 1\ 411\ 200\\ \text{Dus } P(\text{eerste syfer onewe, eerste drie syfers nie-nul}) &= \frac{1\ 411\ 200}{3\ 628\ 800}\\ &= 38{,}89\%\end{aligned}$$

8. Vier verskillende rooi boeke en drie verskillende blou boeke moet op 'n rak rangskik word. Wat is die waarskynlikheid dat al die rooi boeke en al die blou boeke sal saamstaan?

   Oplossing:

   Totale aantal van rangskikkings $= 7!$

   As die rooi boeke saam staan en die blou boeke saam staan, dan is daar twee groepe boeke wat op $2!$ maniere rangskik kan word.

   Dan is daar vier rooi boeke wat op $4!$ maniere gerangskik kan word en drie blou boeke wat op $3!$ maniere gerangskik kan word.

$$P(\text{blou saam en rooi saam}) = \frac{2! \times 3! \times 4!}{7!} = \frac{2}{35}$$

9. Die waarskynlikheid dat Thandiswa op 'n Saterdagaand sal gaan dans (gebeurtenis D) is $0{,}6$ en die waarskynlikheid dat sy sal gaan fliek is $0{,}3$ (gebeurtenis M). Bepaal die waarskynlikheid dat sy sal:

   a) gaan dans en gaan fliek as D en M onafhanklik is.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}P(D \text{ en } M) &= P(D) \times P(M)\\ &= 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18\end{aligned}$$

   b) gaan dans of gaan fliek as D en M onderling uitsluitend is.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}P(D \text{ of } M) &= P(D) + P(M)\\ &= 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}9\end{aligned}$$

   c) gaan dans en gaan fliek as $P(D \text{ of } M) = 0{,}7$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}P(D \text{ en } M) &= P(D) + P(M) - P(D \text{ of } M)\\ &= 0{,}6 + 0{,}3 - 0{,}7 = 0{,}2\end{aligned}$$

   d) nog gaan dans, nog gaan fliek as $P(D \text{ en } M) = 0{,}8$.

Oplossing:

$$P(\text{nie } (D \text{ en } M)) = 1 - P(D \text{ en } M)$$
$$= 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

10. Drie seuns en vier meisies sit in 'n ry.

 a) Op hoeveel verskillende maniere kan hulle in die ry sit?
 Oplossing:

$$7! = 5040$$

 b) Wat is die waarskynlikheid dat hulle in afwisselende geslagte sit?
 Oplossing:
 Daar is slegs een manier hoe hulle kan sit: GBGBGBG Die getal maniere hoe hulle afwisselend kan sit $= 1! \times 3! \times 4!$

$$P(\text{sit in alternerende posisies}) = \frac{1! \times 3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$$

11. Die nommerplaat op 'n motor bestaan uit enige 3 letters van die alfabet (behalwe klinkers, J en Q) gevolg deur enige 3 syfers van 0 tot 9. Vir 'n motor wat lukraak gekies word, wat is die waarskynlikheid dat die nommerplaat met 'n Y begin en met 'n onewe syfer eindig? Skryf jou antwoord as 'n breuk.

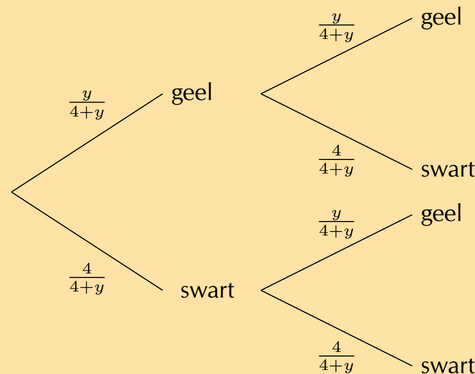
 Oplossing:

 - Die nommerplaat begin met 'n Y, so daar is slegs 1 keuse vir die eerste letter.
 - Die nommerplaat eindig met 'n onewe syfer, so daar is 5 opsies (1, 3, 5, 7, 9)
 - Daar is 19 letters beskikbaar, want die 5 klinkers (A, E, I, O, U), J en Q word uitgesluit.

$$n(\text{nommerplate wat begin met Y, eindig met 'n onewe syfer}) = 1 \times 19^2 \times 10^2 \times 5$$
$$= 180\ 500$$
$$n(\text{totale aantal nommerplate moontlik}) = 19^3 \times 10^3$$
$$= 6\ 859\ 000$$
$$\therefore P(\text{nommerplaat wat begin met Y, eindig met onewe syfer}) = \frac{180\ 500}{6\ 859\ 000}$$
$$= \frac{1}{38}$$

12. Daar is vier swart balle en y geel balle in 'n sak. Thandi haal 'n bal uit, merk sy kleur op en plaas dit terug in die sak. Dan haal sy nog 'n bal uit en merk ook sy kleur op. As die waarskynlikheid dat beide balle dieselfde kleur is, $\frac{5}{8}$ is, bepaal die waarde van y.

 Oplossing:
 Deur 'n boomdiagram te gebruik, kan die verskillende uitkomste en waarskynlikhede soos volg geïllustreer word:



Oplos van y:

$$\frac{5}{8} = \frac{y}{4+y} \times \frac{y}{4+y} + \frac{4}{4+y} \times \frac{4}{4+y}$$
$$\frac{5}{8} = \left(\frac{y}{4+y}\right)^2 + \left(\frac{4}{4+y}\right)^2$$
$$\frac{5}{8} = \frac{y^2+4^2}{(4+y)^2}$$
$$5(4+y)^2 = 8(y^2+16))$$
$$5(16+8y+y^2) = 8y^2+128$$
$$80+40y+5y^2 = 8y^2+128$$

Dus $3y^2 - 40y + 48 = 0$

$$(3y-4)(y-12) = 0$$

Dus $y = 12(y \neq \frac{4}{3}$ aangesien aantal balle nie breuke kan wees nie)

Dink jy jy het dit? Kry hierdie antwoord en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2BZ9 2. 2BZB 3. 2BZC 4. 2BZD 5. 2BZF 6. 2BZG
7. 2BZH 8. 2BZJ 9. 2BZK 10. 2BZM 11. 2BZN 12. 2BZP

 **www.everythingmaths.co.za**  **m.everythingmaths.co.za**